Repetitorium der Mathematik

mit Beispielen aus der Physik

von

Martin Lommatzsch

8. April 2015

Vorwort

Dieses Repetitorium ist aus der Motivation entstanden den naturwissenschaftlichen Unterricht an Schulen für die Schüler zu erleichtern. Dazu werden in den ersten Kapiteln mathematische Grundlagen in Form von Vokabeln, Zahleneigenschaften, Rechenoperationen und Abkürzungen eingeführt. Da viele Schüler von der gesellschaftlichen Meinung, Mathematik und Naturwissenschaften seien schwer, zu Ausreden in der Leistung inspiriert werden, soll in diesem Buch explizit auf die Einfachheit der mathematischen Sprache hingewiesen werden. Dieser Trivialität gehen allerdings einige Dinge voraus, die dem durchschnittlichen Schüler erst nach seiner Schullaufbahn bewusst werden - das Mathematik vom Vokabular legt, da Wörter und ihre Abkürzungen eindeutige Bedeutungen erhalten, welche in anderen Sprachen, wie Deutsch oder Englisch, oftmals erst durch den Satz eine genauere Bedeutung erhalten. Auch soll dargestellt werden, dass es in der Mathematik im Vergleich zu anderen Sprachen keine Ausnahmen gibt.

Dieses Buch soll ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht werden und als Wiederholungswerk für die naturwissenschaftlichen Fächer dienen. Aus diesem Grund wird sich dieses Werk ständig weiterentwickeln und dabei auf das Verständnis der Schüler ausgerichtet werden. Als Grundlage zum Verständnis dieses Buches soll der Umgang mit Zahlen und Grundrechenoperationen genügen, sodass es für jeden Schüler einer weiterführenden Schule geeignet ist. In diesem Buch wird schnell deutlich, dass das mathematische Verständnis stark verknüpft mit der korrekten Verwendung von definierten Begriffen ist. Deswegen sollte jeder Schüler angeregt werden die jeweiligen eingeführten Vokabeln zu verinnerlichen.

Zu jedem Abschnitt werden Übungsaufgaben existieren, welche mit den Lösungen im Anhang verglichen werden können. Die Aufgaben sind so gestellt, dass sie das Verständnis überprüfen und vertiefen. Deswegen ist es ratsam, wenn alle Aufgaben bearbeitet und erst danach mit den Lösungen verglichen werden. Auch werden Aufgaben gestellt, die erst mit Wissen aus den nachfolgenden Kapiteln zu lösen sind. Diese Aufgaben sollten bearbeitet werden, wenn das Wissen mit dem Umgang der Abkürzungen oder Operatoren bekannt ist, um das schon bestehende Wissen zu reaktivieren und weiter zu vertiefen.
Zu Letzt sei angemerkt, dass in absehbarer Zeit wesentlich mehr Aufgaben mit Lösungen es in dieses Buch schaffen werden. Des Weiteren werden auch Aufgaben folgen, die Abschnitte voraussetzen, welche weiter hinten im Buch sind. Zu diesen Aufgaben werden Hinweise auf die betreffenden Abschnitte geliefert, sodass je nach Vorwissen auch komplexere Aufgaben bearbeitet werden können.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen **6**

2 Algebraische Grundlagen **12**
2.1 Grundrechenarten und Brüche . . . 12
2.2 Brüche als Dezimalzahlen . . . 20
2.3 Einsetzungsverfahren . . . 22
2.4 Prozentrechnung . . . 24
2.5 Assoziativ und Kommutativ . . . 27
2.5.1 Kommutator . . . 27
2.5.2 Assoziativgesetz . . . 28
2.5.3 Klammersetzung . . . 28
2.6 Potenzen . . . 31
2.6.1 Wurzeln . . . 32
2.6.2 10er Potenzen . . . 32
2.6.3 Binomische Formeln . . . 33
2.7 Logarithmen . . . 36
2.8 Äquivalenzumformung . . . 38
2.8.1 Quadratische Ergänzung . . . 39
2.9 Substitution . . . 43
2.10 Fakultäten und Binominal Koeffizienten . . . 45

3 Geometrie **47**
3.1 Zahlenstrahl . . . 47
3.2 Winkel . . . 49
3.3 Rechteck . . . 55
3.4 Dreieck . . . 57
3.5 Spezielle Vierecke . . . 64
3.6 Mehrdimensionale Vielecke . . . 68
3.7 Kreis . . . 75
3.7.1 Bogenmaß . . . 76
3.7.2 Kreisteile . . . 77
3.8 Zylinder und Kegel . . . 80
3.9 Kugeln . . . 83

4 Trigonometrie **86**

5 Funktionen **90**
5.1 Wertetabellen und Punkte . . . 92
5.2 Geraden . . . 96

5.3 Parabeln 102
5.4 Umkehrfunktionen 107
5.5 Grenzwerte 108
5.6 Hyperbel 108
5.7 Reihen 109
5.8 Polynomfunktionen 109
5.9 Gebrochen rationale Funktionen 111
5.10 Trigonometrische Funktionen 111
5.11 Trigonometrische Identitäten 112
5.12 Exponentialfunktion 113

6 Vektoren 114
6.1 Eigenschaften 114
6.2 Spatprodukt 114
6.3 Matrizen 114

7 Differentiation und Integration 115
7.1 Operatoralgebra 115
7.2 Ableitungsregeln 118
7.3 Integration 120
7.4 Integrationsregeln 121
7.5 Differentialgleichungen 1. Ordnung 123
7.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung 123

8 Wirtschaftsrechnungen 124

9 Wahrscheinlichkeitsrechnung 125
9.1 Zufallsexperimente 125
9.2 Permutationen 125

10 Komplexe Zahlen 126

11 Physikalische Anwendungen 127
11.1 Ellipse und Ellipsoid 127

12 Anhang 128
12.1 Alphabete 128
12.2 Pascal'sches Dreieck 128
12.3 10er Potenzen 129
12.4 Mathematische Begriffe auf Englisch 130
12.5 Lösungen 131
12.5.1 Lösungen zu Mengen 131
12.5.2 Lösungen zur Bruchrechnung 132
12.5.3 Lösungen zu Dezimalzahlen 134
12.5.4 Lösungen zu Einsetzungsverfahren 135
12.5.5 Lösung zur Prozentrechnung 135
12.5.6 Lösungen zur Klammersetzung 136
12.5.7 Lösungen zur Potenzen 136
12.5.8 Lösungen zu Logarithmen 137

12.5.9 Lösungen zur Äquivalenzumformung . . . 138
12.5.10 Lösungen zur Substitution . . . 138
12.5.11 Lösungen zu Fakultäten . . . 139
12.5.12 Lösungen zum Zahlenstrahl . . . 139
12.5.13 Lösungen zu Winkeln . . . 140
12.5.14 Lösungen zu Rechtecken . . . 141
12.5.15 Lösungen zu Dreiecken . . . 142
12.5.16 Lösungen zu Vierecken . . . 142
12.5.17 Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken . . . 143
12.5.18 Lösungen zu Kreisen . . . 143
12.5.19 Lösungen zu Zylindern und Kegeln . . . 145
12.5.20 Lösungen zu Kugeln . . . 146
12.5.21 Lösungen zur Trigonometrie . . . 146
12.5.22 Lösungen zu Wertetabellen und Punkte . . . 146
12.5.23 Lösungen zu Geraden . . . 149
12.5.24 Lösungen zu Parabeln . . . 150

1 Mengen

Zahlen können in verschiedene Kategorien eingeordnet werden. Dabei bilden die sogenannten natürlichen Zahlen die Basis aller anderen Zahlenmengen, die in der Schule besprochen werden. Die natürlichen Zahlen werden durch das Symbol $\mathbb{N}$ beschrieben und beinhalten Zahlen wie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$ Die mathematische Schreibweise dazu wäre: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, wobei die geschweiften Klammern $\{\}$ alle Zahlen aufgelistet werden, die zur Zahlenmenge gehören. Oftmals werden die natürlichen Zahlen auch ohne Null verwendet und werden im Folgenden als $\mathbb{N}^+$ bezeichnet. Die erste Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Bei genauem Betrachten fällt auf, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, was mit dem Mengenoperator $\subset$ („ist Teilmenge von") wie folgt geschrieben wird:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind alle Zahlen, die durch Brüche dargestellt werden können. Diese Zahlen werden rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{7}, 1, 2, \frac{34}{15}, ...\right\}$ genannt.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.2}$$

Die Folgen der Einführung der ganzen Zahlen sind gravierend, da die Subtraktion damit an Wichtigkeit verliert, da zum Beispiel aus $-1 = +(-1)$ wird.

Aber es gibt auch noch Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Diese nennt man reelle Zahlen $\mathbb{R}$ und beherbergt Zahlen wie zum Beispiel $\pi, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Die letzte Erweiterung der Zahlenmengen wird die Zahl $i = \sqrt{-1}$ gegeben und führt somit die komplexen Zahlen ein $\mathbb{C}$. Komplexe Zahlen werden in der Regel nicht an Schulen besprochen, dennoch hat ihre Einführung einige Vorteile beim Beschreiben von Zusammenhängen im Bereich der Analysis[1].

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{1.3}$$

Es ist möglich Teilmengen auf zustellen, dazu werden bestimmte Mengenoperatoren wie $\subset$ verwendet. Sei die Menge $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Menge $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$ gegeben, dann existieren folgende Mengenoperationen:

[1] Die Analysis ist eines der großen Teilgebiete der Mathematik neben der Algebra. Der Begriff rührt von analysieren her.

Die Vereinigung $\cup$, welche wie folgt dargestellt wird:

$$\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \text{Vereinung von } \mathbb{M} \text{ mit } \mathbb{K} \tag{1.4}$$

Die Vereinigung wird auch gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ oder $\mathbb{K}$ befinden“, damit ist gemeint, dass alle Zahlen der ersten Menge $\mathbb{M}$ und alle Zahlen der zweiten Menge $\mathbb{K}$ eine neue Menge bilden in der alle Zahlen aus der Menge $\mathbb{M}$ und der Menge $\mathbb{K}$ vorkommen. Das mathematische „oder“ ist anders zu gebrauchen als das „oder“ im normalen Sprachgebrauch, da es in der Sprach im Zusammenhang betrachtet werden muss, während es immer die selbe Vorgehensweise in der Mathematik fordert.

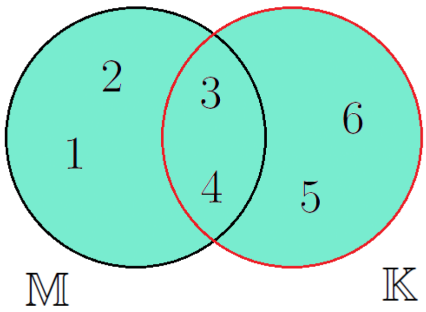


Abbildung 1.1: Vereinigung von zwei Mengen. Schwarz ist die Menge $\mathbb{M}$ und rot die Menge $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte Fläche bildet die Vereinigung der beiden Mengen.

Die Abbildung (1.1) zeigt wie in der Menge $\mathbb{M}$ die Zahlen $1, 2, 3$ und 4 und in der Menge $\mathbb{K}$ die Zahlen $3, 4, 5$ und 6 enthalten sind, da $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eine weitere Mengenoperation ist der sogenannte Durchschnitt $\cap$:

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 4\} \qquad \text{Durchschnitt von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.5}$$

Der Durchschnitt wird gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ befinden“. Auch hier ist zu unterscheiden zwischen dem mathematischen und sprachlichen „und“.

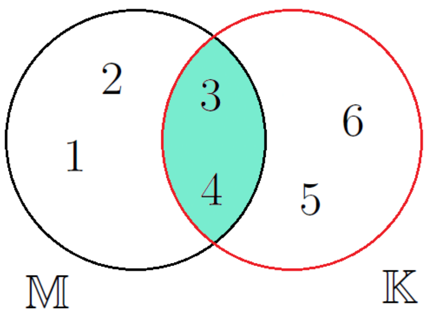


Abbildung 1.2: Durchschnitt von zwei Mengen. Schwarz ist die Menge $\mathbb{M}$ und rot die Menge $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte Fläche bildet den Durchschnitt der beiden Mengen.

Die Abbildung (1.2) zeigt, was sich hinter dem mathematischen logischen Operator „und“ verbirgt. Der Durchschnitt ist gegeben als alle Zahlen einer Menge, die auch in der anderen Menge vorhanden sind. Somit sind nur die 3 und die 4 in diesem Fall in der resultierenden Durchschnittsmenge.

Die letzte wichtige Mengen Operation ist die Differenz \:

$$\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 2\} \qquad \text{Differenz von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.6}$$

Dabei wird die Differenz gelesen als „Alle Zahlen von $\mathbb{M}$ ohne die Zahlen aus $\mathbb{K}$ “. Grafisch veranschaulicht würde dies wie folgt aussehen:

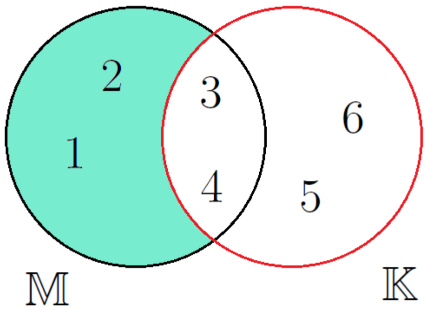


Abbildung 1.3: Differenz von $\mathbb{M}$ ohne $\mathbb{K}$. Schwarz ist die Menge $\mathbb{M}$ und rot die Menge $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte Fläche bildet die Menge, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{M}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der Menge $\mathbb{K}$ enthalten sind.

Deutlich zu erkennen ist, dass die Zahlen, welche in beiden Mengen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ vorkommen nicht Teil der resultierenden Menge sind. Außerdem wird deutlich, dass die resultierende Menge sich unterscheidet wenn die Mengen bei dieser Operation umdrehen würde.

$$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{5, 6\} \qquad \text{Differenz von } \mathbb{K} \text{ und } \mathbb{M} \tag{1.7}$$

Diese Umkehrung der Mengen bei der Operation hätte ein vollkommen anderes Ergebnis, wie auch in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

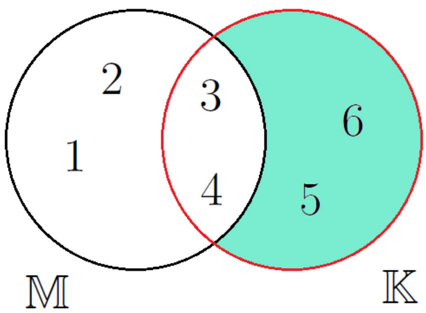


Abbildung 1.4: Differenz von $\mathbb{K}$ ohne $\mathbb{M}$. Schwarz ist die Menge $\mathbb{M}$ und rot die Menge $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte Fläche bildet die Menge, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{K}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der Menge $\mathbb{M}$ enthalten sind.

Es wird deutlich, dass bei der Differenz von Mengen $\setminus$ die Reihenfolge entscheidender Natur ist, während sich der Durchschnitt und die Vereinigung nicht verändern würden.
Nun da alle wichtigen Mengenoperationen eingeführt wurden, werden noch einige wichtige mathematische Abkürzungen eingeführt, welche zur Beschreibung einer Menge des Öfteren von Nöten sein. Diese Abkürzungen können als Vokabeln angesehen werden, welche jeder Schüler beherrschen sollte.
Wenn eine Zahl ein Element einer Zahlenmenge ist, dann wird dies mathematisch geschrieben als:

$$4 \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

Weitere wichtige Abkürzungen der Mathematik werden nun aufgelistet und im Folgenden verwendet.

$$\begin{array}{ll} \forall & \text{für alle gilt} \\ \exists & \text{es existiert} \\ \exists! & \text{es existiert genau ein} \\ \wedge & \text{und} \\ \vee & \text{oder} \\ \neg & \text{nicht} \\ := & \text{definiert als} \\ \| & \text{parallel zu} \\ \perp & \text{orthogonal (senkrecht) zu} \\ \measuredangle & \text{Winkel zwischen} \\ \varnothing & \text{leere Menge} \\ \Rightarrow & \text{daraus folgt} \\ < & \text{kleiner als} \\ > & \text{größer als} \\ \stackrel{!}{=} & \text{setze gleich} \\ \triangleq & \text{entspricht} \end{array} \tag{1.9}$$

So würde der Satz „Die Menge $\mathbb{M}$ beinhaltet alle Zahlen x, die die Bedingung erfüllen, dass sie Element der reellen Zahlen sind und dass es genau ein Zahl e gibt durch die man die Zahl x teilen kann, sodass 1 dabei heraus kommt.“ mathematisch so aussehen:

$$\mathbb{M} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists! e \forall x \mid \frac{x}{e} = 1 \right\} \tag{1.10}$$

Mittels dieser Abkürzungen ist es möglich eine Zahlenmenge einzuführen, welche von besonderer Bedeutung ist - die Primzahlen. Also die Zahlen die nur durch selbst oder durch Eins teilbar sind. Diese Zahlenmenge kann wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{P} = \left\{ p \in \mathbb{N} | \nexists \frac{p}{n} \in \mathbb{N} \forall n \neq \{1, p\} \right\} \tag{1.11}$$

Übungsaufgaben zu Mengen

Aufgaben mit Zahlen, die noch unbekannt sind, können vorerst ausgelassen werden. Allerdings sollten diese nach der jeweiligen Einführung nachgeholt werden.

Aufgabe 1: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

$a)$ $4 \in$	$b)$ $-1 \in$	$c)$ $9 \in$	$d)$ $0,45 \in$
$e)$ $\frac{1}{2} \in$	$f)$ $-6 \in$	$g)$ $4,75 \in$	$h)$ $0,\bar{3} \in$
$i)$ $\frac{1}{81} \in$	$j)$ $-\frac{3}{7} \in$	$k)$ $3 \in$	$l)$ $0,125 \in$
$m)$ $0,01 \in$	$n)$ $\frac{1}{11} \in$	$o)$ $3,141 \in$	$p)$ $-0,75 \in$

Aufgabe 2: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

$a)$ $0,\bar{6} \in$	$b)$ $-\sqrt{4} \in$	$c)$ $0 \in$	$d)$ $\sqrt{3} \in$
$e)$ $\frac{7}{8} \in$	$f)$ $\sqrt{13} \in$	$g)$ $\frac{2}{\sqrt{16}} \in$	$h)$ $1\% \in$
$i)$ $\frac{1}{\sqrt{5}} \in$	$j)$ $-42 \in$	$k)$ $\sqrt{144} \in$	$l)$ $\frac{16}{2} \in$
$m)$ $5,01 \in$	$n)$ $17 \in$	$o)$ $1,1\bar{6} \in$	$p)$ $-\sqrt{64} \in$

Aufgabe 3: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

$a)$ $\lg 10 \in$	$b)$ $\sqrt{9} \in$	$c)$ $-7 \in$	$d)$ $\pi \in$
$e)$ $\frac{e^2}{2} \in$	$f)$ $-\frac{1}{6} \in$	$g)$ $1 \in$	$h)$ $0,597813553 \in$
$i)$ $\ln 2 \in$	$j)$ $-e^{\ln \frac{1}{3}} \in$	$k)$ $\log_3 9 \in$	$l)$ $0,1 \in$
$m)$ $28\% \in$	$n)$ $\frac{\pi}{4} \in$	$o)$ $\sqrt{17} \in$	$p)$ $-\frac{1}{\ln e} \in$

Aufgabe 4: *Bestimme die Vereinigung, den Durchschnitt und jede mögliche Differenz der jeweiligen Mengen.*

a) $\mathbb{M} = \{1, 5, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8\}$
b) $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
c) $\mathbb{M} = \{5, 7, 9, 11\}$ und: $\mathbb{K} = \{4, 6, 8, 10\}$
d) $\mathbb{M} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) $\mathbb{M} = \{3, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$
f) $\mathbb{M} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Aufgabe 5: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 6\}$, $\mathbb{L} = \{4, 5, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} =$
b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) =$
e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) =$
f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L} \Delta \mathbb{K} =$
h) $\mathbb{M} \Delta \mathbb{K} =$

Aufgabe 6: *Bestimme* $\mathbb{M}\Delta\mathbb{K}$ *wie in Aufgabe 5 definiert und zeichne wie in den Abbildungen (1.1) bis (1.4) und kennzeichne die Fläche der resultierenden Menge. Hierbei soll* $\mathbb{M} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ *sein.*

Aufgabe 7: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ *und* $\mathbb{K} = \{\} = \varnothing$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} =$
b) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} =$
c) $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.1) Lösungen zu Mengen.

2 Algebraische Grundlagen

Um den naturwissenschaftlichen Unterricht und mathematischen Erklärungen besser folgen zu können, müssen die Begrifflichkeiten der Algebra geklärt werden. Dazu werden im Laufe dieses Kapitels die wichtigsten mathematischen Vokabeln und Rechenvorschriften erläutert.

2.1 Grundrechenarten und Brüche

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begrifflichkeiten der Grundrechenarten in einer Tabelle geklärt werden.

Rechenart	1. Teil	Rechenoperator	2.Teil	Ergebnis
Addition	Summand	$+$	Summand	= Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	= Differenz
Multiplikation	Faktor	$\cdot$	Faktor	= Produkt
Division	Dividend	:	Divisor	= Quotient
Division (als Bruch)	Zähler	/	Nenner	= Quotient

Generell gilt, dass die Rechnungen der Multiplikation und die der Division immer vor jeglicher Addition oder Subtraktion durchgeführt werden müssen (Punkt- vor Strichrechnung)!
Durch die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden die Begriffe der Subtraktion nicht länger benötigt, da ein Summand oder sogar beide Summanden negativ sein können, sodass die Addition mit ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Verallgemeinerung von Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist. Auch die Divisionsbegriffe werden nur noch im Sinne der Bruchrechnung verwendet.
Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt stellen alle Zahlen, die durch einen Bruch dargestellt werden, die Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dar. Mit jeder Zahlenmenge sind alle Rechenoperationen zulässig.

Ein Bruch setzt sich aus seinem Nenner, der definiert in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes unterteilt wird, und den Zähler, der beschreibt wie viele Teile vom Nenner tatsächlich vorzufinden sind
(Bruch = $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$). Mittels Brüchen kann man die gleiche Zahl auf verschiedene Arten darstellen, so ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $\frac{2}{4}$. Wenn der Nenner erhöht wird spricht man vom Erweitern. Bei einer Verkleinerung des Nenners wird vom Kürzen gesprochen.
Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert mit der man den Bruch erweitern möchte. Im folgenden Beispiel wird der Bruch im ersten Schritt mit zwei und danach mit vier erweitert.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \tag{2.1}$$

Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert mit der man den Bruch kürzen möchte. Im folgenden Beispiel wird der Bruch im ersten Schritt mit zwei und danach mit acht erweitert.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Bei der Addition beziehungsweise der Subtraktion von Brüchen müssen die Nenner der beteiligten Brüche so erweitert oder gekürzt werden, dass sie gleich sind. Dann können die Zähler verrechnet werden. Um immer einen gemeinsamen Nenner zu finden, kann man den ersten Bruch mit dem Nenner des zweiten Bruch und den zweiten Bruch mit dem Nenner des ersten Bruchs erweitern (wie im Subtraktionsbeispiel gezeigt).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \\
\frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{18-4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Bei der Multiplikation von Brüchen, werden die Nenner miteinander multipliziert und bilden so den neuen Nenner. Auch die Zähler werden miteinander multipliziert.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \tag{2.4}$$

Bei der Division muss man mit dem Kehrwert, also der Vertauschung von Nenner und Zähler des Divisors, multiplizieren.

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Ferner gilt bei Berücksichtigung von Parametern oder Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{Erweitern} \\
\frac{a \cdot n}{b \cdot n} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \quad \text{Kürzen} \\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b} \quad \text{Addition} \\
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{d \cdot b} \quad \text{Subtraktion} \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{d \cdot b} \quad \text{Multiplikation} \\
\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \quad \text{Division}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Im den folgenden Abschnitten wird der Malpunkt zwischen einer Zahl und einem Parameter beziehungsweise einer Variablen oder zwischen Parametern beziehungsweise Variablen selbst nicht mehr notiert, es sei denn dieser ist zum Verständnis von besonderer Bedeutung. Aus diesem Grund soll auch auf die Schreibweise für gemischte Brüche vollständig verzichtet werden, da in dieser Schreibweise $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ das Additionszeichen eingespart wird. Sobald das

Multiplikationszeichen durch eine Konvention im Unterricht fallen gelassen wird, würde es zu Verwirrungen und Missverständnissen kommen, sodass entweder $2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ oder $2\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}$ gilt. Dieses Buch orientiert sich an der Konvention, welche in der höheren Mathematik verwendet wird. Deswegen sollte auf die Schreibweise von gemischten Brüchen vollständig verzichtet werden und ausschließlich nur eine einzige Konvention - die des Weglassens des Multiplikationsoperators - verwendet werden.

Übungsaufgaben zur Bruchrechnung

Aufgabe 1: *Welcher Bruch ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Brüchen ein.*

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$	*b)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{4}$	*c)* $\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{2}$	*e)* $\frac{5}{6} \quad \frac{3}{4}$	*f)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} \quad \frac{1}{4}$	*h)* $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{15}$	*i)* $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} \quad \frac{7}{8}$	*k)* $\frac{6}{7} \quad \frac{3}{4}$	*l)* $\frac{4}{5} \quad \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{3}$	*n)* $\frac{5}{9} \quad \frac{3}{7}$	*o)* $\frac{5}{25} \quad \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{8}$	*q)* $\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3}$	*r)* $\frac{14}{8} \quad \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} \quad \frac{24}{64}$	*t)* $\frac{81}{9} \quad \frac{36}{4}$	*u)* $\frac{55}{5} \quad \frac{131}{11}$

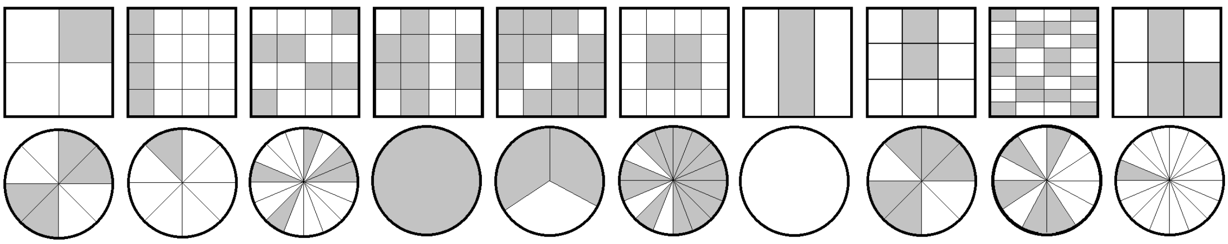
Aufgabe 2: *Kürze die Brüche bis man sie nicht weiter kürzen kann.*

a) $\frac{8}{16} =$	*b)* $\frac{6}{14} =$	*c)* $\frac{9}{15} =$
d) $\frac{6}{24} =$	*e)* $\frac{48}{64} =$	*f)* $\frac{12}{144} =$
g) $\frac{75}{125} =$	*h)* $\frac{30}{75} =$	*i)* $\frac{72}{108} =$
j) $\frac{16}{48} =$	*k)* $\frac{6}{18} =$	*l)* $\frac{24}{8} =$
m) $\frac{12}{96} =$	*n)* $\frac{16}{64} =$	*o)* $\frac{48}{144} =$
p) $\frac{33}{3} =$	*q)* $\frac{54}{72} =$	*r)* $\frac{5000}{10000} =$
s) $\frac{24}{72} =$	*t)* $\frac{36}{66} =$	*u)* $\frac{63}{108} =$

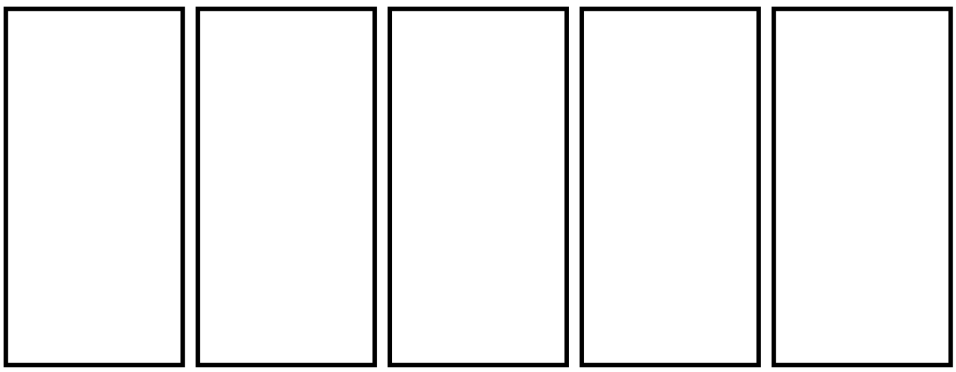
Aufgabe 3: *Erweitere die Brüche mit der angegebenen Zahl.*

a) $\frac{3}{4}$ mit: 9	*b*) $\frac{5}{7}$ mit: 7	*c*) $\frac{1}{12}$ mit: 8
d) $\frac{1}{2}$ mit: 24	*e*) $\frac{7}{8}$ mit: 6	*f*) $\frac{4}{6}$ mit: 11
g) $\frac{5}{7}$ mit: 8	*h*) $\frac{5}{13}$ mit: 9	*i*) $\frac{4}{11}$ mit: 7
j) $\frac{7}{4}$ mit: 9	*k*) $\frac{6}{11}$ mit: 5	*l*) $\frac{3}{12}$ mit: 4
m) $\frac{2}{3}$ mit: 21	*n*) $\frac{7}{8}$ mit: 3	*o*) $\frac{4}{6}$ mit: 13
p) $\frac{3}{9}$ mit: 8	*q*) $\frac{5}{12}$ mit: 6	*r*) $\frac{7}{12}$ mit: 7
s) $\frac{3}{4}$ mit: 17	*t*) $\frac{5}{6}$ mit: 4	*u*) $\frac{13}{6}$ mit: 1000

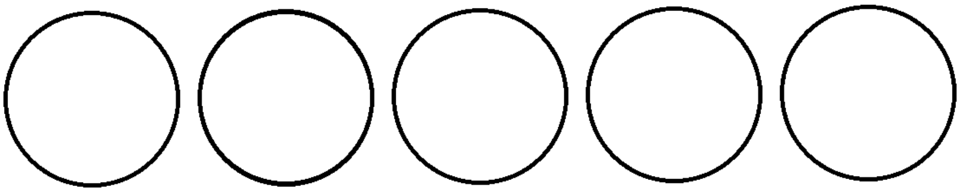
Aufgabe 4: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 7: *Addiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	*b)* $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=$	*c)* $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=$
d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$	*e)* $\frac{5}{16}+\frac{3}{8}=$	*f)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=$
g) $\frac{1}{4}+\frac{3}{32}=$	*h)* $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=$	*i)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$

Aufgabe 8: *Subtrahiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$	*b)* $\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=$	*c)* $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=$
d) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=$	*e)* $\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=$	*f)* $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=$
g) $\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=$	*h)* $\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=$	*i)* $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$

Aufgabe 9: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=$ *b)* $\frac{13}{7}-\frac{15}{14}=$ *c)* $\frac{9}{5}+\frac{13}{10}=$

d) $\frac{21}{2}-\frac{31}{8}=$ *e)* $\frac{9}{8}+\frac{19}{16}=$ *f)* $\frac{5}{3}-\frac{11}{9}=$

g) $\frac{7}{4}+\frac{67}{32}=$ *h)* $\frac{13}{5}-\frac{25}{15}=$ *i)* $\frac{13}{3}+\frac{11}{6}=$

j) $\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=$ *k)* $\frac{13}{4}-\frac{9}{6}=$ *l)* $\frac{9}{5}+\frac{3}{4}=$

m) $\frac{21}{4}-\frac{11}{8}=$ *n)* $\frac{3}{8}+\frac{9}{32}=$ *o)* $\frac{4}{3}-\frac{10}{9}=$

p) $\frac{7}{8}-\frac{11}{32}=$ *q)* $\frac{13}{5}-2=$ *r)* $14+\frac{11}{6}=$

s) $\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=$ *t)* $\frac{15}{6}-\frac{7}{3}=$ *u)* $\frac{9}{5}-\frac{3}{4}=$

v) $\frac{23}{4}+\frac{17}{8}=$ *w)* $\frac{7}{9}-\frac{11}{18}=$ *x)* $\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=$

y) $\frac{5}{20}-\frac{1}{1000}=$ *z)* $\frac{13}{15}+6=$

Aufgabe 10: *Multipliziere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=$

d) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=$ *e)* $\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=$ *f)* $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=$

Aufgabe 11: *Dividiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}:\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}:\frac{3}{10}=$

d) $\frac{1}{2}:\frac{3}{8}=$ *e)* $\frac{3}{8}:\frac{5}{16}=$ *f)* $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}:\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}:\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=$

Aufgabe 12: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche!*

$a)\ \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} =$	$b)\ \frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} =$	$c)\ \frac{9}{5} : \frac{13}{10} =$
$d)\ \frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} =$	$e)\ \frac{9}{8} : \frac{19}{16} =$	$f)\ \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} =$
$g)\ \frac{7}{4} : \frac{67}{32} =$	$h)\ \frac{13}{5} : \frac{25}{15} =$	$i)\ \frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} =$
$j)\ \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} =$	$k)\ \frac{13}{4} : \frac{9}{6} =$	$l)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$
$m)\ \frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} =$	$n)\ \frac{3}{8} : \frac{9}{32} =$	$o)\ \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} =$
$p)\ \frac{7}{8} : \frac{11}{32} =$	$q)\ \frac{13}{5} : 2 =$	$r)\ 14 \cdot \frac{11}{6} =$
$s)\ \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} =$	$t)\ \frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} =$	$u)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$
$v)\ \frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} =$	$w)\ \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} =$	$x)\ \frac{1}{10} : \frac{1}{1000} =$
$y)\ \frac{5}{20} : \frac{1}{1000} =$	$z)\ \frac{13}{15} \cdot 6 =$	

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.2) Lösungen zur Bruchrechnen.

2.2 Brüche als Dezimalzahlen

Um Brüche in Dezimalzahlen umzuwandeln bedarf es der schriftlichen Division oder eines guten Zahlengefühls. Anhand eines Beispiels soll ersteres verdeutlicht werden.

$$\begin{array}{rl} \frac{2}{7} = & 2 : 7 = 0,285... \\ & -0 \\ \hline & \ 20 \\ & -14 \\ \hline & \quad 60 \\ & - \ 56 \\ \hline & \qquad 40 \\ & - \quad 35 \\ \hline & \quad \vdots \end{array} \tag{2.7}$$

An Gleichung (2.7) ist zu erkennen, wie jeder Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden kann. Dabei wird bei der schriftlichen Divisionsrechnung nach jeder Subtraktion eine Nachkommastellennull nach unten gezogen, sodass die Rechnung fortgesetzt werden kann bis kein Rest mehr existiert, eine Periodizität wie bei $\frac{1}{3} = 0,3333333333... = 0,\bar{3}$ festgestellt wird oder eine genauere Dezimalzahl nicht mehr erforderlich ist. Da im Allgemeinen bekannt ist, dass $\frac{3}{3} = 1$ ist, gilt folgende Definition zur Periodizität: $3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9} := 1$.
Im Allgemeinen sollte auf eine Umwandlung in Dezimalzahlen verzichtet werden, da die Darstellung durch einen Bruch meistens, das weitere Vorgehen vereinfacht. Die Darstellung einer Zahl als Bruch ist dabei eine Schreibweise, welche eine Rechnung fordert aber sie nicht ausführt. So kann zum Beispiel durch das Erhalten von Bruchdarstellungen folgende Rechnung leichter durchgeführt werden als in der Dezimalzahlendarstellung, welche im direkten Vergleich darunter zu finden ist. (Bei dieser Rechnung werden Klammern verwendet, deren Bedeutung genaustens im Abschnitt „Klammersetzung“ besprochen werden. Für diese Rechnung gilt, dass die Rechnung in der Klammer zu erst ausgeführt werden soll.)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 3}{6 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ &(0,\bar{6} + 0,1\bar{6}) \cdot 0,6 = 0,8\bar{3} \cdot 0,6 = 0,5 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Gleichung (2.8) zeigt, dass die Rechnung mit den Brüchen zwar länger erscheint, aber vollständig im Kopf durchgeführt werden kann. Während die Rechnungen mit den Dezimalzahlen vielen nur mit Taschenrechner gelingen und dabei noch die Problematik der Periodizität bei der Eingabe in den Taschenrechner besteht, sodass als Ergebnis $0,499999999$ auf dem Taschenrechnerdisplay angezeigt wird. Dieses Ergebnis wäre nicht richtig und durch das Runden des Ergebnisses bekommt der Schüler oftmals den Eindruck, dass solche Rechnungen nicht ohne Taschenrechner schaffbar seien.
Dieses Verfahren zur Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen ist in erster Linie nützlich um Prozentwerte auszurechnen, was detaillierter im Abschnitt „Prozentrechnung“ beschrieben wird.

Übungsaufgaben zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1: *Wandle folgende Brüche in Dezimalzahlen um.*

$a)\ \frac{1}{2} =$	$b)\ \frac{1}{3} =$	$c)\ \frac{1}{5} =$
$d)\ \frac{1}{8} =$	$e)\ \frac{1}{4} =$	$f)\ \frac{1}{16} =$
$g)\ \frac{3}{4} =$	$h)\ \frac{4}{5} =$	$i)\ \frac{2}{3} =$
$j)\ \frac{6}{7} =$	$k)\ \frac{1}{12} =$	$l)\ \frac{19}{5} =$
$m)\ \frac{5}{9} =$	$n)\ \frac{11}{6} =$	$o)\ \frac{5}{3} =$
$p)\ \frac{43}{5} =$	$q)\ \frac{55}{2} =$	$r)\ \frac{17}{8} =$
$s)\ \frac{67}{7} =$	$t)\ \frac{81}{3} =$	$u)\ \frac{55}{7} =$
$v)\ \frac{1}{10} =$	$w)\ \frac{1}{100} =$	$x)\ \frac{1}{1000} =$

Aufgabe 2: *Berechne folgende Aufgaben.*

$a)\ 4 \cdot 0,1 =$	$b)\ 1 + 0,75 =$	$c)\ 9 \cdot 1,001 =$
$d)\ 2,125 - 1 =$	$e)\ 6,\bar{6} + 3,\bar{3} =$	$f)\ 1 + 0,0004 =$
$g)\ 3,003 : 3 =$	$h)\ 100 \cdot 1,001 =$	$i)\ 1000 \cdot 0,001 =$
$j)\ 5,\bar{5} : 5 =$	$k)\ 5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} =$	$l)\ 14 + 0,\bar{7} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.3) Lösungen zu Dezimalzahlen.

2.3 Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren wird oftmals mit Gleichungssystemen in Verbindung gebracht, allerdings ist das dahinter liegende Prinzip von fundamentalerer Bedeutung für den Umgang mit mathematischem und naturwissenschaftlichem Wissen. Bei diesem Verfahren wird entweder für einen Parameter, einer Variable oder einen Term eine Zahl oder einem weiterführender Term eingesetzt, sodass es generell zu einer Vereinfachung, einer Beispielrechnung oder der Reduzierung von unbekannten Größen kommt. Dabei ist ein Parameter ein Platzhalter für eine Zahl (oftmals werden a, b, c, d als Parameter verwendet), während die Variable der Platzhalter für eine veränderliche Zahl (oftmals werden x, y, z als Variable verwendet) ist und ein Term ein ganzer Abschnitt einer Rechenanweisung (zum Beispiel $5 \cdot x \cdot a$ wäre ein Term).

Als Beispiel für das Einsetzen von Zahlen soll das Erweitern bei der Bruchrechnung aus Gleichung (2.6) dienen. Hierbei soll gelten, dass für a der Wert 2, für b der Wert 3 und für den Erweiterungsparameter n die Zahl 4 eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad & \text{mit: } a = 2 \\
\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{b \cdot n} \quad & \text{mit: } b = 3 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n} \quad & \text{mit: } n = 4 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} &
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Wie bereits oben schon erwähnt wurde, ist dieses Verfahren auch mit Termen möglich.

$$\begin{aligned}
a + b = c \qquad & \text{mit: } a = d - e + f \\
\Rightarrow d - e - f + b = c \qquad & \text{mit: } c = e - f - d \\
\Rightarrow d - e - f + b = e - f - d &
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Übungsaufgaben zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: *Löse folgende Rechnungen, indem du für $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ einsetzt. Beachte, dass in einigen Rechnungen ein Term eingesetzt werden muss, welcher hinter der Gleichung definiert niedergeschrieben ist.*

a) $a + b - c =$

b) $3a - 4b + c =$

c) $ab - bc =$

d) $ab - ba =$

e) $4ab + 2cc - 3bc =$

f) $4\frac{a}{b} + \frac{c}{a} =$

g) $2ab + 2ac + 2bc =$

h) $a + d =$ mit: $d = abc$

i) $ad =$ mit: $d = ab - cb$

j) $\frac{a}{bd} =$ mit: $d = 4aa$

k) $\frac{d}{a} - \frac{b}{d} =$ mit: $d = abc$

l) $\frac{1}{d} =$ mit: $d = \frac{1}{a}$

m) $a + b\frac{d}{c} =$ mit: $d = \frac{2ac - c}{d}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.4) Lösungen zum Einsetzungsverfahren.

2.4 Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist von besonderer Bedeutung in der heutigen Gesellschaft, dabei versteckt sich hinter ihr nur der Bruch $\frac{1}{100}$. Denn pro cent bedeutet übersetzt nicht viel mehr als pro hundert. Aus diesem Bruch heraus hat sich historisch dann das Prozentzeichen % entwickelt. Der rechnerische Umgang ist durch das Ersetzen von % durch $\frac{1}{100}$ gegeben.

$$4\% = 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0,04 \tag{2.11}$$

Auch andere Rechnungen sind auf diesen Fakt reduzierbar: Sei ein Kapital von 1000€ mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt, wie hoch wären die Zinsen nach einem Jahr? Diese Frage kann leicht dargestellt werden als:

$$1000€ \cdot 4\% = 1000€ \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 4000€ \cdot \frac{1}{100} = \frac{4000€}{100} = 40€ \quad , \tag{2.12}$$

wobei genauere Ausführungen zu dieser Art von Rechnungen weiter unten im Kapitel „Wirtschaftsrechnungen“ folgen werden.

Der Dreisatz zur Frage „Wieviel sind 4% von 300?“ gestaltet sich als:

$$\begin{aligned} 300 &\text{ entsprechen: } 100\% \\ 3 &\text{ entsprechen: } 1\% \\ 12 &\text{ entsprechen: } 4\% \end{aligned} \tag{2.13}$$

Allerdings ist der Dreisatz durch das Wissen, dass $\% = \frac{1}{100}$ ist, wie folgt verkürzt durchzuführen:

$$300 \cdot 4\% = \frac{4 \cdot 300}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \quad , \tag{2.14}$$

wobei in Gleichung (2.14) die Zwischenschritte weggelassen werden könnten, da $\frac{300}{100}$ und $3 \cdot 4$ nicht von besonderer Schwierigkeit sind.

Übungsaufgaben zu Prozentrechnung

Aufgabe 1: *Wandele folgende Zahlen in Prozentwerte um.*

$a)$ $0,01 =$	$b)$ $100 =$	$c)$ $0,5 =$
$d)$ $0,125 =$	$e)$ $0,0024 =$	$f)$ $289 =$
$g)$ $0,9315 =$	$h)$ $0,0341 =$	$i)$ $0,891 =$

Aufgabe 2: *Wandele folgende Prozentwerte in Zahlen um.*

$a)$ $1\% =$	$b)$ $100\% =$	$c)$ $54\% =$
$d)$ $1626\% =$	$e)$ $2,374\% =$	$f)$ $2,01\% =$
$g)$ $99\% =$	$h)$ $5\% =$	$i)$ $81,063\% =$

Aufgabe 3: *Wandele folgende Brüche in eine Dezimalzahl um und schreibe sie dann als Prozentwert auf. Bei dieser Aufgabe brauchen nur drei Nachkommastellen beachtet werden.*

$a)$ $\frac{1}{4} =$	$b)$ $\frac{1}{3} =$	$c)$ $\frac{5}{6} =$
$d)$ $\frac{9}{14} =$	$e)$ $\frac{8}{25} =$	$f)$ $\frac{1}{8} =$
$g)$ $\frac{7}{9} =$	$h)$ $\frac{9}{4} =$	$i)$ $\frac{43}{83} =$

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $700 \cdot 1\% =$	$b)$ $45 \cdot 100\% =$	$c)$ $200 \cdot 4\% =$
$d)$ $80 \cdot 25\% =$	$e)$ $1500 \cdot 2\% =$	$f)$ $50000 \cdot 3\% =$
$g)$ $9000 \cdot 99\% =$	$h)$ $3141 \cdot 0,1\% =$	$i)$ $120 \cdot 5\% =$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis.*

a) 4% von 1000€ sind:
b) 2% von 5550€ sind:
c) 10% von 862434€ sind:
d) 19% von 299€ sind:
e) 12% von 1200€ sind:
f) 11% von 65300€ sind:

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.5) Lösungen zur Prozentrechnung.

2.5 Assoziativ und Kommutativ

Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz helfen beim Rechnen den Überblick selbst über sehr komplex wirkende Sachverhalte zu behalten und sollten deswegen bekannt sein. In diesem Abschnitt werden diese beiden Gesetz und ihre Auswirkungen auf die Mathematik besprochen. Auch wird nochmals motiviert, warum es lohnend sein kann mit Brüchen und negativen Zahlen zu arbeiten.

2.5.1 Kommutator

Das Kommutativgesetz besagt, dass die Vertauschung von Zahlen, Parametern oder Variablen bei einer Rechenoperation keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Zur Überprüfung des Kommutativgesetzes dient der Kommutator, welcher folgende definierte Rechenanweisung ist:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \tag{2.15}$$

Ist der Kommutator gleich Null, so gilt, dass $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Wenn man nun Zahlen für die Parameter a und b einsetzt, so ist die Gültigkeit des Kommutativgesetzes intuitiv zu erkennen:

$$[2, 3] = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \tag{2.16}$$

Der allgemeine Kommutator ist für die Multiplikation definiert - wenn nun das Kommutativgesetz zum Beispiel für die Addition überprüft werden soll, wird am Komma des Kommutator gekennzeichnet welcher Operator untersucht wird.

$$\begin{aligned} [a,_+ b] &= a + b - b + a \\ [2,_+ 3] &= 2 + 3 - 3 + 2 = 5 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Es wird deutlich, dass ohne die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung und somit die Verallgemeinerung von Addition mit Subtraktion sowie der Multiplikation mit der Division, dass Kommutativgesetz nicht für die Subtraktion und Division gelten würde.

$$\begin{aligned} [a,_- b] &= a - b - b - a \neq 0 \\ [2,_- 3] &= 2 - 3 - 3 - 2 \neq 0 \\ [a,_: b] &= a : b - b : a \neq 0 \\ [2,_: 3] &= 2 : 3 - 3 : 2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung verändert sich Gleichung (2.18) zu:

$$\begin{aligned} [a,_+ -b] &= (a + (-b)) - (-b + a) = 0 \\ [3,_+ -2] &= (3 + (-2)) - (-2 + 3) = 1 - 1 = 0 \\ \left[a, \frac{1}{b}\right] &= a \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\ \left[2, \frac{1}{3}\right] &= 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die besondere Bedeutung und die Konsequenzen des Kommutators werden im Kapitel „Differentiation und Integration“ weiter ausgeführt. Während die Klammern im nächsten Unterabschnitt genaustens erklärt werden

2.5.2 Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Reihenfolge bei einer Rechnung keine Relevanz besitzen darf. So macht es zum Beispiel keinen Unterschied bei der Addition oder Multiplikation von drei Zahlen, welche zuerst verrechnet werden.

$$\begin{gathered} a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=b+(a+c) \\ a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=b\cdot(a\cdot c) \end{gathered} \tag{2.20}$$

Die Reihenfolge in Gleichung 2.20 wird beschrieben durch die Klammern, welche angeben welche Rechnung zu erst vollzogen werden soll. Das jeweils letzte Gleichheitszeichen konnte nur durch die Vertauschung der geschriebenen Reihenfolge der Parameter a, b und c, also dem Kommutativgesetz, geschrieben werden. Erneut zeigt sich, dass die Verallgemeinerung von Addition mit Subtraktion sowie Multiplikation mit Division seine Vorteile hat, denn die Rechenoperatoren der Subtraktion und der Division sind nicht assoziativ:

$$\begin{gathered} (a-b)-c\neq a-(b-c) \\ (a:b):c\neq a:(b:c) \end{gathered} \tag{2.21}$$

Allerdings gilt durch die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und des Bruchrechnens, dass der Subtraktionsoperator umgeschrieben werden kann in $-=+(-1)$ sowie der Divisionsoperator mit nur seltenen Ausnahmen aus dem mathematischen Gebrauch verschwindet.

2.5.3 Klammersetzung

Wenn eine Rechnung mehr als nur einen Rechenoperator beinhaltet, dann lohnt es sich Klammern zu verwenden, um den Überblick zu behalten oder auf bestimmte Sachverhalte aufmerksam zu machen. Im engeren Sinne ist die Rechnung mit Klammern auf die Multiplikation reduzierbar. Dabei wirkt der außenstehende Faktor auf jeden Summanden innerhalb der Klammer:

$$\begin{gathered} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ 16=2\cdot 8=2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5=6+10=16 \end{gathered} \tag{2.22}$$

Das Beispiel aus Gleichung (2.22) zeigt, wie der Faktor auf die Summanden innerhalb der Klammern wirkt und somit das gleiche Ergebnis produziert, wie die Multiplikation des Faktors mit der Summe der Klammer.

Bei der Verrechnung von Subtraktionsoperatoren mit einer Klammer gilt, dass das vorgestellte Minus lediglich eine verkürzte Schreibweise von $(-1)\cdot$ ist:

$$-(b+c)=(-1)\cdot(b+c)=(-1)\cdot b+(-1)\cdot c=-b-c \tag{2.23}$$

Auch Terme von Summen können miteinander multipliziert werden:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d \tag{2.24}$$

In Gleichung (2.24) wirken zu erst die Summanden der ersten Klammer auf die zweite Klammer, sodass dann die zweite Klammer wie in Gleichung (2.22) ausmultipliziert werden kann.

Es wird auch ersichtlich, dass die Schreibweise mit den Klammern wesentlich kürzer ist. Das Ausmultiplizieren ist trotz der verkürzten Klammerschreibweise oftmals von Vorteil.

Die Klammersetzung ist nicht nur ein Bestandteil einer verkürzten Schreibweise, sondern auch von fundamentaler Bedeutung bei komplexeren Einsetzungsverfahren. So sei zum Beispiel $a = g + h$ und soll in die folgende Gleichung eingesetzt werden.

$$a \cdot d = (g + h) \cdot d = g \cdot d + h \cdot d \tag{2.25}$$

Wie Gleichung (2.25) zeigt, sollte bei einer Ersetzung der eingesetzte Term am besten prophylaktisch umklammert werden, um Fehler zu vermeiden. Erst nach einer Reflexion der Gleichung sollten dann die Klammern, wenn möglich, fallen gelassen werden.

Allerdings sollte auch die Umkehrung des Ausmultiplizierens, das Ausklammern, beherrscht werden, da es oftmals die Übersicht verbessert, wie in diesem Beispiel:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f + g = a \cdot (b + c + d + e + f) + g \tag{2.26}$$

Die Gleichung (2.26) zeigt, dass der Faktor a, welcher sich in vielen Summanden befindet, ausgeklammert wurde um die Übersicht zu verbessern. Generell gilt, dass man gleiche Vorfaktoren bei Summen ausklammern kann.

Übungsaufgaben zur Klammersetzung

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \frac{1}{2}(9+7) =$

$b)\ \frac{25+65}{10} =$

$c)\ 4(3+2) - 2(1+3) =$

$d)\ \frac{16+48}{2} =$

Aufgabe 2: *Multipliziere die Klammern aus.*

$a)\ 4(a+b) =$

$b)\ c(a-5b) =$

$c)\ \frac{2}{5}(9a-5) =$

$d)\ (a+b)(a+b) =$

$e)\ \frac{2}{5}\left(\frac{a}{b} - \frac{5c}{d}\right) =$

$f)\ (a-b)(a-b) =$

$g)\ (a+b)(c+d) =$

$h)\ (a-b)(a+b) =$

$i)\ \frac{a+b}{c} =$

$j)\ \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) =$

Aufgabe 3: *Klammere so viel wie möglich aus.*

$a)\ 9a + 9b =$

$b)\ 2a + 6 - 8b =$

$c)\ ab - acd + aa =$

$d)\ 2ab + 4ab + 8ab =$

$e)\ \frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} =$

$f)\ abcdefghijkl - bcdefghijk =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.6) Lösungen zur Klammersetzung.

2.6 Potenzen

Wie schon zuvor wurden viele Rechenmethoden und neue Eigenschaften eingeführt, um die Übersicht oder Handhabung von rechnerischen Ausdrücken zu vereinfachen. Aus dem selben Grund wird die Potenz eingeführt, welche als verkürzte Schreibweise der wiederholten Multiplikation einer Zahl dient.

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^5 \\ 2^6 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Für Potenzen gelten Rechenregeln, welche schnell erklärt werden können, wenn der abkürzende Charakter wie in Gleichung (2.27) verinnerlicht wurde. Im Folgenden soll eine Regel gezeigt und dann begründet werden, dass diese gilt (außer die Regel ist intuitiv).

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= a^{2+3} = a^5 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ \Rightarrow a^3 : a^2 &= a^{3-2} = a^1 = a \end{aligned} \tag{2.28}$$

Aus der Bedingung, dass $\frac{a}{a} = 1$ sein muss und mit der Regel aus Gleichung (2.28) ergibt sich daraus, dass $a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^0 = 1$ sein muss. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Des Weiteren kann aus Gleichung (2.28) abgleitet werden, dass Rechnungen mit Potenzen nicht assoziativ sind:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 &= \left(a^3\right)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \\ a^{\left(3^2\right)} &= a^{3 \cdot 3} = a^9 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Außerdem lässt sich aus Gleichung (2.28) mit Gleichung (2.30) ersehen, dass

$$\begin{aligned} (a^2)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} &:= \sqrt{a} \end{aligned} \tag{2.31}$$

gilt, wobei $\sqrt{a}$ die Wurzel von a genannt wird. Die Wurzel habt die Potenz ^{2} auf, wie in Gleichung (2.31) zu sehen ist.

Somit gelten zusammengefasst folgende Regeln für die Potenzrechnung:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ (a^n)^m &\neq a^{(n^m)} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass bei dem Ausdruck a^n es sich bei a um die Basis und bei n um den Exponenten handelt.

2.6.1 Wurzeln

Wurzeln sind die Umkehroperationen zum Potenzieren. Somit steht hinter der sogenannten Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z}$) die Frage: „Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die Zahl z?“ Hierzu lohnt es sich einige Zahlen zum Quadrat (zum Beispiel: $8^2 = 64$) zu kennen, um direkt ein Ergebnis einer Wurzel zu erkennen. Da es nicht nur die Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$) gibt, sondern auch noch höhere Werte des Nenners im Exponenten, lohnt es sich stets die jeweilige Wurzel als Potenz zu schreiben.

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{z} \\ \sqrt[4]{z} &= z^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Es gibt ein schriftliches Verfahren eine Wurzel zu ziehen, allerdings bedarf es einer sehr aufwendigen Erklärung, welche in einer späteren Version dieses Buches folgen könnte, da die Schüler heutzutage oftmals bei der Einführung der Wurzel mit dem Taschenrechner arbeiten wird vorerst das schriftliche Wurzelziehverfahren ausgespart.

2.6.2 10er Potenzen

Von allen Potenzen haben 2er Potenzen 2^n in der Informatik und die 10er Potenzen 10^n eine besonders wichtige Funktion inne. Grade in der Physik werden besonders große Größen mit besonders kleinen verrechnet. Die daraus resultierenden Ergebnisse sollen dann wieder in einer Größe angegeben werden, die dem Menschen zur Vorstellung genügen. Deswegen werden viele Größen mit Hilfe der 10er Potenzen umgerechnet. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Jede Einheit ist meistens mit einer sprachlichen Abkürzung verbunden, so steht bei 1cm das „centi“ für $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Eine Tabelle mit der Auflistung vieler dieser Abkürzungen und ihre Bedeutung als 10er Potenz befinden sich im Anhang (12.3).
Während für alle Einheiten k für Kilo also Tausend steht, steht dies sprachlich bei der Einheit Byte B auch für Tausend. Allerdings versteckt sich hier durch den Fakt, dass Computer nur die 0 (Nein) und die 1 (Ja) kennen, eine andere Zahl:

$$\begin{aligned} 10^3 m &= 1km \\ 10^6 m &= 1Mm \\ 2^{10} B &= 1kB = 1024B \\ 2^{20} B &= 1MB = 1048576B \end{aligned} \tag{2.35}$$

Bei der Einheitenumrechnung ist das Verständnis von 10er Potenz von elementarer Bedeutung, da

$$\begin{aligned} 1dm &= 10cm = 10^1 cm \\ 1dm^2 &= 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm = 100cm^2 = 10^2 cm^2 \\ 1dm^3 &= 1dm \cdot 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000cm^3 = 10^3 cm^3 := 1l \end{aligned} \tag{2.36}$$

gilt. Dahinter verstecken sich sprachliche Abkürzungen, die mit potenziert werden $100cm^2 = 100(cm)^2 = 100c^2m^2 = 10^2 \frac{1}{10^2} m^2 = 1m^2$. Die Schreibweise für $1cm^2$ ist wieder nichts weiter als eine Konvention zur Abkürzung für $1(cm)^2$. Wie Gleichung (2.36) gibt der Exponent der Einheit an, mit welcher Zahl die Anzahl der Null der Standardumrechnung multipliziert wird:

$$\begin{aligned}
1km &= 1000m = 10^3 m \\
1km^2 &= \left(10^3 m\right)^2 = \left(10^3\right)^2 m^2 = 10^{3\cdot 2} m^2 = 1000000m^2 = 10^6 m^2 \\
1km^3 &= \left(10^3 m\right)^3 = \left(10^3\right)^3 m^3 = 10^{3\cdot 6} m^3 = 1000000000m^3 = 10^9 m^3
\end{aligned} \tag{2.37}$$

2.6.3 Binomische Formeln

Mit Hilfe der Potenzen können auch die Summen potenziert werden:

$$\begin{aligned}
(x+d)\cdot(x+d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d + d\cdot x + d^2 = x^2 + 2\cdot d\cdot x + d^2 \\
(x+d)\cdot(x-d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - d^2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Die beiden Gleichungen aus Gleichung (2.38) werden Binomische Gleichungen genannt und werden in der Beschreibung der Natur immer wieder vorgefunden und nicht zu Letzt deswegen im Mathematik und naturwissenschaftlichen Unterricht in Klausur- und Übungsaufgaben verwendet.
Generell kann man diese Binomischen Formel noch für jede Potenz verallgemeinern, dazu dient das sogenannt Pascal'sche Dreieck, welches die Vorfaktoren wiedergibt.

$(x+d)^0$	1
$(x+d)^1$	$x+d$
$(x+d)^2$	$x^2+2\cdot d\cdot x+d^2$
$(x+d)^3$	$x^3+3\cdot d\cdot x^2+3\cdot d^2\cdot x+d^3$
$(x+d)^4$	$x^4+4\cdot d\cdot x^3+6\cdot d^2\cdot x^2+4\cdot d^3\cdot x+d^4$
$(x+d)^5$	$x^5+5\cdot d\cdot x^4+10\cdot d^2\cdot x^3+10\cdot d^3\cdot x^2+5\cdot d^4\cdot x+d^5$

Dabei pflanzen sich die Vorfaktoren (sogenannte Koeffizienten) so weiter fort in dem die benachbarten aufaddiert werden. Die Potenzen des ersten Parameters oder Variable startet stets mit der höchsten Zahl und nimmt bei jedem weiteren Summanden ab, während die Potenz des zweiten Parameters zunimmt. Die Vorfaktoren, welche sich im Pascal'schen Dreieck befinden, werden im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch die sogenannten Binomialkoeffizienten erneut auftauchen und nochmals erläutert. Weitere Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck können im Anhang (12.2) gefunden werden.

Übungsaufgaben zu Potenzen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ 2^3 =$	$b)\ 3^4 =$	$c)\ 2^6 =$
$d)\ 2^{-1} =$	$e)\ 10^3 =$	$f)\ 8^3 =$
$g)\ 4^{-3} =$	$h)\ 10^{-6} =$	$i)\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$
$j)\ \left(5^3\right)^2 =$	$k)\ 4^{\left(3^2\right)} =$	$l)\ 2^6 \cdot 2^2 =$
$m)\ \left(2^3 + 2^3\right)^3 =$	$n)\ \left(10^2\right)^{-1} =$	$o)\ \left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} =$
$p)\ \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$	$q)\ \left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} =$	$r)\ \left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 =$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \sqrt{16} =$	$b)\ \sqrt{81} =$	$c)\ \sqrt[3]{8} =$
$d)\ \sqrt[3]{27} =$	$e)\ \sqrt{144} =$	$f)\ \sqrt[5]{100000} =$
$g)\ \sqrt{289} =$	$h)\ \sqrt[4]{81} =$	$i)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} =$

Aufgabe 3: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

$a)\ 1m^2 = \quad cm^2$	$b)\ 2,718km = \quad mm$	$c)\ 1mm^3 = \quad dm^3$
$d)\ 3m^3 = \quad dm^3$	$e)\ 0,5cm^2 = \quad m^2$	$f)\ 13,3cm^3 = \quad m^3$
$g)\ 10^3km^2 = \quad dm^2$	$h)\ 1,234dm = \quad mm$	$i)\ \frac{15}{4}\mu m^2 = \quad mm^2$
$j)\ \frac{1}{3}Mm^3 = \quad km^3$	$k)\ 0,01km^2 = \quad cm^2$	$l)\ 125mm^5 = \quad cm^5$
$m)\ 6,\bar{6}m^4 = \quad cm^4$	$n)\ 0,025km^7 = \quad mm^7$	$o)\ 3,141Tm^2 = \quad nm^2$

Aufgabe 4: *Rechne in die Klammer aus.*

a) $(a+4)^2 =$ b) $\left(a-\sqrt{2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{2}a+2\right)^4 =$ d) $\left(3a+\dfrac{2}{3}\right)^3 =$

e) $(a-b)^4 =$ f) $(a+b+c)^2 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.7) Lösungen zu Potenzen.

2.7 Logarithmen

Da die Potenzen eingeführt wurden, sollte auch eine Rechenvorschrift eingeführt werden um den Exponenten zu bestimmen. Diese wird Logarithmus genannt, welche folgende Frage in mathematischer Art und Weise stellt: „Die Basis und das Ergebnis seien bekannt, welche Größe muss der Exponent haben?“

$$a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b \tag{2.39}$$

Gelesen wird $\log_a c$ als „der Logarithmus von b zur Basis a“. Wie für die Potenzen gelten auch für die Logarithmen Regeln, welche sich aus den Potenzgesetzen ableiten lassen.

$$\begin{aligned}
a^{n \cdot m} = a^n \cdot a^m \Leftrightarrow \log_a(n \cdot m) &= \log_a n + \log_a m \\
\Rightarrow \log_a \frac{n}{m} &= \log_a n - \log_a m \\
\log_a n^m &= m \cdot \log_a n \\
a^{\log_a n} &= n \\
\log_a n &= \frac{\log_b a}{\log_b n} \\
\log_a a &= 1 \\
\log_a 1 &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen für bestimme Werte der Basis verwendet:

$$\begin{aligned}
\log_{10} n &= \lg n \\
\log_2 n &= \mathrm{lb}\ n \\
\log_e n &= \ln n \quad ,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

wobei $e = 2,718281...$ die Euler'sche Zahl ist, deren Bedeutung im Kapitel der Funktionen im Abschnitt der Exponentialfunktionen und bei der Differentiation noch gerecht wird.

Übungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $\log_2 16 =$	$b)$ $\lg 1000 =$	$c)$ $\log_8 64 =$
$d)$ $\mathrm{lb}\ 512 =$	$e)$ $\ln e^9 =$	$f)$ $\log_5 125 =$
$g)$ $\log_{25} 125 =$	$h)$ $\lg 11 \cdot 10^6 =$	$i)$ $\log_{17} 1 =$
$j)$ $\log_3 81 =$	$k)$ $\log_4 64 =$	$l)$ $\log_{15} 225 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.8) Lösungen zu Logarithmen.

2.8 Äquivalenzumformung

Die Äquivalenzumformung stellt die Basis für den Erkenntniserwerb und steht als selbstverständliches Vorwissen aller Schüler im Zentrum des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Wort nur die Bedingung, dass auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichens „=“ immer die gleichen Operationen durchgeführt werden müssen. Dabei wird hinter dem Kommandostrich „|“ hinter der umzuformenden Gleichung die nachfolgende Operation angegeben.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad |+2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Die Gleichung (2.42) zeigt, wie auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichen die Zwei addiert wurde. Dabei steht der Pfeil $\Rightarrow$ für „daraus folgt“, und ist nicht zwingend erforderlich bei einer Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \qquad |-2 \\ 6 &= 6 \qquad |\cdot 3 \\ 18 &= 18 \qquad |: 2 \\ 9 &= 9 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Gleichung (2.43) zeigt, wie im ersten Schritt auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichen die Zwei subtrahiert wurde. Im zweiten Schritt werden beide Seiten mit drei multipliziert und im dritten Schritt durch zwei dividiert. In diesen beiden Beispielen sind die vier Grundrechenarten gezeigt, was nicht bedeutet, dass andere Rechenoperationen ausgeschlossen sind.

Äquivalenzumformungen dienen dazu um Gleichung umzustellen und so unbekannte Parameter zu bestimmen. Parameter sind Platzhalter für Zahlen und werden in der Regel mit Buchstaben am Anfang des Alphabets beschrieben. Wenn keine genaue Beschreibung für die Parameter angegeben sind, gilt $a, b, ... \in \mathbb{R}$. Im folgenden Beispiel soll nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{d} \cdot x + b - c \qquad |+c \\ c &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |-b \\ c - b &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |\cdot d \\ d \cdot (c - b) &= a \cdot x \qquad |: a \\ \frac{d \cdot (c-b)}{a} &= x \end{aligned} \tag{2.44}$$

Jede Rechenoperation, die den Wert nicht verändert ist zulässig! Die Addition der 0 und die Multiplikation der 1 sind solche Operationen. Dabei ist 0 das so genannte neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8} \qquad &\text{Multiplikation der 1} \\ 4 = 4 + 0 = 4 + 6 - 6 = 10 - 6 \qquad &\text{Addition der 0} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Die Beispiele aus Gleichung (2.45) zeigen, dass die Multiplikation des neutralen Elements mit dem Erweitern von Brüchen unmittelbar in Verbindung steht.

2.8.1 Quadratische Ergänzung

Das Ziel bei einer quadratischen Ergänzung ist es, eine Gleichung so umzuformen, dass man die binomischen Formeln ausnutzen kann um die Potenz der Unbekannten zu reduzieren. Als erklärendes Beispiel soll diese allgemeine Gleichung, welche auch allgemeines Polynom zweiter Ordnung oder quadratische Gleichung genannt wird, dienen (Auf die Eigenschaften von Polynome und explizit quadratische Termen wird im Kapitel „Funktionen“ genauer eingegangen.):

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.46}$$

Diese Form erinnert an die so genannte erste binomische Formel $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Aus diesem Grund wird der Vorfaktor (Koeffizient) a des quadratischen Terms ax^2 über Äquivalenzumformung entfernt.

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \qquad |: a \\ &x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{a}{c} = 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Durch direktes gegenüberstellen der Terme können bestimmte Bedingungen an die Vorfaktoren geknüpft werden, sodass die künstliche Generierung einer Binomischen Formel möglich wird, dies wird Koeffizientenvergleich genannt. Generell wird der Koeffizientenvergleich immer angewendet, wenn eine Gleichheit von Vorfaktoren zu einer erheblichen Vereinfachung eines Problems dienen könnte.

$$\begin{aligned} &x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{a}{c} = 0 \\ &x^2 + 2dx + d^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Durch den Koeffizientenvergleich der rot markierten Vorfaktoren, kann folgende Bedingung aufgestellt werden: $\frac{a}{b} = 2d)$ und so der Parameter d als $\frac{a}{2b}$ bestimmt werden. Da die zu lösende Gleichung noch kein d^2 beherbergt, muss dieses durch eine Addition hinzugefügt werden. Anschließend werden alle Terme die nicht zu einer Binomischen Formel gehören auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht:

$$\begin{aligned} x^2+\frac{a}{b}x+\frac{a}{c}&=0 && \Big|+\left(\frac{a}{2b}\right)^2 \\ x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a}{c}&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2 && \Big|-\frac{a}{c} \\ x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c} \end{aligned} \tag{2.49}$$

Nach genauerer Betrachtung ist festzustellen, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichen die erste binomische Formel vorzufinden ist. Nach der Ersetzung fällt auf, dass die quadratische Potenz und die lineare Potenz in der Variablen x verschmolzen sind. Um nun nach der Variable restlos aufzulösen, muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Wurzel gezogen werden, da dies die Umkehrfunktion zum Quadrieren ist. Dabei ist zu beachten, dass es eine negative und eine positive Lösung gibt, da zum Beispiel $2^2=(-2)^2$ ist.

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2}_{=(x+\frac{a}{2b})^2}&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c} \\ (x+\frac{a}{2b})^2&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c} && \Big|\sqrt{} \\ x_{1,2}+\frac{a}{2b}&=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}} && \Big|-\frac{a}{2b} \\ x_{1,2}&=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Nach einer Umbenennung der Parameter $p=\frac{a}{b}$ und $q=\frac{c}{a}$ erkennt man, dass die so genannte p-q-Formel hergeleitet wurde:

$$\begin{aligned} &x^2+px+q=0 \\ &\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Um Zeit in bestimmten Klausur- oder Unterrichtssituationen zu sparen empfiehlt es sich die p-q-Formel aus Gleichung (2.51) zu verwenden, dennoch sollte von ihrer Benutzung abgeraten werden, denn in der höheren Mathematik (siehe Kapitel „Differentiation und Integration“) sind viele Aufgaben nur noch mittels der quadratischen Ergänzung effektiv zu lösen.

Wenn bei einer Gleichung in offensichtliches Produkt mit einer quadratischen Gleichung vorliegt, lohnt es sich diese auszuklammern

$$\begin{aligned} &ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ \Rightarrow &x \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 0 \quad , \end{aligned} \tag{2.52}$$

sodass das die Faktoren des Produkts separiert betrachtet werden können, denn es gilt nach wie vor: Wenn einer der Faktoren gleich Null ist, dann ist das gesamte Produkt gleich Null.

$$\begin{aligned} &\underbrace{x}_{\overset{!}{=}0} \cdot \underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\overset{!}{=}0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow &ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ab diesem Zeitpunkt kann die restliche Gleichung mit der quadratischen Ergänzung gelöst werden. Das Ausklammerungsverfahren funktioniert nicht nur bei höheren Polynomen, sondern immer, wenn aus allen Bestandteilen der Gleichung ausgeklammert werden kann. So ist es möglich bei einigen Gleichungen die Lösungen direkt abzulesen.

$$x^2 - 6x = x(x - 6) \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6 \tag{2.54}$$

Aus diesem Grund lohnt es sich nicht immer Klammern aus zu multiplizieren.

Übungsaufgaben zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ 3 \cdot x + 4 = 0$	$b)\ 2 \cdot x - 9 = 0$
$c)\ 9 \cdot x + 55 = 0$	$d)\ 5 \cdot x - 25 = 0$
$e)\ 3 \cdot x + 9 = 6$	$f)\ x - 66 = 9$
$g)\ 4 \cdot x + 4 = 11$	$h)\ 9 \cdot x - 5 = 4$
$i)\ 32 \cdot x + 3 = 5$	$j)\ 1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23$
$k)\ 7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x$	$l)\ 98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10$

Aufgabe 2: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ -16x^2 + 64 = 0$	$b)\ \sqrt{2x-6} - 144 = 0$
$c)\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0$	$d)\ \ln 5x = 2$
$e)\ \ln \dfrac{13}{x} = \sqrt{2}$	$f)\ \dfrac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1$
$g)\ \left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49$	$h)\ e^{2x-6} = 2$

Aufgabe 3: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf.*

$a)\ x^2 + 2x + 1 = 0$

$b)\ 4x^2 - 16x + 16 = 0$

$c)\ 3x^2 + 24x - 3 = 0$

$d)\ 5x^2 - 20x = 50$

$e)\ 2x^2 - 20x = 6 - 10x$

$f)\ 7x = 8 - 3x^2$

$g)\ 3x^2 - 6x = 0$

$h)\ x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8} = 0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.9) Lösungen zur Äquivalenzumformung.

2.9 Substitution

Bei jeder Rechnung ist es dem Rechnenden freigestellt Abkürzungen einzuführen. Dieser Prozess wird Substitution genannt. Im folgenden Beispiel wird die Summe innerhalb der Klammer substituiert:

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \qquad \text{mit: } y := x + a \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass bei der Substitution ersetzten Variablen vollständig eliminiert werden.

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \cdot x \qquad \text{mit: } y := x + a \;\Rightarrow\; x = y - a \\ &= y^2 \cdot (y-a) = y^3 - a \cdot y^2 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Jede Substitution ist zulässig. Wichtig wird dieser Prozess besonders wenn komplexere Aufgaben dadurch wesentlich vereinfacht werden können. Aus diesem Grund wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ nochmal besonders auf die Substitution eingegangen.

Übungsaufgaben zur Substitution

Aufgabe 1: *Schreibe die Gleichung mit der angegebenen Substitution auf.*

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8$ mit: $y=x^2+x+1$

b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c$ mit: $y^2=4x+a$

c) $(18x-4ab)^2=c$ mit: $\sqrt{y}=18x-4ab$

d) $2^{2a-c}=32$ mit: $b=2a-c$

e) $x=4a$ mit: $y=x+4a$

f) $x^2+8x+16=0$ mit: $(y+4)^2=x^2+8x+16$

g) $(3a+2x)(2x-3a)=0$ mit: $y=2x+3a$

h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2$ mit: $y=x^2+4x$

Aufgabe 2: *Finde die Substitution heraus und schreibe sie auf.*

a) $x^3+4x^2-x-8=0 \Rightarrow y-8=0$

b) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=0 \Rightarrow y-\frac{1}{y}=0$

c) $\frac{x^2}{ab}+\frac{5}{ab}-3=0 \Rightarrow dx^2+5d-3=0$

d) $\frac{ax^2+bx-c}{5}=0 \Rightarrow \frac{y}{5a}=0$

e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0 \Rightarrow gx-f=0$

f) $x^2+4x-8=0 \Rightarrow \left(\frac{y}{4}+2\right)^2=0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.10) Lösungen zur Substitution.

2.10 Fakultäten und Binominal Koeffizienten

Einige Abkürzungen werden oft bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie bei Reihendarstellungen verwendet. Zu diesen zählen Fakultäten und Binominal Koeffizienten. So kann zum Beispiel die Rechnung

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \tag{2.57}$$

abgekürzt werden, durch den sogenannten Fakultätsoperator !:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\ \Rightarrow n! &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Dabei ist die Fakultät so definiert, dass $0! := 1$ gilt. Einige Konstellationen mit der Fakultät kommen besonders häufig vor. Die am häufigsten vorkommende Anordnung von Fakultäten wird Binomialkoeffizient genannt und ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.59}$$

Generell sollte der Umgang mit neuen Abkürzungen, die neu eingeführt wurden, geübt werden, da in der Mathematik noch viele weitere Abkürzungen warten. So werden zum Beispiel im Kapitel „Reihen“ weitere oft vorkommende Abkürzungen eingeführt.

Übungsaufgaben zu Fakultäten

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $5!$	$b)$ $3!$	$c)$ $\frac{7!}{5!}$
$d)$ $\frac{3!}{4!} \cdot 0!$	$e)$ $\frac{(4b)!}{b!}$	$f)$ $4! \cdot 3! \cdot 2!$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis und vergleiche die ausgerechneten Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck.*

$a)$ $\binom{2}{1}$	$b)$ $\binom{8}{4}$	$c)$ $\binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0}$
$d)$ $\binom{7}{2}$	$e)$ $\binom{3}{1}$	$f)$ $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$

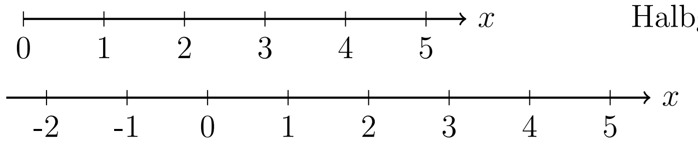
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.11) Lösungen zu Fakultäten.

3 Geometrie

Eines der zentralen Themen der Mathematik in der Schule ist die Geometrie. Dies ist dem Fakt geschuldet, dass geometrischen Formen im menschlichen Alltag überall vorzufinden sind und viele Vorgänge durch sie beeinflusst werden.

3.1 Zahlenstrahl

Der Zahlenstrahl ist eine Linie, an der es möglich ist Zahlen in regelmäßigen Abständen vorzufinden. Diese Linie ist eine Halbgerade, also eine gerade Linie mit einem Anfangspunkt (beim Zahlenstrahl wäre dies die 0) aber keinen Endpunkt. Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$[1] wird aus dieser Halbgeraden eine Gerade, welche weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt.



Halbgerade (Zahlenstrahl nur mit $\mathbb{N}$)

Gerade (Zahlenstrahl mit $\mathbb{Z}$)

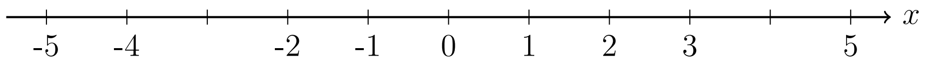
Eine wichtige Eigenschaft des Zahlenstrahls ist, dass ein Einheitenschritt (also der Abstand von 1 bis nach 2) beliebig groß sein kann. Allerdings müssen alle Einheitenschritte die gleichen Abstände haben - es wird von äquidistanten Abständen gesprochen. Das x am Zahlenstrahl beschreibt den Namen der Dimension, auf der sich die Zahlen befinden.
Der Zahlenstrahl ist ein eindimensionales Objekt, da es nur möglich ist sich nach Vorne oder Hinten auf dem Zahlenstrahl zu bewegen. Andere Objekte dieser Art sind Geraden und Halbgeraden im Allgemeinen. Außerdem existieren noch Strecken, welche im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden.

[1] $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

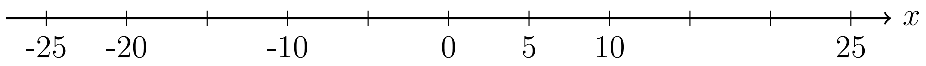
Übungsaufgaben zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1: *Trage die fehlenden Zahlen ein.*

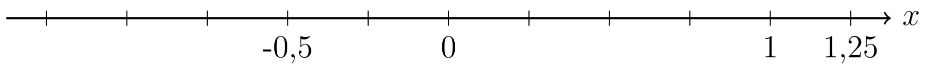
a)



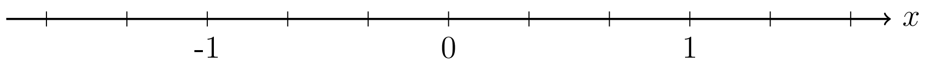
b)



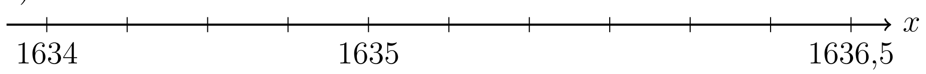
c)



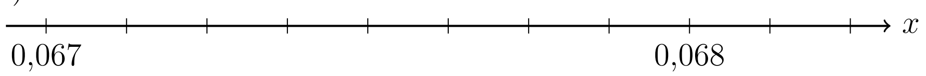
d)



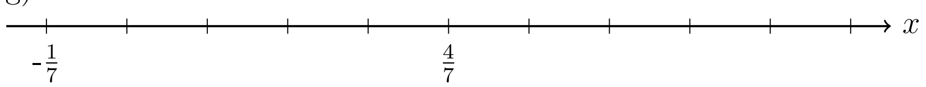
e)



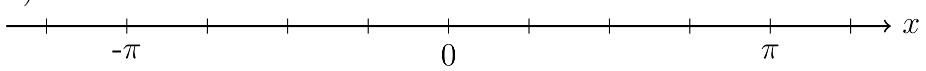
f)



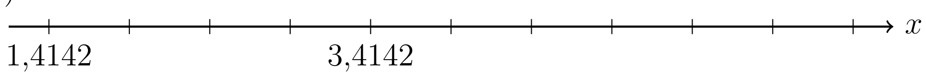
g)



h)



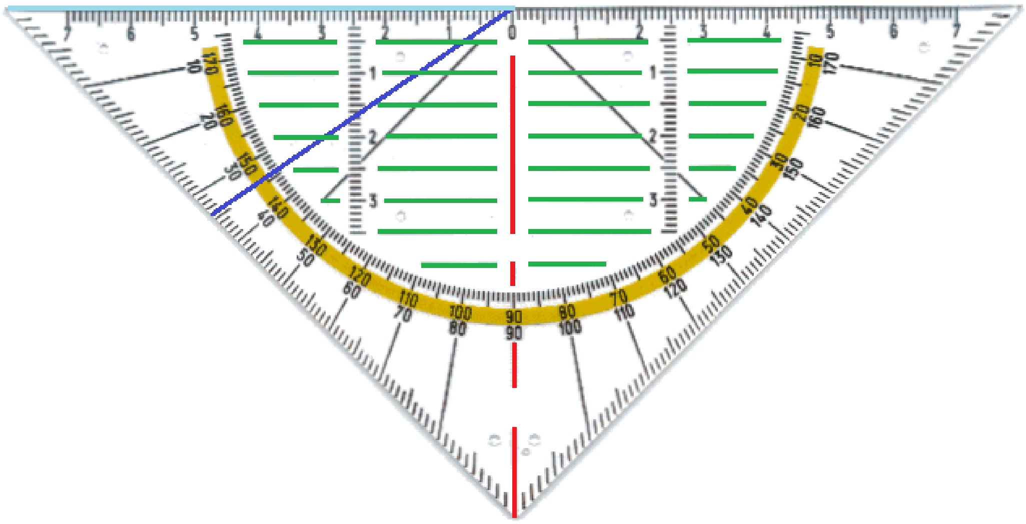
i)



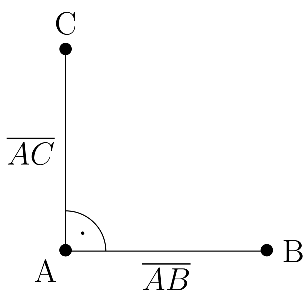
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.12) Lösungen zum Zahlenstrahl.

3.2 Winkel

Als wichtigster Bestandteil der Geometrie in der Schule kann das Geodreieck angesehen werden und sollte in keinem naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht fehlen.



In der Abbildung mit dem Geodreieck wurden zusätzliche farbige Strecken eingefügt, an denen die Funktionsweise des Geodreiecks erklärt werden kann. Strecken sind im Allgemeinen gerade Linien mit einem Anfangs- und einem Endpunkt. Eine Strecke zwischen den Punkten A und B wird durch $\overline{AB}$ verschriftlicht. Die wohl bedeutendste Strecke auf dem Geodreieck ist die Nulllinie, welche auch Mittellinie oder Orthogonalitätslinie genannt wird. Diese Strecke ist rot markiert. Wenn das Geodreieck so auf eine gezeichnete Linie gelegt wird, dass die Linie von der Nulllinie verdeckt wird, dann kann ein sogenannter rechter Winkel zu dieser Linie eingezeichnet werden. Ein solcher rechter Winkel zwischen den zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ würde wie folgt aussehen:

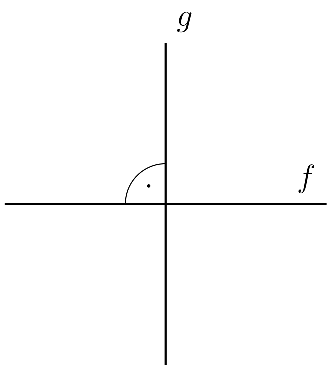


Ein Winkel zwischen zwei Strecken wird durch einen Bogen beschrieben und der Wert in ihm eingetragen. Dabei stellt der rechte Winkel aufgrund seiner Relevanz für die Mathematik und Naturwissenschaften eine Besonderheit da, denn statt den Wert 90°, wie auf auf dem Geodreieck abzulesen ist, einzutragen, wird stattdessen als abkürzende Schreibweise ein Punkt in den Kreisbogen gesetzt. Winkel werden in der Geometrie nahezu immer in der Einheit Grad ° gemessen, wobei die Zahl für einen rechten Winkel in der Geschichte irgendwann willkürlich festgelegt wurde. Es gibt noch andere Einheiten für die Winkelmessung, die sich bis heute nicht in der Geometrie durchgesetzt haben. Im Kapitel „Funktionen“ wird noch eine Umrechnung zu einer anderen Einheit vorgenommen, da es sich im dortigen Zusammenhang lohnt eine neue

Einheit für die Winkel einzuführen. Die mathematische Schreibweise eines Winkels am oben gezeigten Beispiels ist wie folgt definiert:

$$\measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = 90° \tag{3.1}$$

und wird gelesen als „Der Winkel zwischen der Strecke $\overline{AB}$ und der Strecke $\overline{AC}$ ist gleich 90°.“ Winkel können nicht nur zwischen Strecken zu finden sein sondern auch zwischen Geraden. Geraden sind Linien ohne Anfangs- und Endpunkt. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ werden auch Schenkel des Winkels genannt.



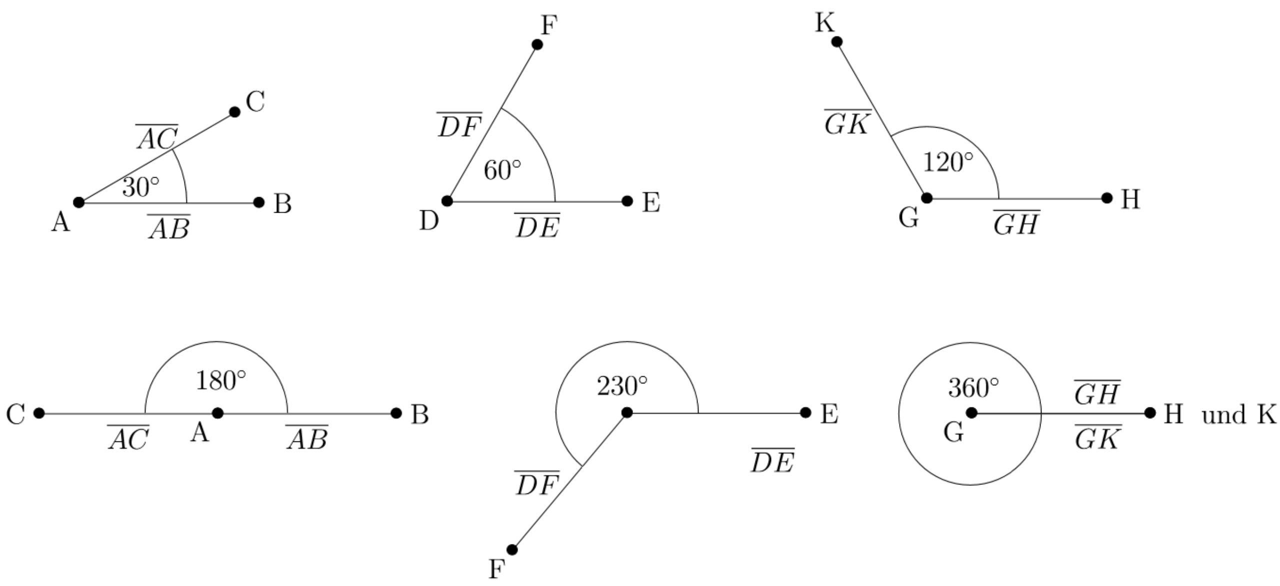
Die Abbildung zeigt einen rechten Winkel zwischen der Gerade f und g: $\measuredangle(f, g) = 90°$. Die Eigenschaft, dass Strecken und/oder Geraden einen rechten Winkel zu einander haben, wird Orthogonalität genannt. Es wird davon gesprochen, dass zum Beispiel zwei Geraden orthogonal zu einander sind (oft wird auch der Begriff „senkrecht“ verwendet). Abkürzend wird die Orthogonalität der Strecken und Geraden in den Beispielen so ausgedrückt:

$$\begin{gathered}\overline{AB} \perp \overline{AC} \\ f \perp g\end{gathered} \tag{3.2}$$

Wie das Geodreieck schon vermuten lässt, gibt es nicht nur rechte Winkel sondern sechs andere Einordnungen in Gruppen von Winkeln. Dazu ist es unerlässlich Winkel messen zu können. Hierfür wird das Geodreieck so positioniert, dass sich der Schnittpunkt der Linien direkt auf der Null befindet. Dann muss die erste Linie so ausgerichtet werden, dass sie genau auf der hellblauen Linie liegen würde und die zweite Linie sich unter dem Geodreieck befindet. Diese zweite Linie trifft dann auf eine Gradzahlmarkierung, welche dann den Wert der Winkelgröße angibt. In der Abbildung mit dem Geodreieck sei die dunkelblaue Linie die zweite Linie. Sie trifft die Winkelmarkung (beim gelben Bogen) bei 34° und somit hat der Winkel zwischen den blauen Linien auch genau diese Größe. Wenn der Winkel allerdings größer als 90° ist, dann müssen die anderen Zahlen (in diesem Fall die gelb unterlegten) verwendet werden.

Winkel werden in verschiedene Gruppen eingeordnet. Die ersten drei Arten von Winkel können anhand der folgenden drei Beispiele dargestellt werden:
Dabei wird bei einem Winkel zwischen 0° und 45° von einem überspitzen Winkel gesprochen ($0° < \measuredangle(\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)) < 45°$). Bei Winkeln ab 45° bis 90° ist die Rede von einem spitzen Winkel ($45° \leq \measuredangle(\left(\overline{DE}, \overline{DF}\right)) < 90°$). Während ein Winkel zwischen 90° und 180° stumpfer Winkel genannt wird ($90° < \measuredangle(\left(\overline{GH}, \overline{GK}\right)) < 180°$).

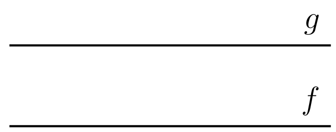
Auch die Winkel ab 180° können in drei Gruppen einsortiert werden.



Wobei ein Winkel von 180° gestreckter Winkel genannt wird ($\measuredangle(\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)) = 180°$). Bei Winkeln zwischen 180° und 360° ist die Rede von einem überstumpfen Winkel ($180° < \measuredangle(\left(\overline{DE}, \overline{DF}\right)) < 360°$). Abschließend existiert noch ein Winkel von 360°, welcher als voller Winkel bezeichnet wird ($\measuredangle(\left(\overline{GH}, \overline{GK}\right)) = 360°$).

Überstumpfe Winkel können mit einem Geodreieck nicht direkt gemessen werden, allerdings kann der andere nicht gesucht Winkel abgelesen werden. Danach bedarf ein nur einer kleinen Rechnung, um den Wert für den überstumpfen Winkel zu erhalten. Dabei wird der abgelesene Wert des nicht gesuchten Winkels von einem vollen Winkel 360° subtrahiert.

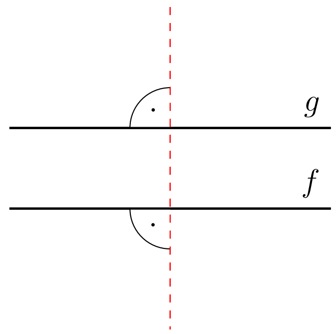
Allerdings gibt es auch Strecken und Geraden, welche sich nicht schneiden, sodass eine Winkelbestimmung entweder schwer oder gar unmöglich wird. Wenn zwei Linien immer den gleichen Abstand zu einander haben, dann wird dies Parallelität der Linien genannt. Mit den grünen Linien des Geodreiecks kann dies getestet werden.



Die beiden Geraden f und g sind parallel zu einander, da sie immer den gleichen Abstand zu einander haben. Mathematische wird dies ausgedrückt durch:

$$f \,||\, g \tag{3.3}$$

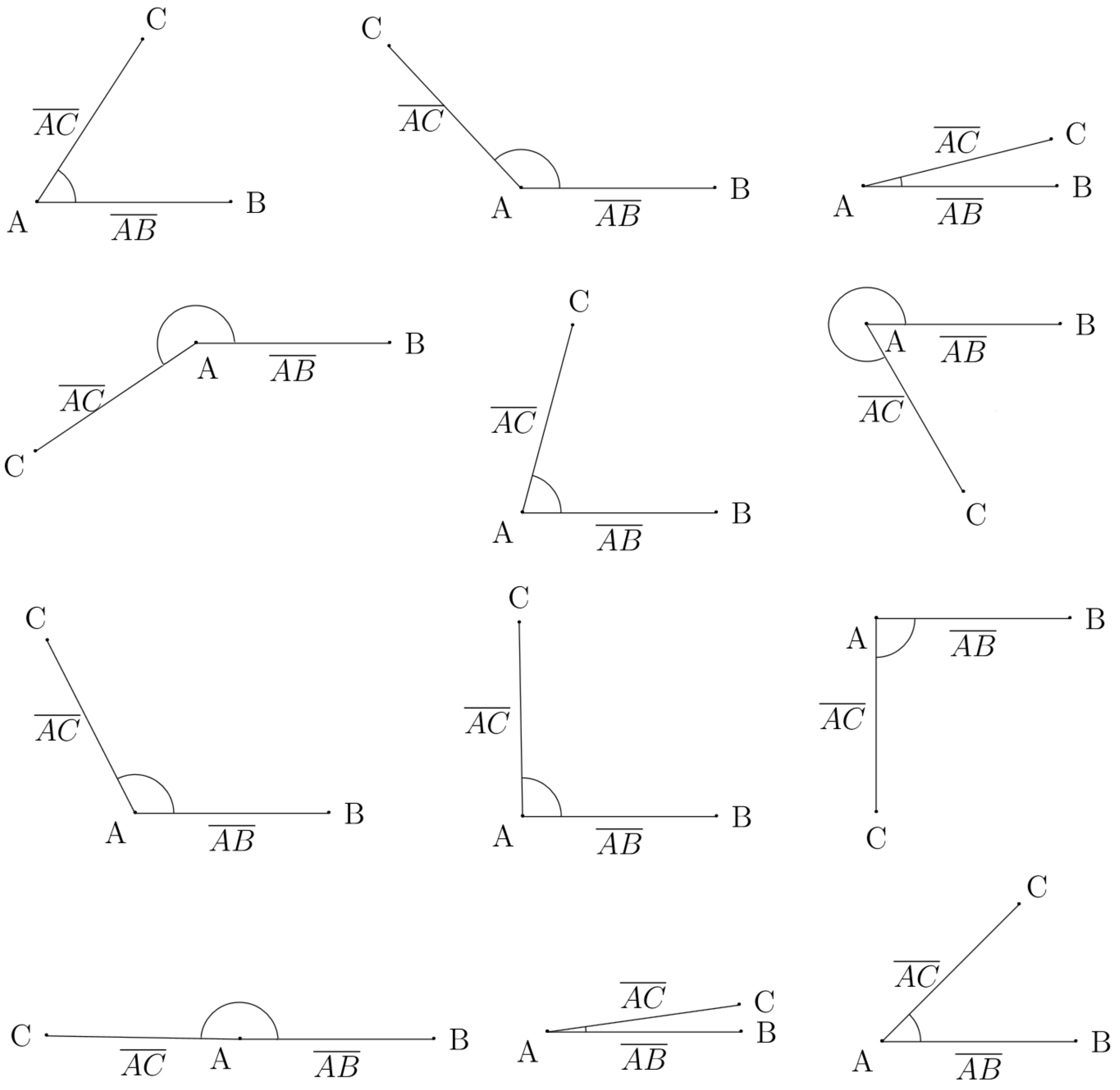
Die Parallelität zwischen zwei Linien kann auch überprüft werden, in dem eine orthogonale Linie zur ersten Linie gezogen wird. Wenn diese auch wieder orthogonal zur zweiten Linie ist, ist dies ebenso ein Anzeichen für die Parallelität.



Im Großen und Ganzen können viele wichtige Eigenschaften der geometrischen Körper durch Winkel und durch Parallelität sowie Orthogonalität beschrieben werden, sodass diese Begriffe von jedem Schüler verinnerlicht sein sollten.

Übungsaufgaben zu Winkeln

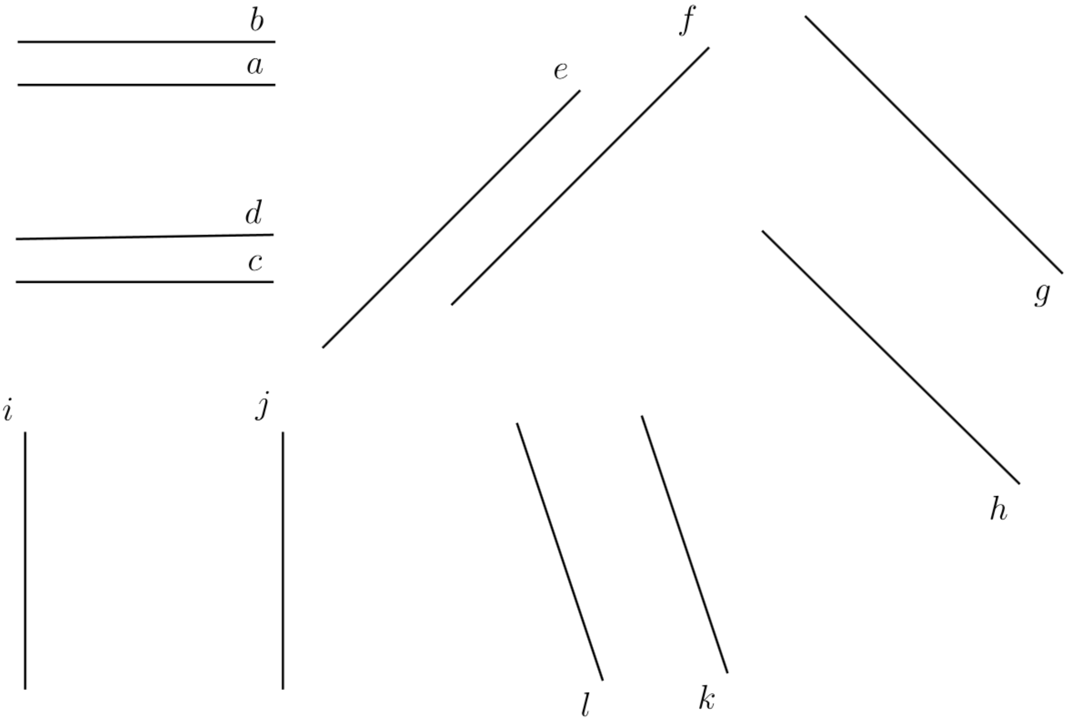
Aufgabe 1: *Bestimme die Winkel und ordne sie den Kategorien zu.*



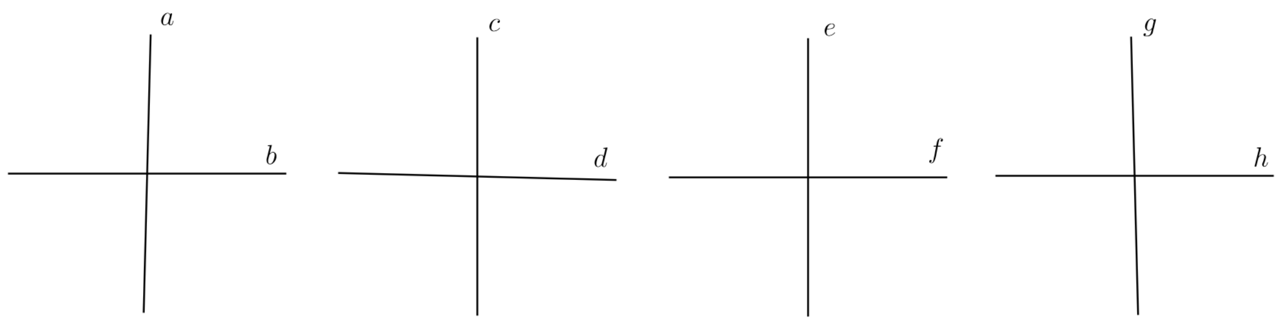
Aufgabe 2: *Zeichne die folgenden Winkel.*

148°	27°	59°	90°	210°	180°	11°	70°
30°	60°	120°	330°	267°	240°	94°	5°

Aufgabe 3: *Teste auf Parallelität.*



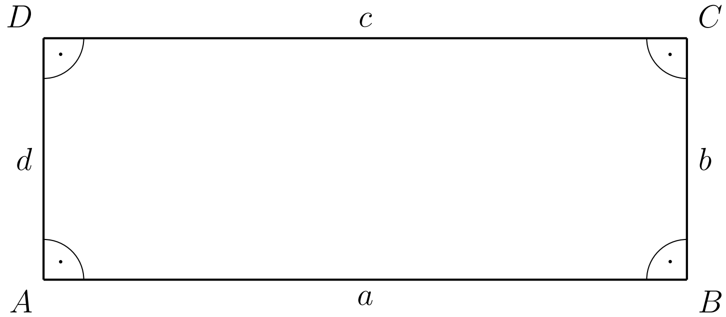
Aufgabe 4: *Teste auf Orthogonalität.*



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.13) Lösungen zu Winkeln.

3.3 Rechteck

Nachdem Winkel anhand von Strecken und Geraden eingeführt wurden und somit der erste Kontakt mit einer Ebene, also einer Ausdehnung in zwei Dimensionen, werden nun weitere wichtige Größen für zweidimensionale Körper am Rechteck eingeführt. Ein Rechteck ist eine geometrisches Objekt, welches aus vier rechten Winkel besteht. Somit hat ein Rechteck insgesamt eine Winkelsumme von 360°. Außerdem besitzt jedes Rechteck vier Seiten. Dabei sind die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel zu einander.



Die Abbildung zeigt, wie die Seiten und die Eckpunkte eines Rechtecks benannt werden. Es gilt, wie bereits erwähnt, dass $\overline{AB} = a = c = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = b = d = \overline{DA}$. Die Strecken $\overline{DB}$ und $\overline{AC}$ werden Diagonalen genannt.

Die bedeutendste zweidimensionale Größe von zweidimensionalen geometrischen Objekten ist der sogenannte Flächeninhalt A. Dieser gibt an wie groß die Fläche ist, welche durch die Seiten eingerahmt wurde. Dabei ist eine Fläche immer vorhanden, wenn zwei Richtungen, also Dimensionen, betrachtet werden. Ein Blatt Papier, ein Tisch und auch die Tafel bilden jeweils eine Fläche. Die Fläche wird in Quadratmeter $1m^2$ gemessen. Dabei ist ein Quadratmeter eine Fläche die von einem Rechteck eingeschlossen wird von einem Meter $a = 1m$ mal einem Meter $b = 1m$: $1m \cdot 1m = 1m^2$. Somit ist der Flächeninhalt A gegeben durch das Produkt der beiden Seiten a und b.

$$A = a \cdot b \tag{3.4}$$

Die zweite wichtige Größe ist der Umfang U, welcher den Rand der Fläche markiert und selbst eine eindimensionale Größe ist. Der Umfang U ist die Summe aller Strecken, somit ergibt sich für ein Rechteck:

$$U = 2a + 2b \tag{3.5}$$

Übungsaufgaben zu Rechtecken

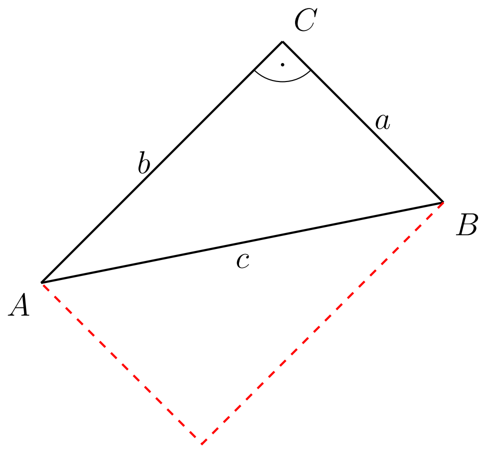
Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken.*
a) $a = 3cm$ und $b = 6cm$
b) $a = 2cm$ und $b = 7cm$
c) $a = 9cm$ und $b = 12cm$
d) $a = 4cm$ und $b = 17cm$
e) $a = 27cm$ und $b = 3cm$
f) $a = 1,5cm$ und $b = 60cm$
g) $a = 0,5cm$ und $b = 2cm$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken. Gib das Ergebnis in der Einheit der längeren Seite an. Runde dabei das Ergebnis bis auf drei Nachkommastellen.*
a) $a = 3dm$ und $b = 6cm$
b) $a = \frac{1}{2}dm$ und $b = 90mm$
c) $a = 4,2m$ und $b = 430cm$
d) $a = 2mm$ und $b = 2cm$
e) $a = \frac{1}{9}cm$ und $b = 27dm$
f) $a = 1,125km$ und $b = 8000m$
g) $a = \sqrt{111}cm$ und $b = 120mm$

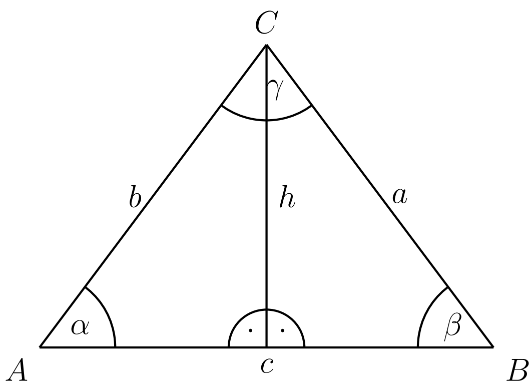
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.14) Lösungen zu Rechtecken.

3.4 Dreieck

Wenn ein Rechteck entlang einer Diagonalen in zwei Objekte zerschnitten wird, so ergeben sich daraus zwei Dreiecke mit jeweils einem rechten Winkel - rechtwinklige Dreiecke. Dreiecke sind mit Abstand die wichtigste geometrische Konstruktion der Mathematik, denn nicht zu Letzt lässt sich jede eckige geometrische Form in Dreiecke unterteilen und sogar die Eigenschaften des Kreises an ihnen erklären. Das rechtwinklige Dreieck ist hierbei das bedeutendste Dreieck.



Die Abbildung zeigt die Benennung der Größen eines rechtwinkligen Dreieckes. Da das Dreieck aus dem Zerschneiden eines Rechtecks in zwei Teile gewonnen wurde, ist die Winkelsumme eines Dreieckes gegeben als 180°. Allerdings müssen nicht alle Dreiecke einen rechten Winkel besitzen, sodass auch die Winkel benannt werden müssen.

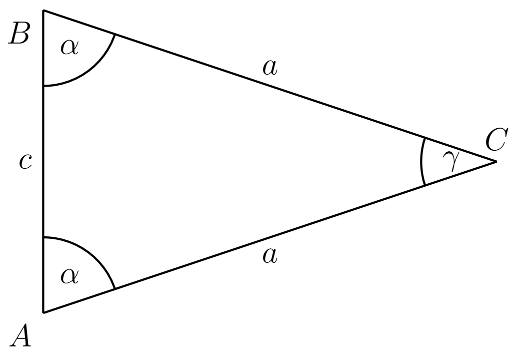


Die Abbildung zeigt, dass die Winkel mit griechischen Buchstaben benannt werden - das vollständige griechische Alphabet sowie andere können im Anhang gefunden werden (12.1). Außerdem ist zu erkennen, dass ein beliebiges Dreieck immer in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt werden können. Dazu bedarf es der Konstruktion der sogenannten Höhe h des Dreiecks, wobei dann in diesem Fall die Seite c die Grundseite g wäre. Die Höhe h muss immer orthogonal zur Grundseite g sein und im Punkt enden, welcher der Grundseite g gegenüber liegt (in der Abbildung wäre dies der Punkt C).
Aus der Zerlegung des Rechtecks in zwei Dreiecke ergibt sich, dass der Flächeninhalt A eines Dreiecks halb so groß sein muss wie ein Rechteck mit gleichen Maßen. Die Bedingung zur Berechnung des Flächeninhalts A beim Rechteck waren dessen Eigenschaften, dass die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und alle Winkel rechte Winkel sein müssen. Somit muss die Hälfte

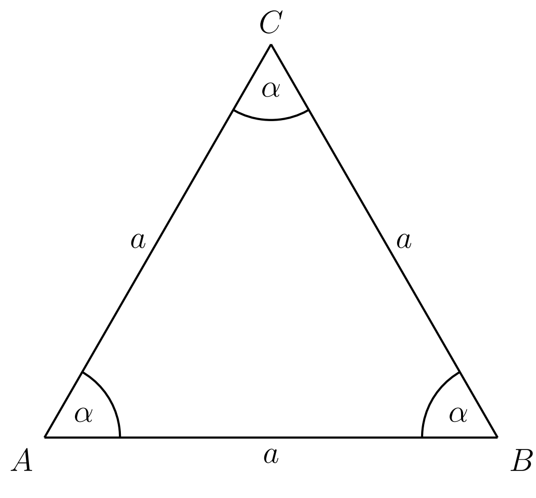
des Produkts der Grundseite g mit der Höhe h den Flächeninhalt A des Dreiecks widerspiegeln, da die Grundseite g und die Höhe h ein Rechteck aufspannen. Der Umfang U ist wieder gegeben durch die Summe aller Strecken, die die Fläche umranden.

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} \\ U &= a + b + c \end{aligned} \tag{3.6}$$

Neben dem rechtwinkligen Dreieck gibt es noch weitere spezielle Dreiecke. Darunter fällt das sogenannte gleichschenklige Dreieck, bei dem zwei Seiten gleich lang sind. Nicht nur die Schenkellängen zum Winkel γ sind gleich groß, sondern auch die anderen beiden Winkel.

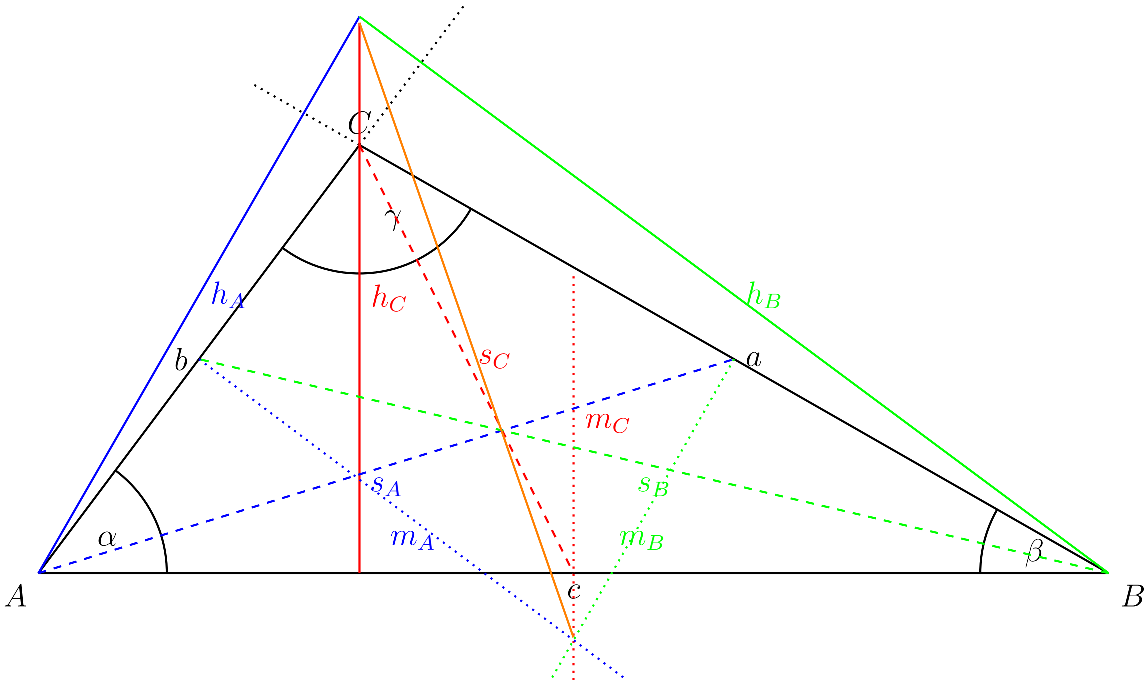


Das Geodreieck ist ein solches gleichschenkliges Dreieck. Durch die Bestimmung eines Winkels sind alle Winkel bekannt - Diese Eigenschaft kann in vielen Aufgaben ausgenutzt werden.
Des Weiteren gibt es noch den Spezialfall, dass alle Seiten des Dreiecks gleich lang und alle Winkel gleich groß sind. Damit ergibt sich automatisch, dass jeder Winkel exakt 60° messen muss.



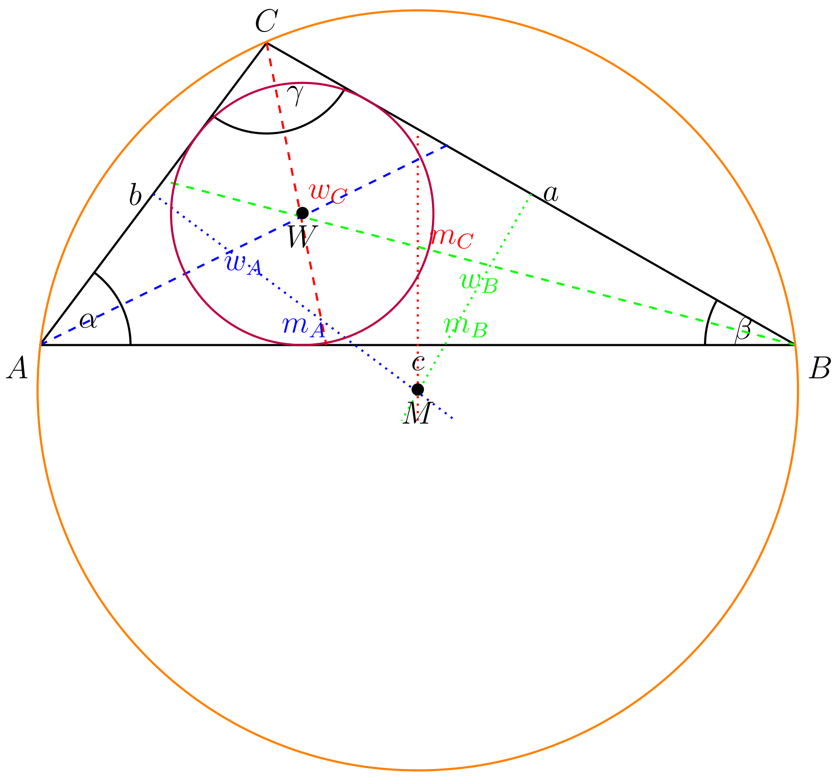
Nachdem das Dreieck und dessen spezielle Formen eingeführt wurden, werden im Folgenden weitere Größen eingeführt, welche manchmal Aufgaben vereinfachen oder gar erst lösbar machen.

Eine solche Größe ist der Schwerpunkt. Dieser kann zeichnerisch ermittelt werden, indem die Seitenhalbierenden gefunden werden. Dabei wird die Mitte einer Seite mit dem gegenüberliegenden Punkt verbunden. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der Schwerpunkt S.
Durch die Konstruktion einer Orthogonalen in der Mitte einer jeden Seite ergeben sich die sogenannten Mittelsenkrechten. Auch sie haben einen Schnittpunkt, welcher auch Mittelpunkt des Umkreises M genannt wird. An diesem Punkt wäre es möglich einen Kreis zu ziehen, sodass alle Eckpunkte des Dreiecks auf dem Kreis liegen würden.
Eine sogenannte Winkelhalbierende kann, wie der Name es schon erahnen lässt, durch die Halbierung des Winkels konstruiert werden. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden wird Mittelpunkt des Innenkreises W genannt und dient zur Konstruktion eines Kreis, der jede Seite berührt aber nicht schneidet.



In der Abbildung wurden alle Höhen h als solide, alle Seitenhalbierenden s als gestrichelte und alle Mittelsenkrechten m als gepunktete Linien eingezeichnet. Dabei sind alle Linien die vom Punkt A ausgehen blau, alle Linien die vom Punkt B ausgehen grün und alle Linie die vom Punkt C ausgehen rot gehalten. Es fällt auf, dass der Schnittpunkt der Höhen sowie der Schnittpunkt Mittelsenkrechten außerhalb des Dreiecks liegen. Dies rührt daher, dass ein Winkel größer als 90° ist.
Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden, der Seitenhalbierenden und der Höhen liegen auf einer Geraden, der sogenannten Euler'schen Gerade, welche in der Abbildung orange eingezeichnet ist. Dabei ist das Streckenverhältnis immer das gleiche. Die Strecke $\overline{HS}$ ist dabei immer doppelt so lang wie die Strecke $\overline{SM}$

Zur Veranschaulichung des Innen- und Umkreises dient folgende Abbildung:

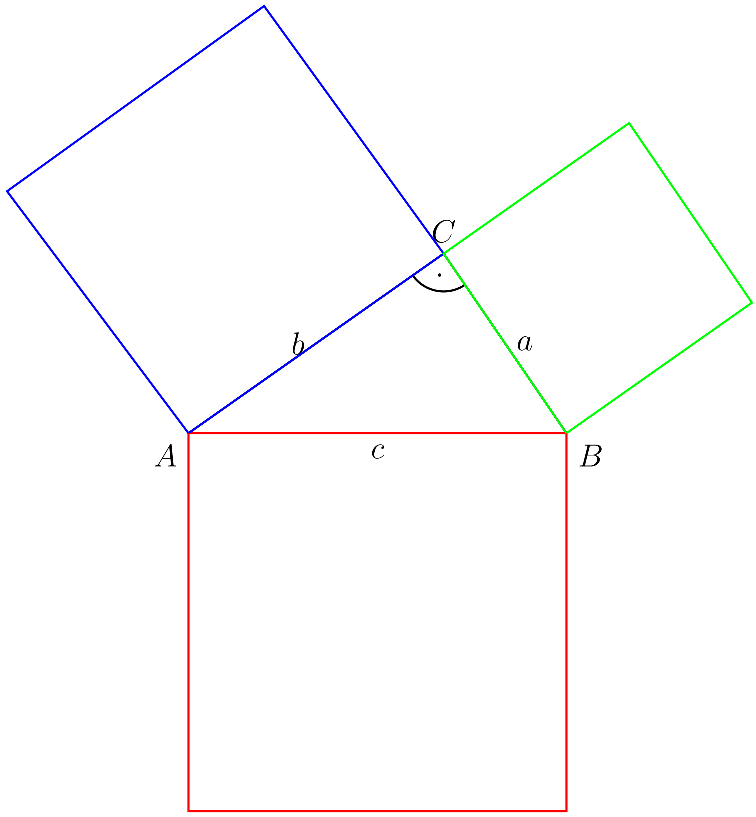


In der Abbildung sind die Winkelhalbierenden w gestrichelt und die Mittelsenkrechten m gepunktet. Dabei sind alle Linien die vom Punkt A ausgehen blau, alle Linien die vom Punkt B ausgehen grün und alle Linie die vom Punkt C ausgehen rot gehalten. Der Innenkreis ist in einem dunklen violett gehalten und hat seinen Mittelpunkt beim Punkt W, während der Umkreis ist in orange gezeichnet wurde und seinen Mittelpunkt beim Punkt M hat.

Nachdem nun die Konstruktion von verschiedenen wichtigen Punkten und Strecken beziehungsweise Geraden erläutert wurde, soll das rechtwinklige Dreieck genauer betrachtet werden. Zu nächst soll der Satz des Pythagoras betrachtet werden, welcher wohl der berühmteste Satz der Mathematik ist. Ein Satz in der Mathematik ist eine bewiesene Gleichung, die bis auf in sehr speziellen Ausnahmefällen immer ihre Gültigkeit besitzt.

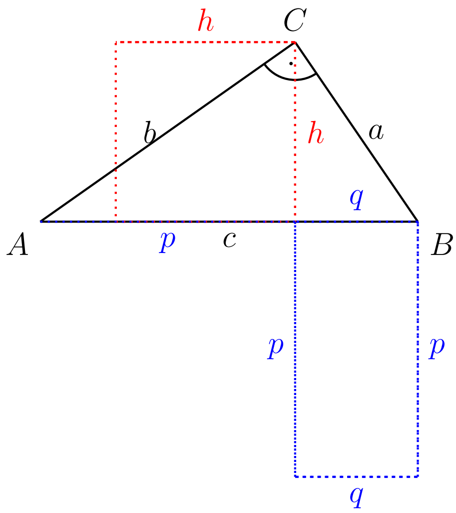
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3.7}$$

Wie das a^2, b^2 und c^2 schon suggerieren, werden hierbei Flächeninhalte von Rechtecken mit den gleichen Seitenlängen (sogenannte Quadrate), die von den jeweiligen Seiten des Dreiecks aufgespannt werden, ins Verhältnis gebracht.



Die Abbildung zeigt deutlich die verschieden Flächen der Quadrate. Dabei gilt, dass der Flächeninhalt, der am größten ist und von der längsten Seite c aufgespannt wird, genau so groß ist wie die Summe der beiden anderen Flächen. Die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks wird Hypotenuse genannt und befindet sich immer gegenüber vom rechten Winkel. Die beiden anderen Seiten heißen Katheten und werden vom Kapitel „Trigonometrie“ detaillierter unterschieden und untersucht.

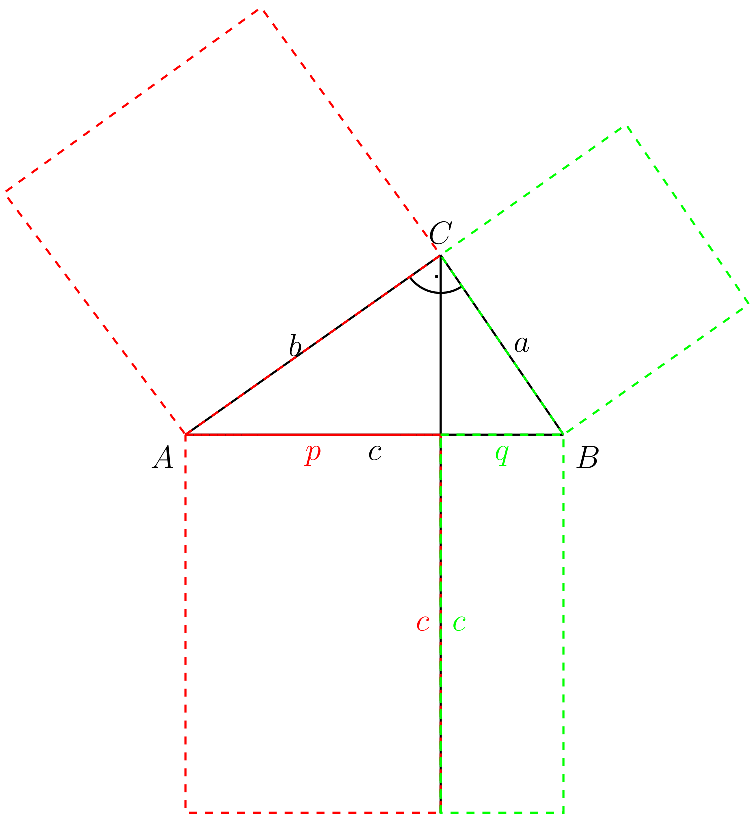
Neben dem Satz das Pythagoras existieren noch weitere Sätze. Einer von ihnen ist der sogenannte Höhensatz von Euklid.



Die Abbildung zeigt, dass die Flächeninhalte aus dem Quadrat, welches durch die Höhe h mit sich selbst aufgespannt wird, mit dem Rechteck aus der unterteilten Hypotenuse aus p und q in Verbindung gebracht werden. Es gilt:

$$h^2 = pq \tag{3.8}$$

Zu guter Letzt wird noch auf den Kathetensatz hingewiesen, welcher die Rechtecke aus den Teilstücken der Hypotenuse mit der Hypotenuse und jeweiligen Kathetenquadraten in Verbindung setzt.



Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= cq \\ b^2 &= cp \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es soll nochmals betont werden, dass das Dreieck eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Und auch grade in den Naturwissenschaften sind Dreiecke von fundamentaler Wichtigkeit. Im Kapitel „Trigonometrie“ werden die Eigenschaften des Dreiecks und Beziehungen von Größen des Dreiecks untereinander weiter beleuchtet bis sich daraus resultierendes Wissen nochmals vertieft wird im Kapitel „Funktionen“.

Übungsaufgaben zu Dreiecken

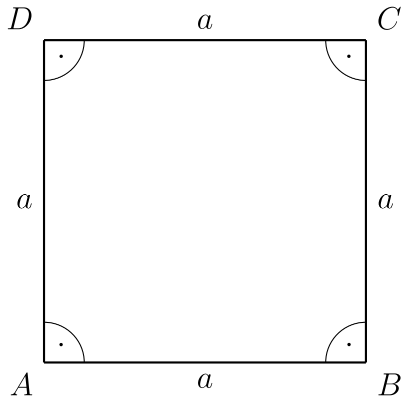
Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Dreiecken. (Benutze die vorgestellten Sätze!)*
a) $g = 9cm$, $a = 4cm$ und $h_g = 3cm$
b) $g = 11cm$, $a = 5cm$ und $h_g = 2cm$
c) $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $h_c = 2cm$
d) $g = 7cm$, $b = 6cm$ und $h_g = 1cm$
e) $p = 2,5cm$, $q = 2cm$ mit einem rechten Winkel
f) $c = 12cm$, $q = 3cm$ und $a = 5cm$

Aufgabe 1: *Du befindest dich mit deinem Geodreieck $20m$ weit weg von einem Turm und hältst das Geodreieck auf $1,5m$ Höhe vom Boden. Du schaust entlang der längsten Kante, sodass die Kante und die Spitze des Turms eine Linie bilden. Dabei ist die Kante die noch unten zeigt nun parallel zum Boden. Wie hoch ist der Turm?*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.15) Lösungen zu Dreiecken.

3.5 Spezielle Vierecke

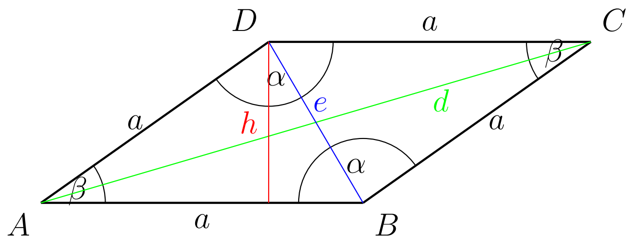
Wie bereits schon im vorigen Abschnitt beschrieben, gibt es spezielle Vierecke. So wird ein Rechteck, bei dem alle Seiten die gleiche Länge vorweisen können, Quadrat genannt.



Die Berechnung des Flächeninhalts A und des Umfangs U sind beim Quadrat trivialer Natur und ergeben sich als:

$$A = a^2$$
$$U = 4a \tag{3.10}$$

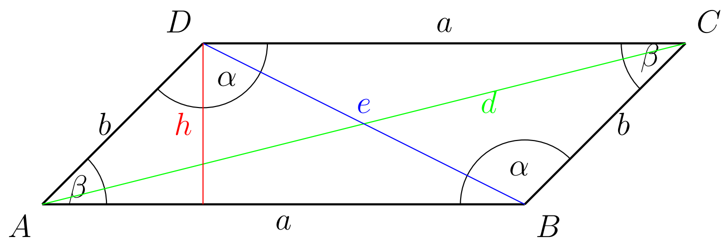
Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten, deren gegenüber liegende Winkel gleich groß sind, wird Raute genannt (selten auch Rhombus).



Die Berechnung des Flächeninhalts A ist ähnlich wie bei einem Dreieck mit dem Unterschied, dass durch die Einzeichnung der Diagonale e zwei Dreiecke vorliegen. Somit muss der Flächeninhalt A_Δ eines der Dreiecke verdoppelt werden, sodass sich daraus wiederum der Flächeninhalt der Raute $A = 2A_\Delta$ergibt. Somit gilt für den Umfang U und dem Flächeninhalt A (wobei in der Abbildung die Grundseite g gleich a ist):

$$A = gh$$
$$U = 4a \tag{3.11}$$

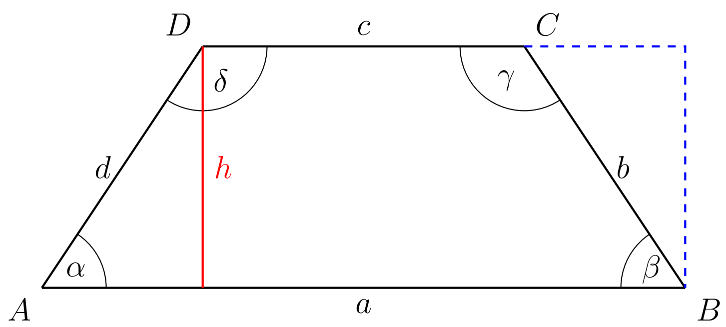
Wenn nun die benachbarten Seiten eine unterschiedliche Länge besitzen aber die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel zu einander sind, wird von einem Parallelogramm gesprochen.



Dabei unterscheidet sich zur Raute lediglich der Umfang U, welcher nach wie vor durch die Aufsummierung der Seiten gegeben ist:

$$\begin{aligned} A &= gh \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{3.12}$$

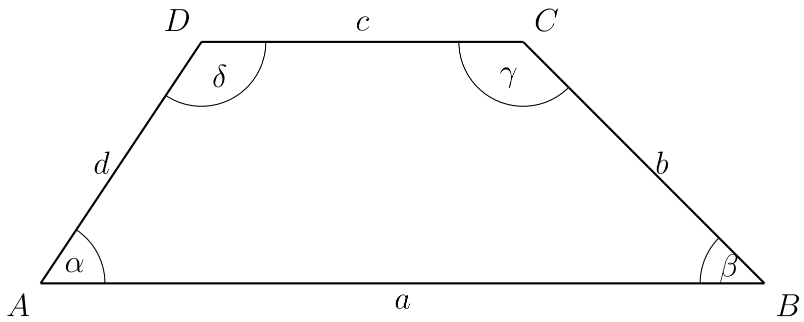
Wenn mindestens zwei Seiten parallel zu einander sind, allerdings sonst keine Größen zwingend gleich groß sein müssen, ist die Rede von einem Trapez.



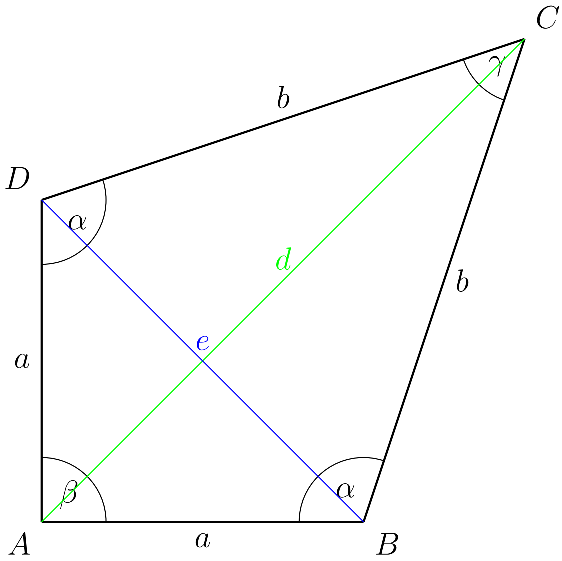
Die Abbildung zeigt ein Trapez bei dem die Winkel δ und γ sowie α und β gleich groß und aus diesem Grund auch die Seiten d und $b$gleich lang sind. Auch zeigt die Abbildung wie aus einem solchen Trapez wieder ein Rechteck gewonnen werden kann. Dabei wären die Seiten dieses Rechtecks gegeben durch die Höhe h und dem Mittelwert m der Summe von a und c. Hierbei gilt $m = \frac{a+c}{2}$ und somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2}h \\ U &= a + b + c + d \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wie bereits erwähnt müssen nur zwei Seiten parallel zu einander sein, sodass von einem Trapez gesprochen werden kann.



Dabei verändert sich die Berechnungsmethode das Flächeninhalts A und des Umfangs U nicht und ist genauso durch zu führen wie in Gleichung (3.13)
Als letztes soll der Drachen eingeführt werden. Er zeichnet sich dadurch aus, dass zwei Winkel gleich groß sind, welche sich gegenüber liegen.



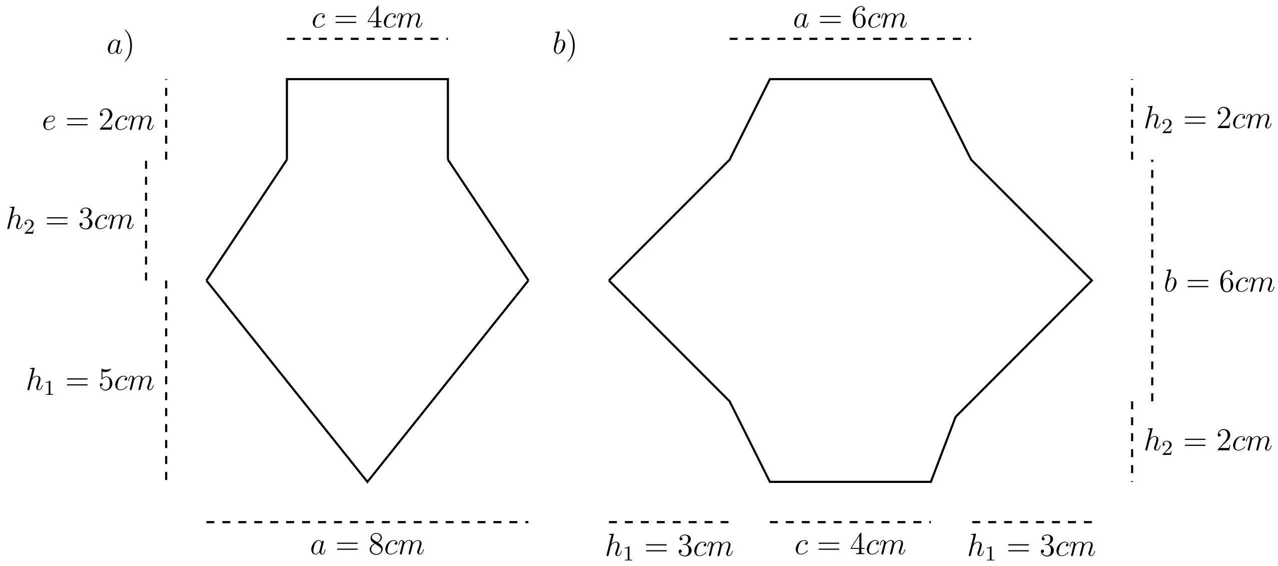
Wie die Abbildung zeigt sind die Schenkel des Winkels β und die Schenkel des Winkels γ jeweils gleichlang, was auch ein Merkmal eines Drachens ist. Dabei ist ein Drachen aus zwei Dreiecken aufgebaut, deren Flächeninhalte addiert werden können. Die Höhen dieser Dreiecke sind gegeben durch die Einzeichnung der Diagonalen e und d. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{de}{2} \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{3.14}$$

Übungsaufgaben zu Vierecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von jeweiligen angegeben Viereck.*
a) Quadrat: $a = 2cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm$, $b = 3cm$ und $h_a = 2cm$
d) Trapez: $a = 4cm$, $c = 11cm$, $b = d$ und $h = 4cm$
e) Drachen: $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $e = 6cm$

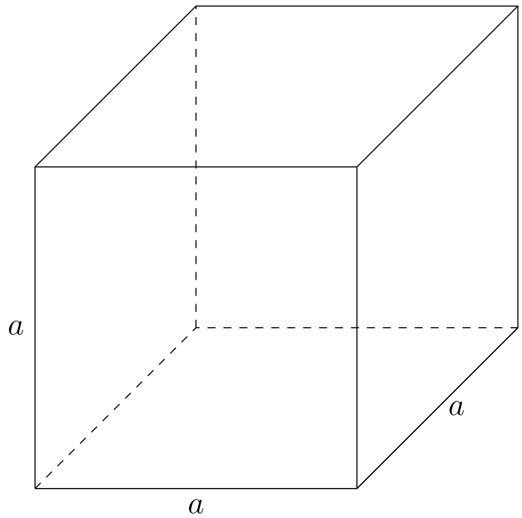
Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und Flächeninhalt A für die jeweiligen Vielecke.*



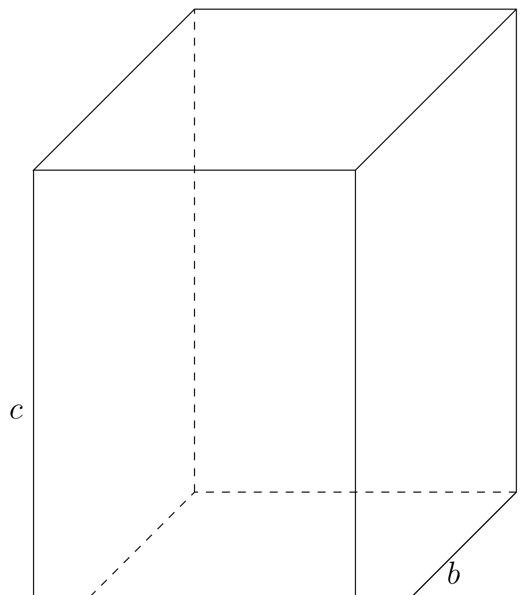
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.16) Lösungen zu Vierecken.

3.6 Mehrdimensionale Vielecke

Nachdem die wichtigsten Objekte in zwei Dimensionen besprochen wurden, wird eine weitere Dimension eingeführt. So kommt nach der x-Richtung und der y-Richtung die z-Richtung hinzu, welche auch wieder in einem 90°-Winkel zu den beiden anderen Richtungen steht. Da ein Blatt Papier nur eine zweidimensionale Fläche ist, muss die dritte Dimension durch eine Konvention hinzugefügt werden. Dazu wird die z-Richtung in einem 45° zur x- und y-Richtung eingezeichnet. Dabei wird die Länge in z-Richtung beim Einzeichnen halbiert. Strecken, die sich hinter Flächen befinden, werden gestrichelt. So würde ein Quadrat, welches in z-Richtung ebenso um die gleiche Seitenlänge a erweitert wird, Würfel genannt werden.



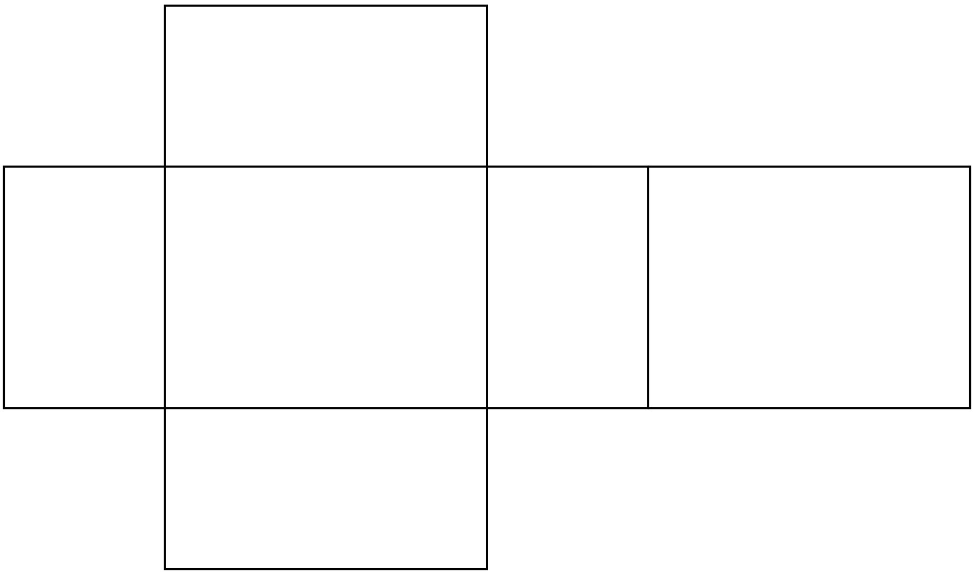
Die Abbildung zeigt genau so einen Würfel. Der Würfel zeichnet sich dadurch aus, dass alle Winkel 90° besitzen und alle Seiten gleich lang sind. Wie im zweidimensionalen das Quadrat ein Spezialfall des Rechtecks ist, so ist auch im dreidimensionalen ein Würfel ein Spezialfall eines sogenannten Quaders.



Wie die Abbildung zeigt, sind nur alle Strecken, die parallel zu einander sind gleich lang. Das sind die Strecken, die jeweils in eine Dimension zeigen. Wie auch schon bei der Flächenberechnung soll nun das Volumen des Körpers bestimmt werden. Das Volumen V ist ein Größe, die in $1m^3$ gemessen wird. Dabei gilt $1m^3 = 1m \cdot 1m \cdot 1m$ und somit wird das Volumen eines Quaders durch die Multiplikation der jeweiligen unterschiedlichen Seiten bestimmt. Folglich Länge mal Breite mal Höhe.

$$V = abc \tag{3.15}$$

Jeder Quader zeichnet sich auch dadurch aus, dass er acht Ecken, zwölf Kanten und sechs Seiten besitzt. Jeder dreidimensionale Körper kann aufgeklappt werden. Dazu werden alle Flächen so aneinander gezeichnet, sodass dadurch der Körper wieder erschaffen werden kann. So sind die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen ersichtlicher.

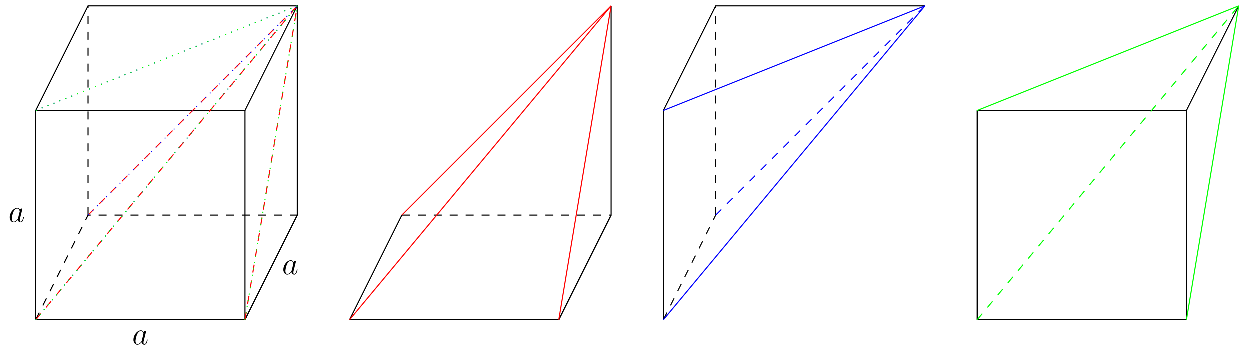


Die Abbildung zeigt so eine Darstellung, welche Netz genannt wird. Das Netz des Quaders zeigt, dass die Oberfläche O über die Summe der jeweiligen Rechteckflächeninhalte berechnet werden kann. Dabei ist die Oberfläche, die Fläche, die das Volumen umrandet und wird wie jede Fläche in $1m^2$ gemessen.

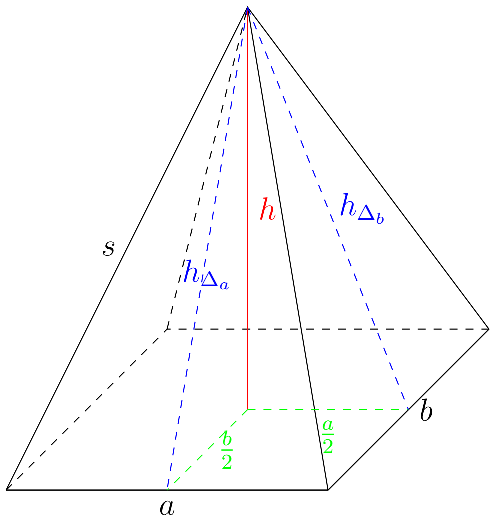
$$O = 2ab + 2ac + 2bc \tag{3.16}$$

Aus der Flächenberechnung, wo eine Fläche stets durch einen Umfang umrandet und nun aus der Volumenberechnung, wo das Volumen durch eine Oberfläche umrandet wird, kann generell gesagt werden, dass der sogenannte Rand immer eine Dimension kleiner ist als die Gesamtanzahl der Dimensionen.

Bisher wurde der Quader und der Würfel betrachtet, bei denen jeweils acht Eckpunkt vorhanden werden. Wenn nun ein Körper eine viereckiger Grundfläche haben soll, aber nur aus fünf Eckpunkten bestehen soll, dann wäre die Volumenbestimmung scheinbar schwieriger Natur. Allerdings kann jeder Quader der „unten“ wie „oben“ die Grundfläche aufweist in drei exakt gleiche Körper verschnitten werden, die nur aus fünf Eckpunkten bestehen und eine viereckiger Grundfläche besitzen.



Die Abbildung zeigt, wie so ein Quader zerlegt werden könnte. Ein solcher Körper heißt Pyramide. Dabei ist es nicht wichtig, wo sich der zulaufende Punkt, die Spitze, befindet. Im Folgenden soll sich dieser Punkt über dem Schwerpunkt der Grundfläche befinden.

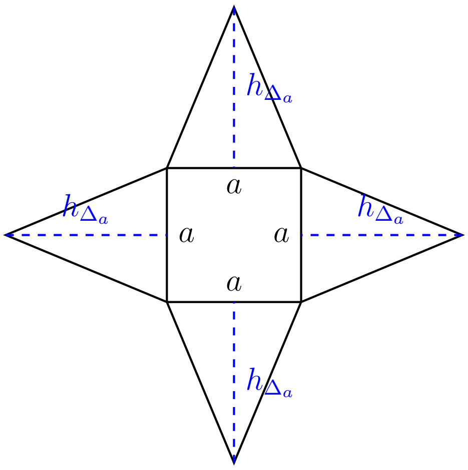


Das Volumen V der Pyramide mit rechteckiger Grundseite aus der Abbildung wäre gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3}abh \quad , \tag{3.17}$$

da die Pyramide dreimal in einen Quader mit den Maßen a, b und h passen würde.

Die Oberfläche O wäre nach Betrachtung des Netzes der Pyramide auch nichts weiter als die Flächeninhalt der Dreiecke addiert mit der Grundfläche, welche in diesem Beispiel quadratisch gewählt sei (b=a).



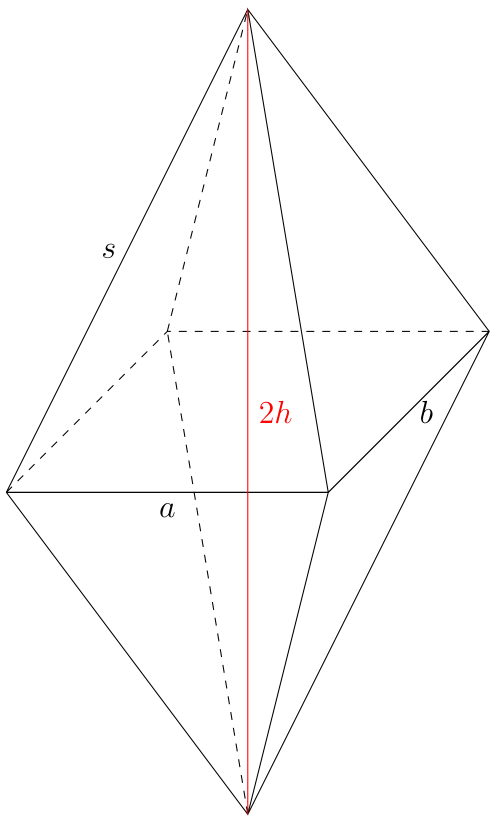
Wie das Netz schon vermuten lässt, wird die Höhe der Dreiecke h_{Δ_a} benötigt. Diese kann über den Satz des Pythagoras bestimmt werden (siehe dazu die Abbildung der Pyramide):

$$h_{\Delta_a} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \quad . \tag{3.18}$$

Somit ergibt sich für die Oberfläche der Pyramide O aus:

$$O = ah_{\Delta_a} + bh_{\Delta_b} + ab \quad . \tag{3.19}$$

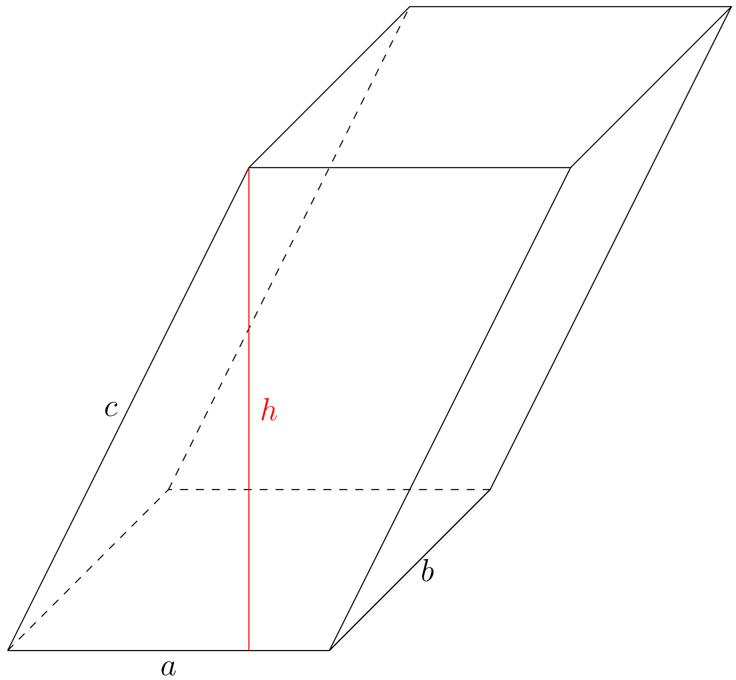
Viele Körper sind aus Quadern und Pyramiden zusammen gesetzt, wie zum Beispiel das Oktaeder:



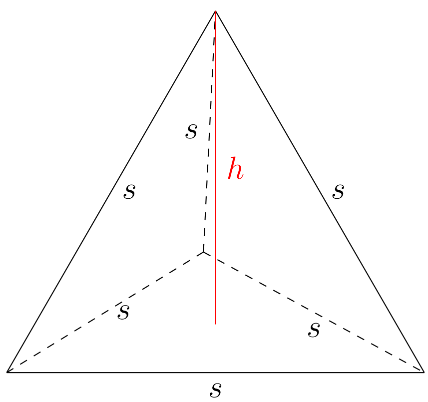
Wie aus der Abbildung des Oktaeders zu erkennen ist, ist dieser Körper aus zwei Pyramiden zusammengesetzt, sodass das Volumen V und die Oberfläche O (also zwei Pyramiden ohne die Grundflächen) gegeben ist als:

$$\begin{aligned} O &= 2ah_{\Delta_a} + 2bh_{\Delta_b} \\ V &= \frac{2}{3}abh \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Wie schon bei der Pyramide, müssen die Körper nicht nur rechte Winkel aufweisen, wie zum Beispiel dieses schiefe Prisma mit rechteckiger Grundfläche:



Da die Winkel im Verhältnis zu einander kleiner und größer geworden sind, wird das Volumen durch die Höhe h limitiert. Generell gilt für jeden Körper zur Berechnung des Volumens immer „Grundseite mal Höhe“. Somit ist es völlig ausreichend einen Körper zu unterteilen in Teilkörper, die berechnet werden können.
Zu guter Letzt soll noch das Tetraeder vorgestellt werden:



Das Tetraeder zeichnet sich dadurch aus, dass es auf vier gleichseitigen Dreiecken besteht und der einzige Körper mit nur vier Flächen ist. Die Oberfläche O und das Volumen V ist gegeben durch das Prinzip, welches anhand der Pyramide erläutert wurde, als:

$$O = s^2\sqrt{3}$$
$$V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \quad . \tag{3.21}$$

Bei einem Tetraeder sind die Winkel der zwischen den Kanten gleich groß und haben den Wert von $109,5°$.
Da nun viele eckige Körper eingeführt wurden soll im folgenden Abschnitt der Kreis und danach die Ellipse vorgestellt werden, sodass auch Rundungen berechnet werden können.

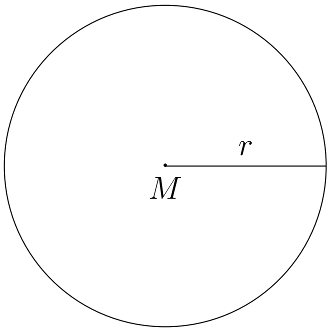
Übungsaufgaben zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1: *Bestimme Oberfläche O und Volumen A für die gegebenen Werte der jeweiligen Körper.*
a) Würfel: $a = 3cm$
b) Quader: $a = 2cm$, $b = 9cm$ und $c = 4cm$
c) Pyramide: $b = a = 4cm$ und $h = 6cm$
d) Pyramide: $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $h = 5cm$
e) Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$: $a = 6cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 4cm$
f) Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf: $a = 2,5cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 2,5cm$

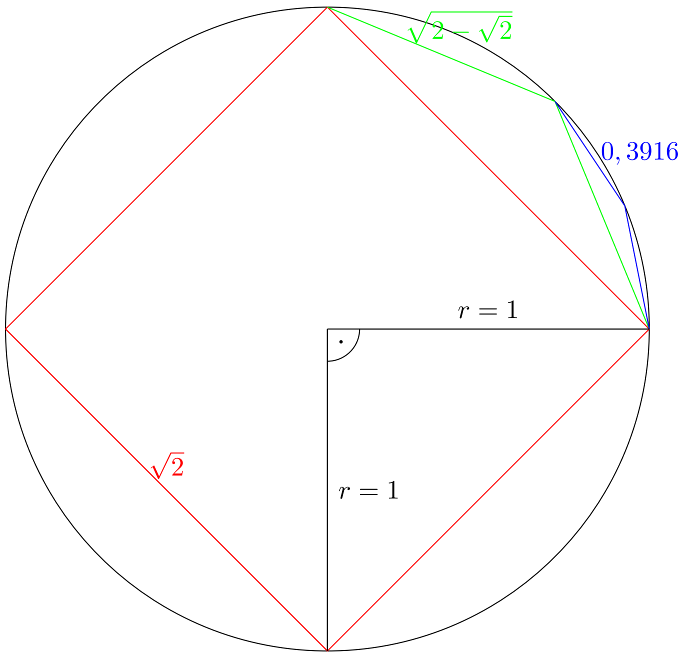
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.17) Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken.

3.7 Kreis

Ein Kreis zeichnet sich dadurch aus, dass er rund ist und der Abstand vom Mittelpunkt zum Kreis selbst immer gleich groß ist. Dieser Abstand wird Radius r genannt. Der doppelte Radius wird als Durchmesser $d = 2r$ bezeichnet.



Die Abbildung zeigt einen Kreis mit Radius r mit dem Mittelpunkt M. In der Geometrie sind grade die Größen des Flächeninhalts und des Umfangs interessant. Beide Werte sollen anhand eines Kreises mit Radius $r = 1$ ermittelt werden. Da wird zu nächst ein Quadrat in den Kreis gezeichnet, welches die Seitenlänge $a = \sqrt{2}$ besitzt. Dies wird offensichtlich durch die Verwendung des Satz des Pythagoras. Anschließend soll in der noch nicht vom roten Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck, welches grün sein soll, eingezeichnet werden, sodass alle Eckpunkte sich auf dem schwarzen Kreisbogen befinden. Anschließend wird wieder ein Dreieck, das blau sein soll, so eingezeichnet, dass es im noch nicht erschlossenen Raum liegt und dazu wieder alle Eckpunkte sich auf dem Kreisbogen befinden.



Die Abbildung zeigt genau dieses Verfahren. Wenn diese Prozedur oft genug wiederholt wurde, soll der Umfang des eckigen Körpers und auch der Flächeninhalt bestimmt werden. Dies wird nun im Weiteren schrittweise geschehen.

Um den Umfang zu bestimmen, werden jeweils die Schenkellängen der gleichschenkligen Dreiecke benötigt, welche dann mit der Anzahl der Ecken des jeweiligen resultierenden Vielecks multipliziert wird. (Die genaue Berechnung der jeweiligen Schenkellängen und auch der Höhen für den Flächeninhalt soll hier nicht genauer erläutert werden, dies kann jeder Schüler nach Bearbeitung des Kapitels „Trigonometrie“ selbst nachrechnen.)

$$\begin{aligned} U_{\text{rot},4} &= 4 \cdot \sqrt{2} = 5,6568 \\ U_{\text{grün},8} &= 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 6,1229 \\ U_{\text{blau},16} &= 16 \cdot 0.3916 = 6,2656 \\ \vdots &= \vdots \\ U_\infty &= 6,2832 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Beim Flächeninhalt A müssen noch über den Satz des Pythagoras die jeweiligen Höhen der Dreiecke bestimmt werden. Sie sind immer gegeben als die Wurzel aus der neuen Seitenlänge zum Quadrat subtrahiert mit der halben alten Seitenlänge zum Quadrat.

$$\begin{aligned} A_4 &= A_{\text{rot}} = 2 \\ A_8 &= A_{\text{rot}} + 4A_{\text{grün}} = 2,82843 \\ A_{16} &= A_8 + 8A_{\text{blau}} = 3,07216 \\ \vdots &= \vdots \\ A_\infty &= 3,14159 := \pi \end{aligned} \tag{3.23}$$

Der Flächeninhalt A_∞ eines regelmäßigen Unendlichecks - einem Kreis -, dessen Eckpunkte alle auf dem Kreisbogen mit dem Radius $r = 1$ liegen beträgt genau π. π ist eine irrationale Zahl[2] und wird auch Kreiszahl genannt. Mittels dieser Kreiszahl π lassen sich die Größen eines Kreises mit beliebigen Radius r darstellen.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ U &= 2\pi r \end{aligned} \tag{3.24}$$

Auch noch andere weitere Größen des Kreises lassen sich über π darstellen, dazu werden im nächsten Unterabschnitt Teile des Kreises berechnet und anschließend das Bogenmaß eingeführt.

3.7.1 Bogenmaß

Da der Kreis mit dem Radius $r = 1$, der sogenannte Einheitskreis, einen Umfang von $U = 2\pi$ besitzt, kann ein Zusammenhang zwischen Umfang und einen vollen Winkel 360° gesehen werden. Der Kreis steht symbolisch für einen vollen Winkel und dadurch kann die Beziehung

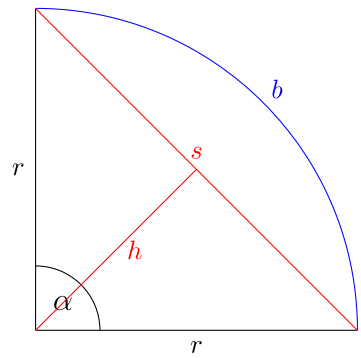
$$\begin{aligned} 2\pi\,\text{rad} &= 360^\circ \\ \Rightarrow 1^\circ &= \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \\ \Leftrightarrow 1\,\text{rad} &= \frac{180^\circ}{\pi} \end{aligned} \tag{3.25}$$

[2] irrationale Zahlen können nicht durch Brüche dargestellt werden: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

aufgestellt werden. Dabei ist rad die Einheit Radiant, welche für die Länge des jeweiligen Kreisbogen steht. Oftmals empfiehlt es sich in Radiant zu rechnen, da dies nicht selten die Gleichungen erheblich vereinfachen würde. Je nach dem, ob Grad oder Radiant als Einheit gewählt wurde, muss diese auch im Taschenrechner verändert werden, da sonst die Ergebnisse nicht der Realität entsprechen.

3.7.2 Kreisteile

Wie schon oben beschrieben, ist der Umfang des Kreises durch $U = 2\pi r$ und der Flächeninhalt durch $A = \pi r^2$ gegeben. Somit ergeben sich auch Teilgrößen wie der Kreisbogen b, der Kreisausschnitt und der Kreisabschnitt.



Die Abbildung zeigt einen Kreisauschnitt mit allen Unterteilungen für einen Kreisabschnitt sowie den Kreisbogen. Dabei ist der Kreisbogen b ein Bruchteil das Umfangs, der durch $2\pi r$ und 360° beschrieben wird. Somit ergibt sich, dass für einen Winkel α folgende Bogenlänge b ergibt:

$$b = \frac{2\pi r}{360}\alpha \quad . \tag{3.26}$$

Der Flächeninhalt des Kreisausschnittes, der durch die gesamte umrandete Fläche beschrieben wird, der anteilige Flächeninhalt eines ganzen Kreises:

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 = \frac{br}{2}\alpha \quad . \tag{3.27}$$

Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnittes ohne die des Dreiecks mit der Grundfläche s und der Höhe h, wird Kreisabschnitt genannt. Durch die Beschreibung wird klar wie der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes berechnet wird:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2} = \frac{br - sh}{2}\alpha \quad . \tag{3.28}$$

Mit diesen Teilgrößen des Kreises und dem Wissen über den ganzen Kreis, lassen sich nahezu alle Probleme berechnen.

Übungsaufgaben zu Kreisen

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreise.*

a) $r = 3cm$, b) $r = \pi cm$, c) $d = 4cm$,
d) $d = 0,5cm$, e) $r = 2,718cm$, f) $d = \frac{6}{7}cm$.

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisausschnitt.*

a) $\alpha = 60°$ und $r = 5cm$
b) $\alpha = 230°$ und $r = 2cm$
c) $\alpha = 177°$ und $r = \sqrt{17}cm$
d) $\alpha = 55°$ und $r = 3cm$
e) $\alpha = 145°$ und $r = 7cm$
f) $\alpha = 310°$ und $r = 2,5cm$

Aufgabe 3: *Zeichne die angegebenen Kreismuster.*

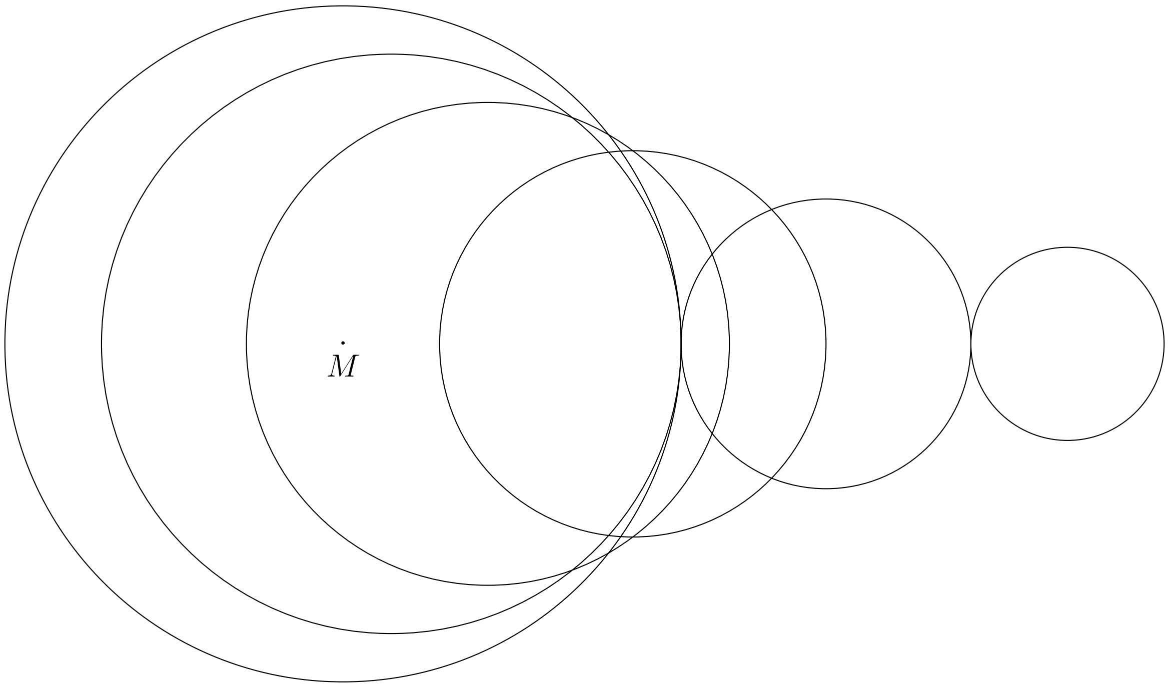
a) Alle Kreise mit geradem Radius sollen im Mittelpunkt M gezeichnet werden und alle mit ungeradem Radius im Mittelpunkt N. Dabei gilt, dass M $1cm$ links von N ist. Zeichne für folgende Radien: $r = \{2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm\}$.

b) Zeichne einen Kreis mit Radius $r = 7cm$ im Mittelpunkt M, zeichne danach einen Kreis der einen Radius von einem Zentimeter weniger hat und sich der Mittelpunkt $1cm$ weiter links befindet. Wiederhole dies bis du einen Kreis mit Radius $r = 2cm$ gezeichnet hast.

c) Wähle einen Punkt P auf deinem Blatt, zeichne dann jeweils einen Kreisbogen mit 116°, sodass die Strecke vom jeweiligen Kreisbogenmittelpunkt zum Punkt P hin den Kreisbogen halbieren würde, mit Radius $r = 4cm$ mit einem Abstand von $3cm$ nach links, rechts, oben und unten zu P.

d) Wähle einen Punkt P und gehe von ihm aus $\sqrt{50}cm$ diagonal nach links oben, rechts oben, links unten und rechts unten. Zeichne in diesen Punkten einen Viertelkreis, sodass die Linie zum Punkt P den Kreisbogen halbieren würde. Zeichne dann einen Kreis vom Punkt P aus, sodass dieser alle vier Viertelkreise berührt. Welchen Radius hat dieser innere Kreis?

Aufgabe 4: *Beschreibe das Schema der Zeichnung.*

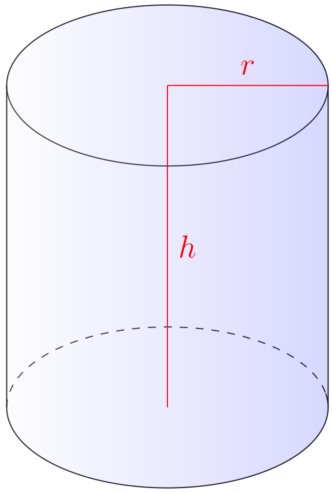


Aufgabe 5: *Zeichne einen Halbkreis und verbinde die Enden des Kreisbogens. Zeichne anschließend vier beliebige Dreiecke in diesen Halbkreis unter der Bedingung, dass die Enden des Halbkreis zwei Eckpunkte der Dreiecke sind und der letzte Eckpunkt des jeweiligen Dreiecks sich auf dem Kreisbogen befindet. Messe anschließend den Winkel der Dreiecke beim jeweiligen Eckpunkt, der auf dem Kreisbogen und nicht an den Enden des Kreisbogens ist. Was auffällt wird „Satz des Thales“ genannt.*

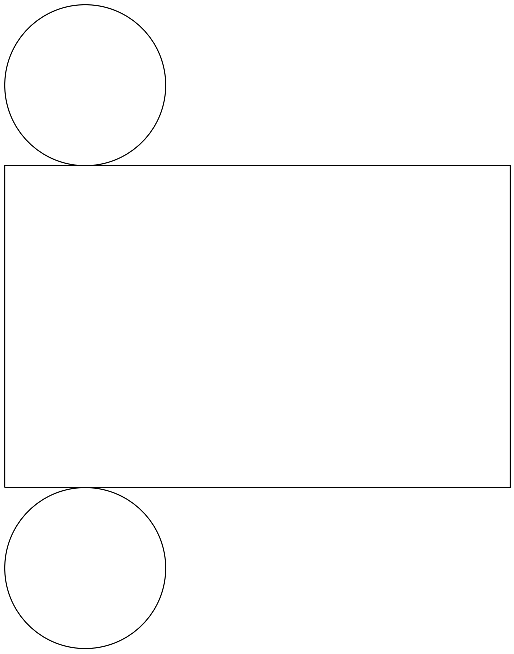
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.18) Lösungen zu Kreisen.

3.8 Zylinder und Kegel

Ein dreidimensionaler Körper, der einen Kreis als Grundfläche hat, welche gegenüberliegend mit einem Abstand einer Höhe h wieder vorzufinden ist, wird Zylinder genannt.



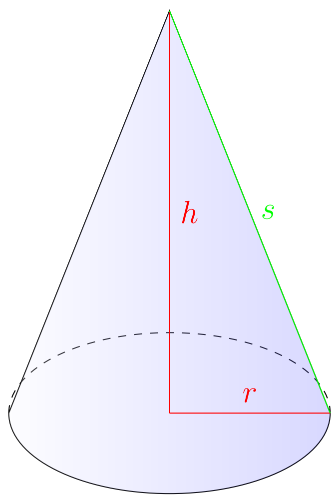
Die Abbildung zeigt, dass sich der Zylinder ähnlich wie das das Prisma behandeln lässt. Der einzige Unterschied ist dadurch gegeben, dass es sich um runde Grundflächen handelt und dass ein Zylinder nur zwei Kanten, drei Flächen und keinen Eckpunkt besitzt, wie das Netz offenbart:



Das Volumen V ist erneut gegeben durch „Grundfläche G mal Höhe h“ und am Netz aus der Abbildung ist erkennbar, dass die Oberfläche O sich aus zwei gleichen Kreisen und einem Rechteck mit den Seitenlängen $2\pi r$ und h zusammensetzt:

$$\begin{aligned} V &= Gh = \pi r^2 h \\ O &= 2 \cdot \pi r^2 + \pi r h \quad . \end{aligned} \tag{3.29}$$

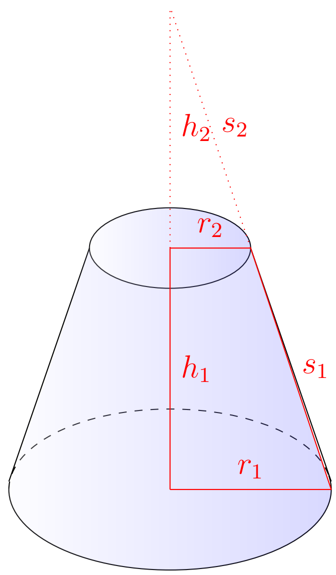
Sobald der Körper in der Höhe h wieder zu einem Punkt wieder zusammenläuft und dabei als Grundfläche einen Kreis besitzt, wird dieser Körper als Kegel bezeichnet.



Der Kegel ist im Vergleich zum Zylinder genauso zu handhaben wie die Pyramide im Vergleich zum Quader. Somit ergibt sich das Volumen des Kegels V als ein Drittel des Volumens eines Zylinders. Bei der Oberfläche ist dies nicht so trivial, denn ein Kreis als Grundfläche wird mit einem Kreisausschnitt addiert. Dabei hat der Kreisausschnitt den Radius s und eine Kreisbogenlänge $b = 2\pi r$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s) \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Falls ein Zylinder mit unterschiedlich großen Kreisen vorzufinden ist, wird im allgemeinen von einem Kegelstumpf gesprochen. Hierbei wurde lediglich ein Teil eines Kegels mit der Höhe $h = h_1 + h_2$ abgeschnitten.



Durch umstellen von Gleichungen ergibt sich das Volumen und die Oberfläche des Kegelstumpfes zu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}G_1 h_1 - \frac{1}{3}G_2 h_2 = \frac{1}{3}\pi h \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) \\ O &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi \left(r_1^2 + r_2^2 + s_1(r_1 + r_2)\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Generell bleibt noch anzumerken, dass die Mantelfläche M immer gegeben ist als die Oberfläche ohne Grundfläche.

Übungsaufgaben zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Zylinder.*

a) $r = 5cm$ und $h = 11cm$, b) $r = 47cm$ und $h = 85cm$
c) $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm$, d) $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm$
e) $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm$, f) $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm$

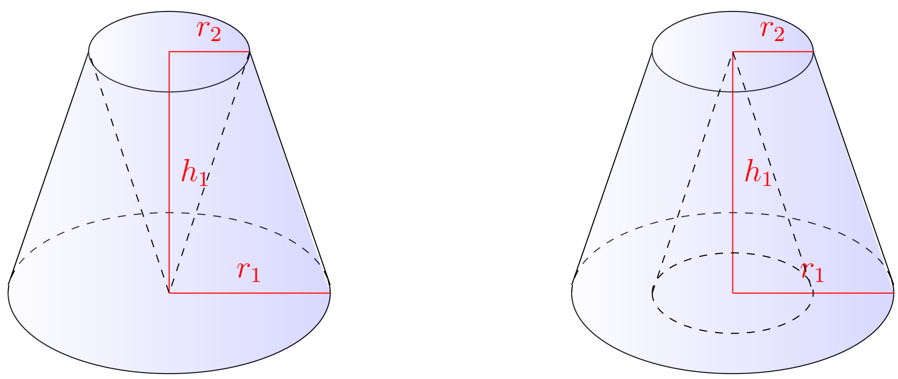
Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegel.*

a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm$, b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm$
c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm$, d) $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm$
e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm$, f) $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm$

Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegelstümpfe.*

a) $r_1 = 4cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm$, b) $r_1 = 3,5cm$, $r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm$,
c) $r_1 = 6cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm$, d) $r_1 = \frac{1}{3}cm$, $r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm$,
e) $r_1 = 1cm$, $r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm$, f) $r_1 = \pi cm$, $r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm$.

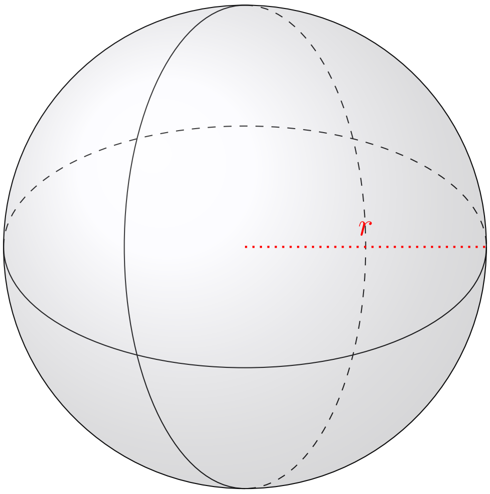
Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O der Körper. (Es handelt sich um einen Kegelstumpf mit $h_1 = h_2 = 4cm$ und $r_1 = 4cm$ aus dem ein Kegel der Höhe h_1 und Radius $r_2 = 2cm$ herausgeschnitten wurde.)*



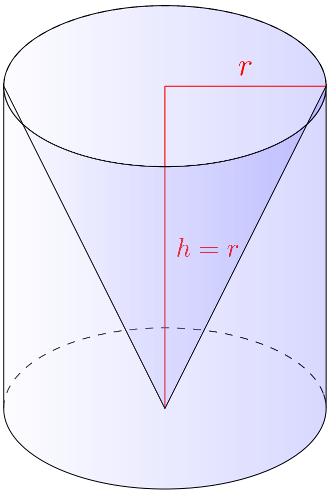
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.19) Lösungen zu Zylindern und Kegeln.

3.9 Kugeln

Ähnlich wie beim zweidimensionalen Kreis die Größen über ein Näherungsverfahren (ein iteratives Verfahren - also schrittweise) bestimmt wurden, kann auch das Volumen und die Oberfläche einer Kugel mit iterativen Methoden bestimmt werden. Dabei ist eine Kugel ein Objekt, dass von seinem Mittelpunkt ausgehend in drei Raumdimensionen immer den gleichen Abstand zu seiner Oberfläche besitzt.



Um das Volumen zu berechnen, wird der Satz von Cavalieri benutzt, welcher aussagt, dass Körper, die auf jeder Höhe den gleichen Flächeninhalt besitzen auch das gleiche Volumen haben müssen. Somit muss eine Halbkugel das gleiche Volumen haben wir ein Zylinder aus dem ein Kegel mit Radius r und Höhe $h = r$ herausgeschnitten wurde:



Da wie bereits anhand von Pyramiden und Quadern gezeigt, passen drei der Kegel aus der Abbildung in den Zylinder. Somit ist das Volumen einer Halbkugel gegeben als $\frac{2}{3}\pi r^3$ und folglich, dass einer Kugel durch:

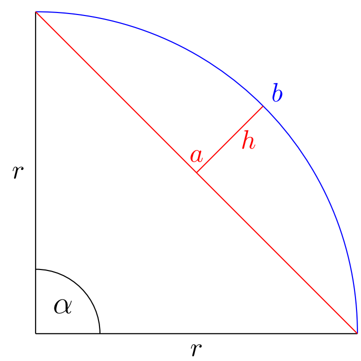
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3.32}$$

Während bei der Oberfläche wieder ein iteratives Verfahren verwendet werden kann, sodass

$$O = 4\pi r^2 \tag{3.33}$$

gefunden werden kann.

Wie auch schon beim Kreis gibt es bei der Kugel sogenannte Kugelabschnitte und Kugelausschnitte. Für den Kugelausschnitt gilt erneut, dass es sich um einen Bruchteil einer Kugel handelt.



Die Abbildung ist auf zwei Dimensionen reduziert, zeigt aber die wichtigen Größen für die Berechnung. So ergibt sich für den Kugelausschnitt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 (2h + a) \quad . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Beim Kugelabschnitt muss der Kegel mit dem Radius a vom Volumen subtrahiert werden. Ebenso muss dies bei der Oberfläche berücksichtigt werden, sodass die Grundfläche des Kegels hinzu addiert werden muss, während die Mantelfläche[3] wegfällt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) \\ O &= \pi \left(2rh + a^2\right) = \pi \left(4rh - h^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Da nun alle wichtigen geometrischen Körper und Größen eingeführt wurden, können diese nun auch alle vollständig berechnet werden. Um noch den Zusammenhang zwischen den Winkeln und den Seitenlängen eines Körpers in Verbindung zu bringen, wird im nachfolgenden Kapitel das Verständnis für geometrische Probleme weiter vertieft.

[3]Die Mantelfläche ist die Oberfläche ohne Grundfläche.

Übungsaufgaben zu Kugeln

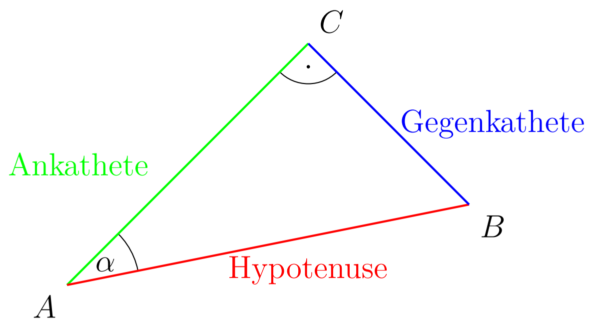
Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugeln.*

a) $r = 3cm$, b) $r = \pi cm$, c) $d = 4cm$,
d) $d = 0,5cm$, e) $r = 2,718cm$, f) $d = \frac{6}{7}cm$.

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.20) Lösungen zu Kreisen.

4 Trigonometrie

Die Trigonometrie beschreibt den Zusammenhang von Winkeln mit Seitenlängen von geometrischen Objekten. Dazu wird sich in erster Linie auf das rechtwinklige Dreieck konzentriert, da jede Fläche außer kreisartige Objekte durch rechtwinklige Dreiecke darstellbar sind. Dabei wird ein rechtwinkliges Dreieck betrachtet mit einem Winkel α.



Wie die Abbildung zeigt, werden dann die Seiten im Bezug auf den Winkel α benannt. Dabei ist die Ankathete immer die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, welche sich am zu untersuchenden Winkel befindet. Nun wird ein Verhältnis aufgestellt, definiert und mit einem Namen versehen:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } \alpha = \sin(\alpha) = \sin\alpha \tag{4.1}$$

Dabei kann auch der Winkel β um den Eckpunkt B über dieses Verhältnis bestimmt werden, da wegen der Winkelsumme es Dreiecks bei einem rechtwinkligen Dreieck die Winkeleziehung $90° - \alpha = \beta$ gilt. Somit muss auch die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } 90° + \beta = \sin(90° + \beta) \tag{4.2}$$

Allerdings wäre dann die Gegenkathete von α die Ankathete von β, sodass eine neue Definition getroffen werden kann:

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Kosinus vom Winkel } \alpha = \cos(\alpha) = \cos\alpha \ , \tag{4.3}$$

wobei $\sin(90° + \delta) = \cos(\delta)$ gilt. Dies bedeutet, dass der Kosinus nur eine bequeme abkürzende Schreibweise und nichts weiter als ein Sinus ist, der um $90°$ verschoben wurde. Allerdings zeigt sich, dass sich diese Abkürzung lohnt, vor allem wenn der Sinus und der Kosinus genauer untersucht werden, was im Kapitel „Funktionen“ und auch „Differentation und Integration“ geschieht.

Wenn nun Sinus und Kosinus in ein Verhältnis gesetzt werden, ergeben sich weitere Abkürzungen, welche sich lohnen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} : \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} \\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Ankathete}} \\ &:= \text{Tangens vom Winkel } \alpha = \tan(\alpha) = \tan\alpha \quad ,\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei durch die Umkehrung des Verhältnisses der Kotangens zu definieren ist:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} := \cot(\alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad . \tag{4.5}$$

Mit diesen Definitionen kann mit Hilfe eines Winkels und einer Seitenlänge alles in einem rechtwinkligen Dreieck berechnet werden. Da die Hypotenuse immer größer sein muss als die Ankathete ist der Sinus und somit auch der Kosinus bei der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks zwischen den Zahlen 1 und 0 stets vorzufinden. Das wiederum bedeutet, dass die Werte vom Tangens und Kotangens bei der geometrischen Betrachtung eines rechtwinkligen Dreiecks zwischen 0 und ∞ liegen können.

Um einen Winkel mit diesen trigonometrischen Funktionen aus zwei Seitenlängen bestimmen zu können, muss auch die Umkehrung dieser Funktion eingeführt werden, welche in diesem Abschnitt gegeben sei als:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \\ \alpha &= \cot^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei diese Funktionen Arcussinus, Arcuskosinus, Arcustangens und Arcuskotangens genannt werden. Für sie gilt für die Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{a}{c} \qquad |\arcsin \\ \arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \quad .\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mehr Details zu diesen Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen werden im Abschnitt „Umkehrfunktionen“ und „Trigonometrische Funktionen“ zu finden sein. Es genügt zu diesem Zeitpunkt das Wissen, dass Arcus-Funktionen die trigonometrischen Funktionen aufheben und wo sie auf dem Taschenrechner zu finden sind.

Übungsaufgaben zur Trigonometrie

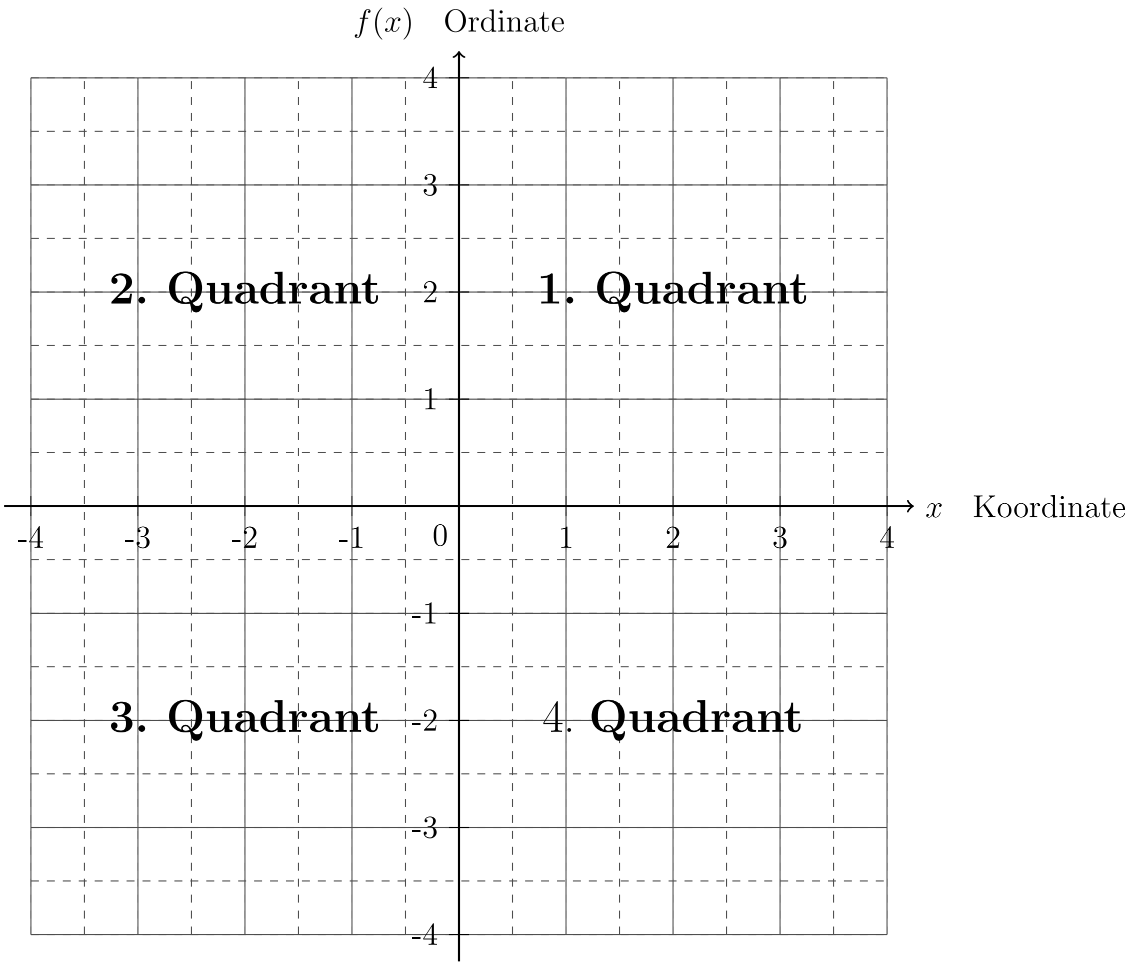
Aufgabe 1: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen rechtwinkligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 7cm$ und $c = 11cm$
b) $a = 4cm$ und $b = 6cm$
c) $\alpha = 55°$ und $c = 9cm$
d) $a = 5,35cm$ und $\beta = 18°$
e) $b = 14cm$ und $\beta = 81°$
f) $a = \pi cm$ und $\alpha = 27,18°$
g) $c = \sqrt{60}cm$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi\text{rad}$
h) $c = \frac{83}{17}cm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\text{rad}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.21) Lösungen zur Trigonometrie.

5 Funktionen

Um Funktionen verstehen zu können, müssen zunächst Begrifflichkeiten des sogenannten Koordinatensystems besprochen und verinnerlicht werden. Ein Koordinatensystem in zwei Dimensionen ist ein Zahlenstrahl mit den sogenannten Variablenwerten x und einem darauf orthogonalen Zahlenstrahl, der den Variablenzahlenstrahl bei Null schneidet und auf dem die sogenannten Funktionswerte $f(x)$ aufgetragen sind. Dabei wird $f(x)$ gelesen als „f von x“. Der Variablenzahlenstrahl wird Koordinate genannt (oftmals auch x-Achse, was zu Verwirrungen führen kann, wenn die Variable einen anderen Namen als x hat), während der darauf orthogonale Zahlenstrahl Ordinate genannt wird. Ein Koordinatensystem ist somit in vier Bereiche aufgeteilt, welche Quadranten genannt werden. Die Reihenfolge der Benennung wird offensichtlicher nach der Besprechung einiger Funktionen.



Ein Koordinatensystem stellt also eine zweidimensionale Fläche dar, welche keine Umrandung besitzt - eine sogenannte Ebene.

Eine Funktion ist dabei eine Vorschrift, die fordert, dass für eine Variable ein Wert in eine Gleichung eingesetzt wird. Der resultierende Wert wird dann Funktionswert genannt. Somit entsteht immer ein Wertepaar, welches dann im Koordinatensystem eingesetzt wird. Mathematische würde dies so formuliert werden: Eine Funktion f bildet Zahlen x einer Zahlenmenge auf eine andere Zahlenmenge ab. Dabei darf für jeden Wert von x nur ein abgebildeter Wert existieren. Diese Forderung wird Eindeutigkeit genannt.

$$f : x \mapsto f(x) \tag{5.1}$$

Ein Beispiel für eine solche Funktion wäre:

$$f(x) = 2x \tag{5.2}$$

Dabei wird das Doppelte der in die Variable x eingesetzten Zahl auf den Funktionswert $f(x)$ abgebildet.

Wie bereits schon aus den vorherigen Kapiteln bekannt ist, sind nicht alle Rechenoperationen zulässig, wie zum Beispiel die Division durch Null oder noch nicht zulässig, wie die Wurzel einer negativen Zahl. Deswegen besitzt jede Funktion einen sogenannten Definitionsbereich, welche Zahlen in eine Funktion eingesetzt werden können und durch die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ beschrieben wird. Bei einer Abbildung des Variablenwertes auf einen Funktionswert, sind auch nicht alle Bereiche auf der Ordinate betroffen. Alle möglichen Zahlen des Funktionswertes, werden in der Wertemenge $\mathbb{W}$ beschrieben. Für das Beispiel auf Gleichung (5.2) wäre die Definitions- und Wertemenge gegeben als:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Anzumerken bleibt, dass nicht jede Funktion mit dem Buchstaben f und nicht jede Variable mit x betitelt sein muss, so gilt zum Beispiel in der Physik die Strecke x als Funktion der Zeit t, also $x(t)$. Im Allgemeinen können alle Reaktionen auf etwas in Variablen- und Funktionswert übersetzt werden, sodass bei genügend Informationen daraus die Funktion ersichtlich wird. Mit dieser Funktion ist es möglich die Zukunft auszurechnen, wie zum Beispiel bei der physikalischen Funktion $x(t) = vt$, wobei v eine konstante Geschwindigkeit ist. Somit kann vorherbestimmt werden, welche Strecke x nach einer beliebigen Zeit t für die Geschwindigkeit v zurückgelegt wurde. Dies ist auch bei wesentlich komplexeren Zusammenhängen möglich, sodass gilt, dass alles berechnet werden kann. Jedoch müssen immer Vereinfachungen angenommen werden, da die Gleichungen sonst zu unübersichtlich und nicht mal von Hochleistungscomputern in annehmbarer Zeit berechnet werden können. Wie solche Methoden im Detail funktionieren, wird im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Physikalische Anwendungen“ skizziert.

Nachdem die Grundbegrifflichkeiten einer Funktion erläutert wurden, soll das Arbeiten mit Funktionen erschlossen werden.

5.1 Wertetabellen und Punkte

Um Funktionen zeichnen und dann später ihre Form ausnutzen zu können, bedarf es sogenannter Wertetabellen. Dabei werden verschiedene Werte für die Variable x eingesetzt und dann verrechnet. Der resultierende Funktionswert $f(x)$ wird dann so notiert, dass der Zusammenhang zwischen der eingesetzten Zahl für die Variable und dem Funktionswert erkennbar wird.

An zwei Beispielen soll das Prinzip der Wertetabelle erläutert werden - hierbei kann die Spalte mit „Rechnung“ und „Punkte“ beim Erstellen einer Wertetabelle weggelassen werden, welche hier lediglich für die Erklärung dient:

- Die erste Funktion die untersucht wird, sei die folgende:

$$f(x) = 2x + 1 \tag{5.4}$$

  Für die Variable werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der Funktionswert dann berechnet.

Punkte	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
x	-2	-1	0	1	2	3
Rechnung	$2\cdot(-2)+1$	$2\cdot(-1)+1$	$2\cdot 0+1$	$2\cdot 1+1$	$2\cdot 2+1$	$2\cdot 3+1$
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

- Die zweite Funktion die untersucht wird, sei die folgende:

$$g(x) = x^2 - 1 \tag{5.5}$$

  Für die Variable werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der Funktionswert dann berechnet.

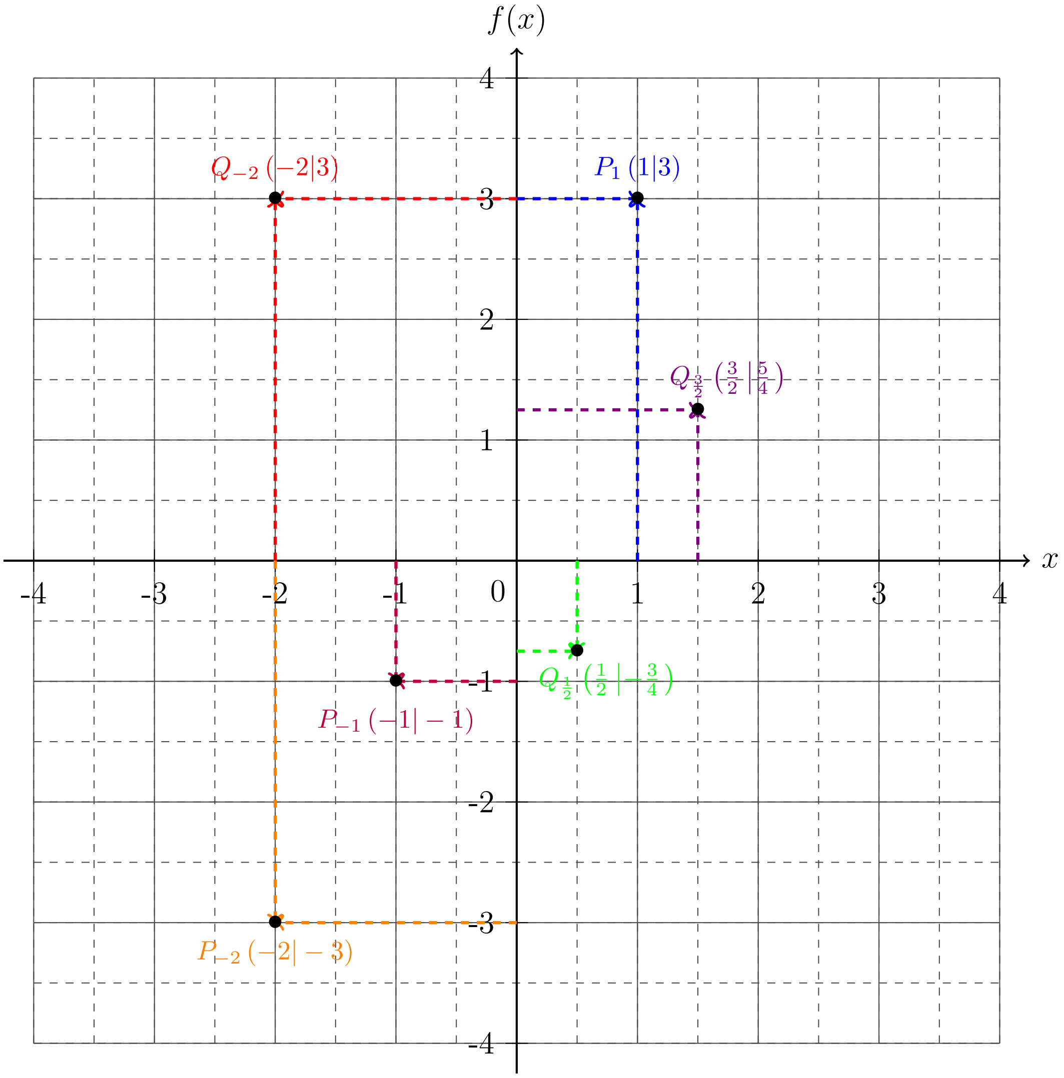
Punkte	Q_{-2}	Q_{-1}	Q_0	$Q_{\frac{1}{2}}$	Q_1	$Q_{\frac{3}{2}}$	Q_2
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Rechnung	$(-2)^2-1$	$(-1)^2-1$	0^2-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$	1^2-1	$\left(\frac{3}{2}\right)^2-1$	2^2-1
$g(x)$	3	0	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Die Wertetabellen zeigen, dass immer für die Variable x die entsprechende Zahl eingesetzt wurde. Dabei sind diese Zahlen frei zu wählen.

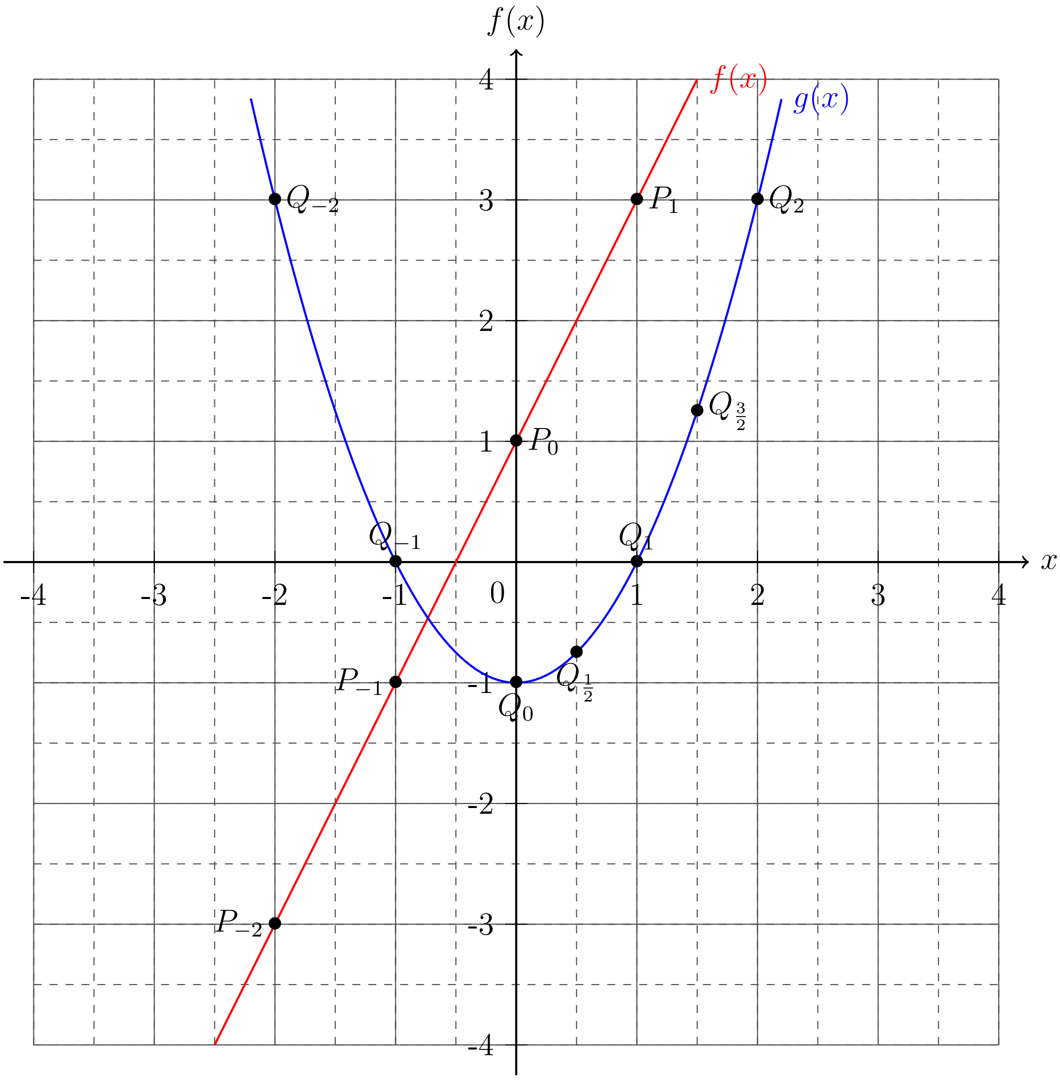
Die jeweiligen Variablen- und Funktionswerte bilden Paare, welche auch Wertepaare genannt werden. Diese symbolisieren einen Punkt im Koordinatensystem. Dabei wird bei einem Punkt P immer zu erst der Variablenwert x und anschließend der Funktionswert $f(x)$ genannt

$$P\left(x|f(x)\right) \quad . \tag{5.6}$$

Diese Punkte geben an, wie viele Schritte (den Variablenwert) auf der Koordinate zurückgelegt werden müssen, um dann anschließend die Anzahl der Schritte des Funktionswertes auf der Ordinate zu gehen. Im folgenden Koordinatensystem sind einige Punkte aus den beiden Wertetabellenbeispielen nach diesem Schema eingezeichnet.



Die Punkte der jeweiligen Wertetabellen können verbunden werden, sodass sich das Muster der Punkte zeigt. Dieses Muster wird Graph der Funktion genannt und bietet Aufschluss zu den Eigenschaften der Funktion.



Das Ziel einer Wertetabelle ist es den Graphen einer Funktion zeichnen zu können, um daraus und der Struktur der Funktion den Werte- und Definitionsbereich sowie weitere Eigenschaften bestimmen zu können. Im Kapitel „Differentiation und Integration“ wird auf dieses zeichnerische Element vollständig verzichtet, sodass alle Informationen einer Funktion errechnet werden können. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden spezielle Arten von Funktionen analysiert.

Übungsaufgaben zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1: *Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.*

$A\,(1\,|6\,)$ $B\,(-2\,|4\,)$ $C\,(6\,|0\,)$ $D\,(-7,5\,|-1\,)$
$E\,\left(\frac{1}{2}\,|3\right)$ $F\,\left(-\frac{7}{4}\,|-6,25\right)$ $G\,(8\,|-8\,)$ $H\,\left(\sqrt{6,25}\,\middle|-\frac{3}{4}\right)$
$I\,(7,25\,|-6,75\,)$ $J\,\left(-4\,\middle|-\frac{33}{4}\right)$ $K\,\left(-5\,\middle|\sqrt{2}\right)$ $L\,(2\,|-2^3\,)$
$M\,(289^0\,|\ln e^{1,5}\,)$ $N\,\left(-3!\,\middle|\frac{5!}{4!}\right)$ $O\left(-\sqrt[4]{81}\,\middle|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$ $P\,(\pi\,|e\,)$

Aufgabe 2: *Berechne die angegebenen Wertetabellen für die jeweiligen Funktionen.*

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$							

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$							

a) $f(x) = -2x + 3$
b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$
c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$
d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

Aufgabe 3: *Zeichne die Funktionen und bestimme die Definitions- und Wertebereiche.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$
b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$
c) $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$
d) $l(x) = -x^2 + 3x - 2$
e) $k(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$
f) $m(x) = -4x^{-1}$

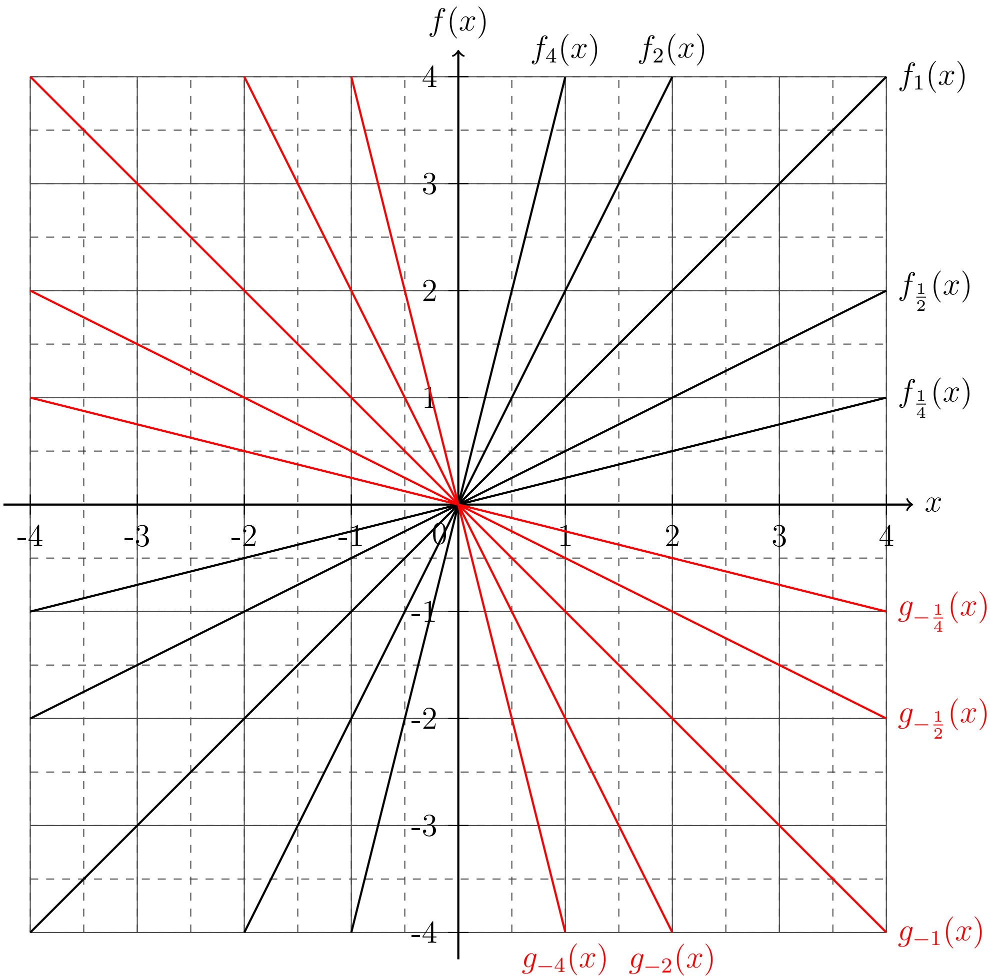
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.22) Lösungen zu Wertetabellen und Punkte.

5.2 Geraden

Geraden sind die simpelsten Funktionen. Sie sind definiert durch die allgemeine Geradenfunktionsgleichung:

$$f(x) = mx + b \ , \tag{5.7}$$

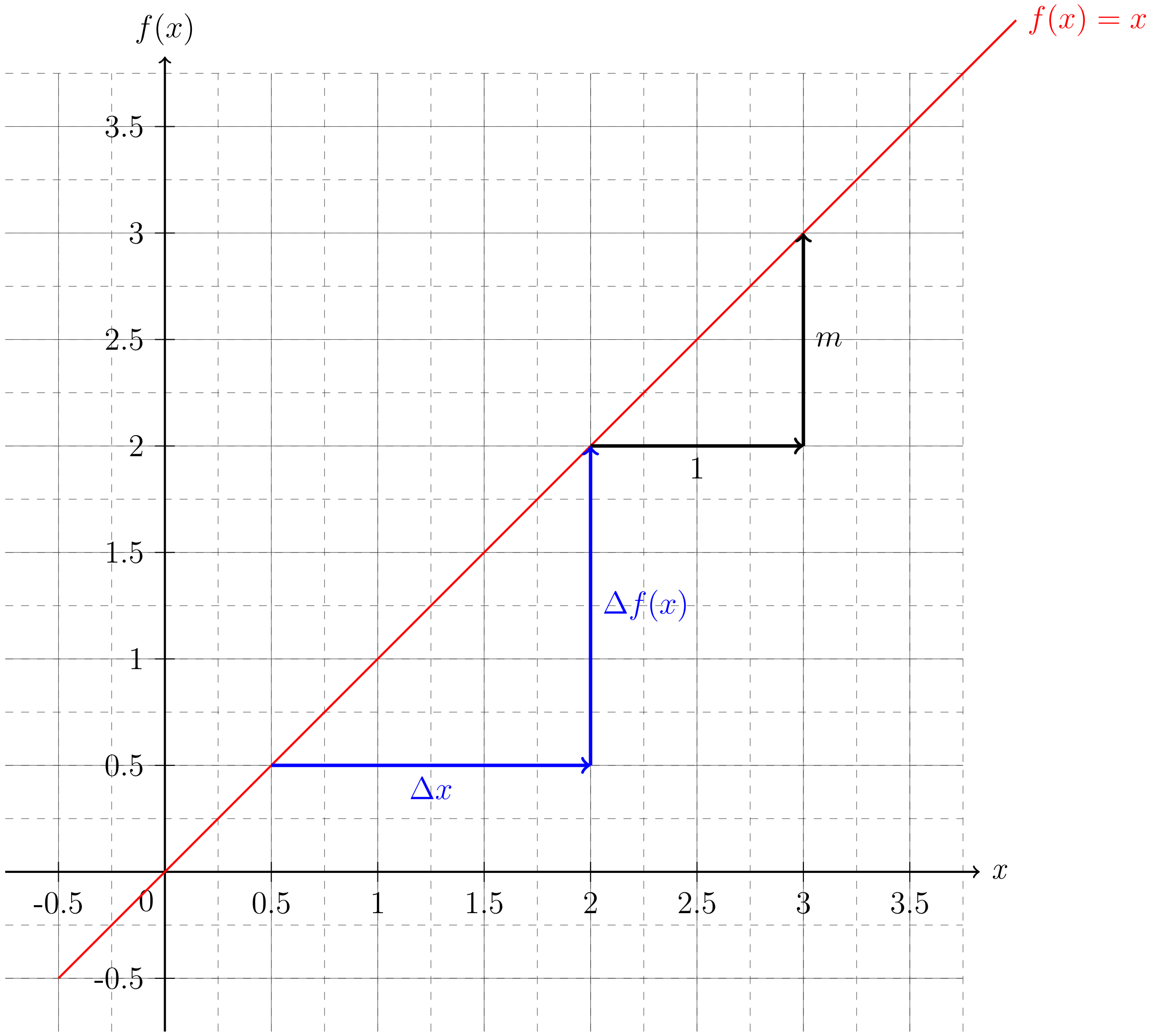
wobei x die Variable der Funktion $f(x)$ ist und m und b Parameter sind. Eine Gerade ist eine lineare Funktion, oder auch eine Funktion erster Ordnung, da der Term mit der höchsten Potenz als mx^1 gegeben ist. Da eine Funktion immer einen Parameter mehr besitzt als die Zahl ihrer Ordnung, werden für eine Funktion erster Ordnung zwei Informationen benötigt, um alle Eigenschaften der Funktion bestimmen und den Graphen zeichnen zu können. Diese Informationen können Punkte sein oder Angaben der Parameter m und b. Zu nächst wird sich auf die Bedeutung der Parameter beschränkt. Dazu werden für m verschiedene Geraden gezeichnet unter der Bedingung, dass $b = 0$ ist, wobei für positive Werte von m die Funktion f und für negative Werte g genannt wird.



Die Abbildung zeigt deutlich, dass die Geraden mit positiven Werten von m von links unten nach rechts oben gehen und je höher der Wert ist, desto stärker ist die Steigung der Geraden. Für negative Werte von m sinken die Geraden von links oben nach rechts unten. Auch hier nimmt die Steigung zu je größer der Betrag von m wird. Somit kann festgehalten werden, dass

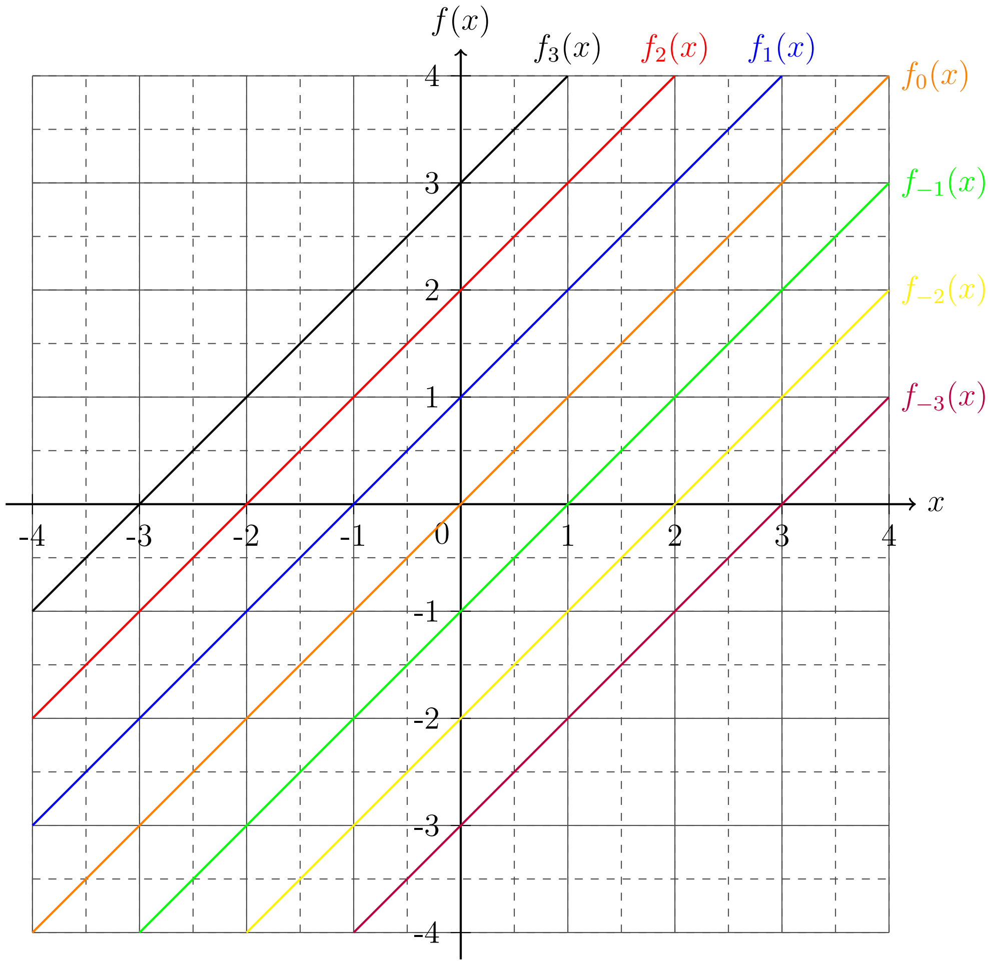
m die Steigung der Geraden symbolisiert.

Die Steigung einer Geraden kann auch gemessen werden. Dabei wird auf der Koordinate einen Einheitenschritt nach rechts gegangen und dann orthogonal dazu wieder zur Funktion parallel zur Ordinate. Die Strecke die parallel zur Ordinate ist, ist der Wert des Steigungsparameters m.



Dies nennt man das Steigungsdreieck, dabei können auch mehrer Schritte entlang der Koordinate zurückgelegt werden, sodass im Allgemeinen $m = \frac{\text{Ordinatenschritte}}{\text{Koordinatenschritte}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, wobei Δx die Differenz zwischen zwei Werten von x also $\Delta x = x_2 - x_1$ für $x_2 > x_1$ und $\Delta f(x)$ die Differenz zwischen zwei Werten von $f(x)$ folglich $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ beschreibt.

Im nächsten Fall soll die Steigung m auf 1 festgelegt werden und der Parameter b variiert werden. Dabei wandern die Werte von b von -3 bis 3.



Im Koordinatensystem ist deutlich zu erkennen, dass der Wert von b mit dem Wert der Ordinate übereinstimmt, wenn sich Ordinate und die Gerade treffen, somit wird b auch der Ordinatenschnittwert oder Offset der Funktion genannt.

Da die Parameter diskutiert wurden, wird nun das Verfahren beschrieben wie aus zwei Punkten diese Parameter berechnet werden können. Dazu seien die beiden Punkte zum Beispiel: $P(-1|-4)$ und $Q(2|3)$. Diese Punkte werden in die allgemeine Geradengleichung eingesetzt

$$\begin{aligned} P: \qquad -4 &= m \cdot (-1) + b \\ Q: \qquad 3 &= m \cdot 2 + b \end{aligned} \tag{5.8}$$

und dann eine der beiden Gleichungen nach einem unbekannten Parameter aufgelöst.

$$P: \qquad m - 4 = b \tag{5.9}$$

Diese Gleichung für den Parameter b wird nun in die zweite Gleichung eingesetzt und anschließend nach m aufgelöst:

$$\begin{aligned} P \text{ in } Q: \qquad 3 &= 2m + (m-4) \\ 3 &= 3m - 4 \qquad |+4 \\ 7 &= 3m \qquad |:3 \\ \frac{7}{3} &= m \qquad . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Der berechnete Wert für m wird dann wieder in die Gleichung (5.9) eingesetzt um b zu bestimmen:

$$\begin{aligned} P \text{ mit } m: \qquad \frac{7}{3} - 4 &= b \\ -\frac{5}{3} &= b \quad . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Somit ergibt sich Geradengleichung mit den Werten von m und b zu:

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Mittels dieses Verfahrens ist nun die Geradenfunktionsgleichung berechnet. Auch für komplexere Funktionen kann genau dieses Verfahren angewendet werden, allerdings erhöht sich die Anzahl der Parameter und der Gleichungen, sodass es eher zu einer Übersichtsaufgabe wird. Wenn die Steigung einer Geraden gleich Null (m=0) ist, dann wird von einer Konstanten gesprochen.

Aber auch noch ein anderer Wert ist interessant, nämlich der Variablenwert für den Schnittpunkt mit der Koordinate. Dieser Wert wird Nullstelle genannt und kann berechnet werden, indem man den Funktionswert $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ setzt, da der Ordinatenwert beim schneiden der Koordinate Null ist. Somit folgt eine kurze Äquivalenzumformung nach x und die Nullstelle x_N ist berechnet:

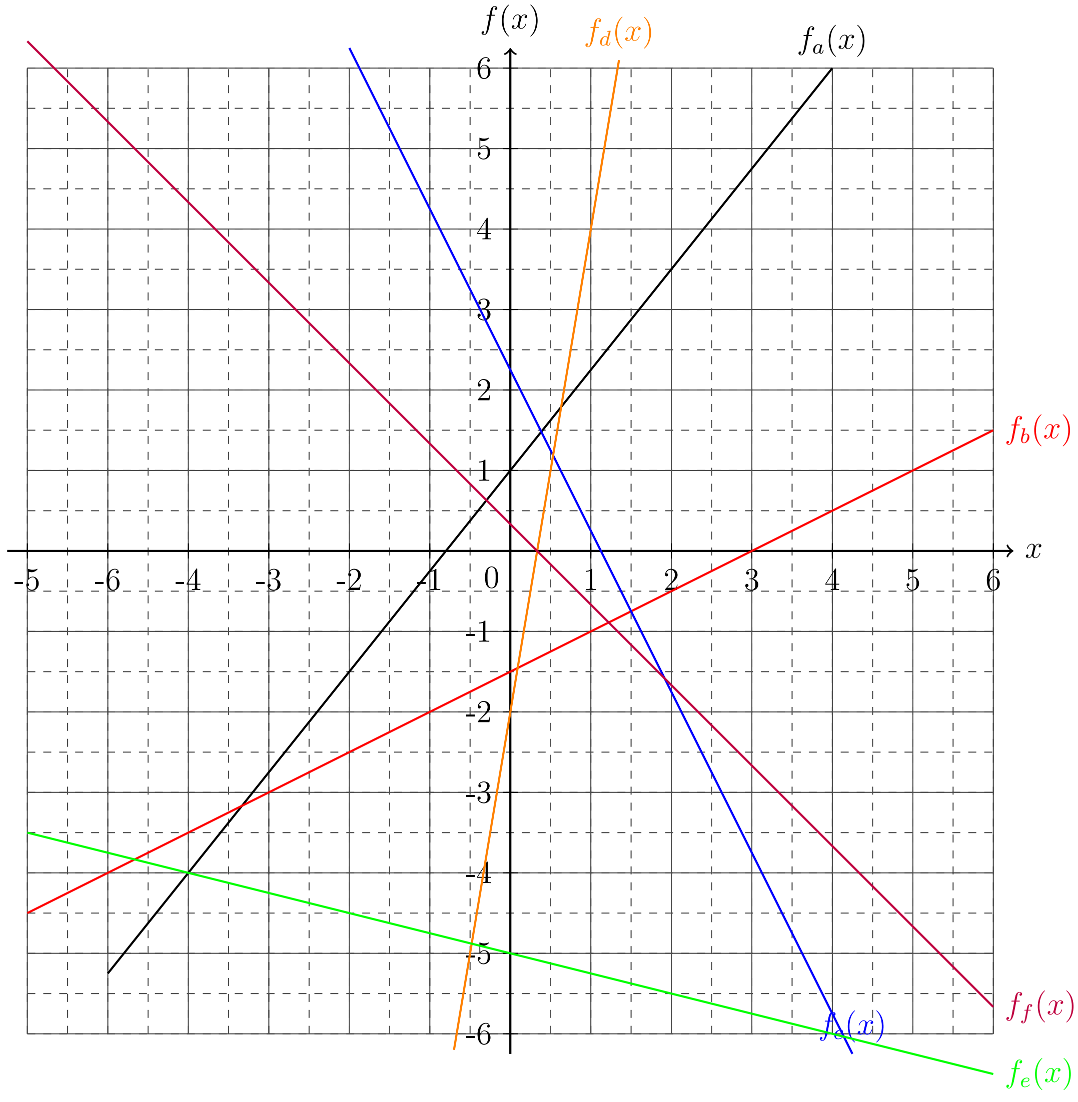
$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} 0 &= mx + b \\ \Rightarrow -\frac{b}{m} &= x_N \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Übungsaufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: *Bestimme aus den gegebenen Punkte die Geradenfunktionsgleichung, bestimme anschließend die Nullstelle und zeichne den Graphen.*

a) $P_a\,(-2\,|-2)$ und $Q_a\,(0\,|4)$
b) $P_b\,\left(\frac{1}{2}\,|1\right)$ und $Q_b\,(-1\,|-4)$
c) $P_c\,(-4\,|2)$ und $Q_c\,(4\,|5)$
d) $P_d\,(-3\,|-5)$ und $Q_d\,(5\,|2)$
e) $P_e\,\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$ und $Q_e\,\left(-\frac{1}{6}\,|-3\right)$
f) $P_f\,\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\sqrt{3}\right)$ und $Q_f\,(e\,|\pi)$

Aufgabe 1: *Bestimme den Steigungsparameter m und den Ordinatenschnittwert aus den dargestellten Graphen. Gibt die Geradenfunktionsgleichung an.*



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.23) Lösungen zu Geraden.

5.3 Parabeln

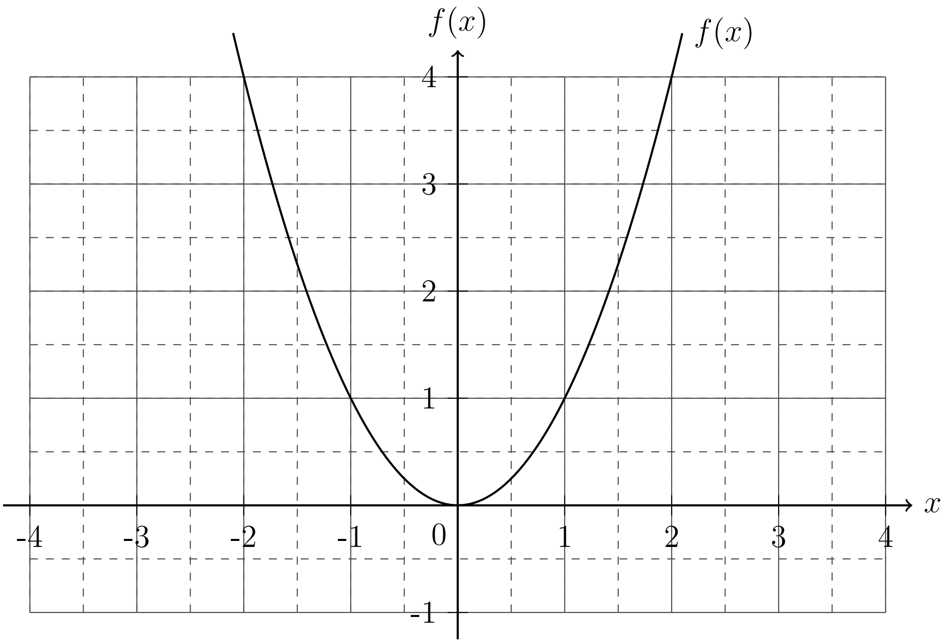
Nach den Geraden sind die Parabeln die nächst komplexere Form der Funktionen. Parabeln sind Funktionen zweiter Ordnung und werden auch quadratische Funktionen genannt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{5.14}$$

Wie die Gleichung (**??**) zeigt, besitzt eine Parabel drei Parameter. Diese Darstellung der Parabel wird auch Parameterdarstellung genannt. Da die quadratische Ergänzung schon eingeführt wurde, kann dieser Gleichung auch so umgeformt werden, dass sich eine binomische Formel offenbart (dabei wurden die Parameter umdefiniert):

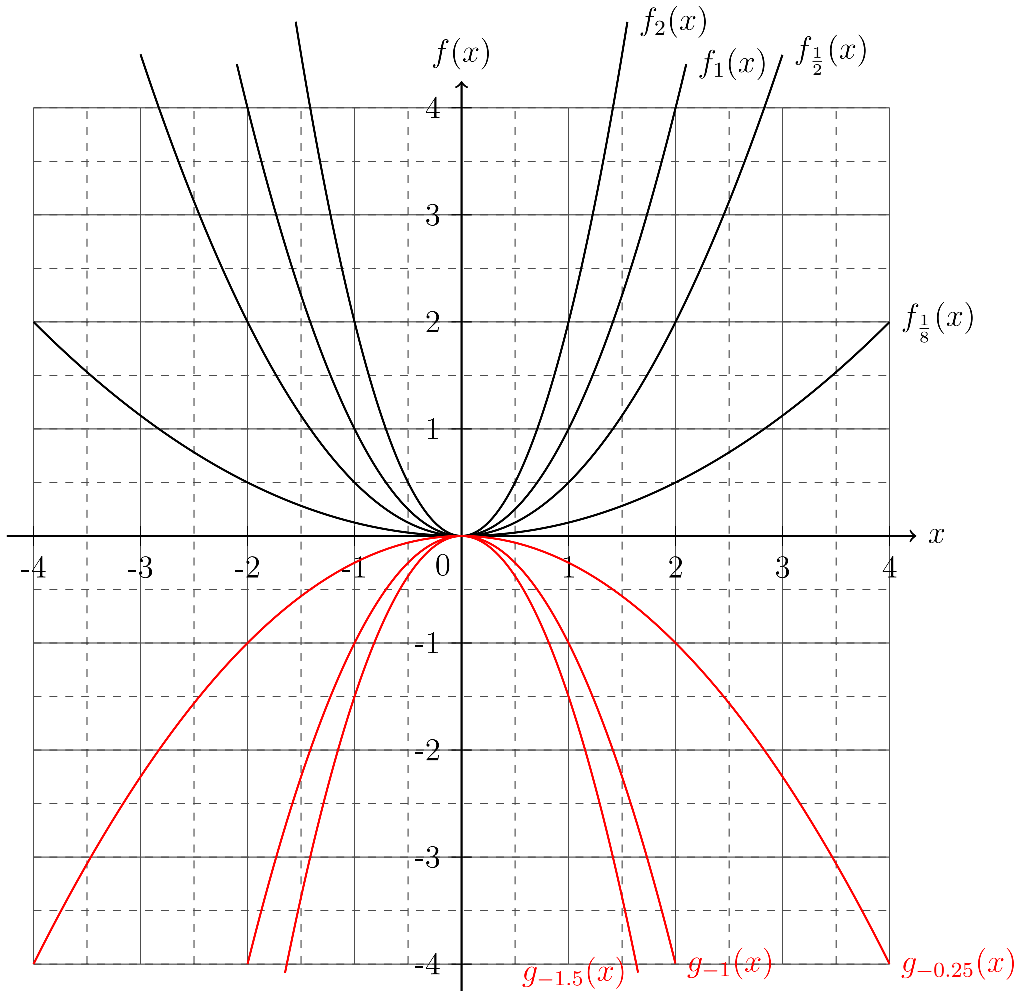
$$f(x) = \alpha(x-d)^2 + e \quad . \tag{5.15}$$

Diese Darstellung der Parabel wird Scheitelpunktsform genannt. Durch das Auflösen der binomischen Formel und einer Vereinfachung kann die Gleichung (5.15) auf die die Gleichung (**??**) gebracht werden. Anhand der Scheitelpunktsform werden im Folgenden die Eigenschaften der Parabel erläutert. Sei zu erst $\alpha = 1$, $d = 0$ und $e = 0$.



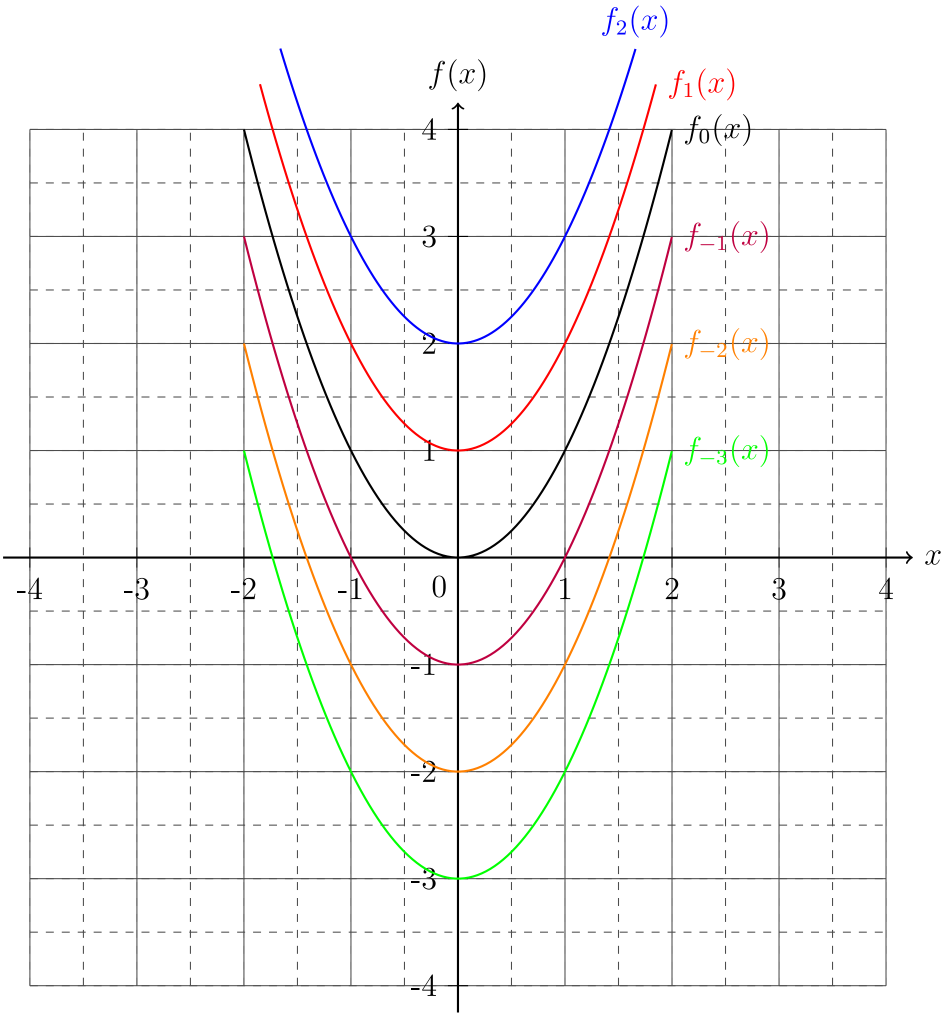
Aus dem Graphen wird ersichtlich, dass die Parabel achsensymmetrisch ist, da sie an der Ordinate gespiegelt wieder sich selbst ergibt. Auch zu erkennen ist, dass die Funktionswerte der vereinfachten Parabel $f(x) = x^2$ immer stärker zunehmen je weiter ein Variablenwert x vom Koordinatenursprung $x = 0$ entfernt ist. Außerdem sind alle Funktionswerte positiv, da das Quadrat das Vorzeichen aufhebt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Punkt an dem sich die Richtung der Funktion umdreht. Hier wäre es das Minimum der Funktion im Punkt $S(0|0)$.

Sei nun im folgenden Koordinatensystem $d = 0$ und $e = 0$, während α variiert wird. Dabei soll wieder gelten, dass die Funktion für positive Werte von α den Namen f und für negative Werte den Namen g trägt.



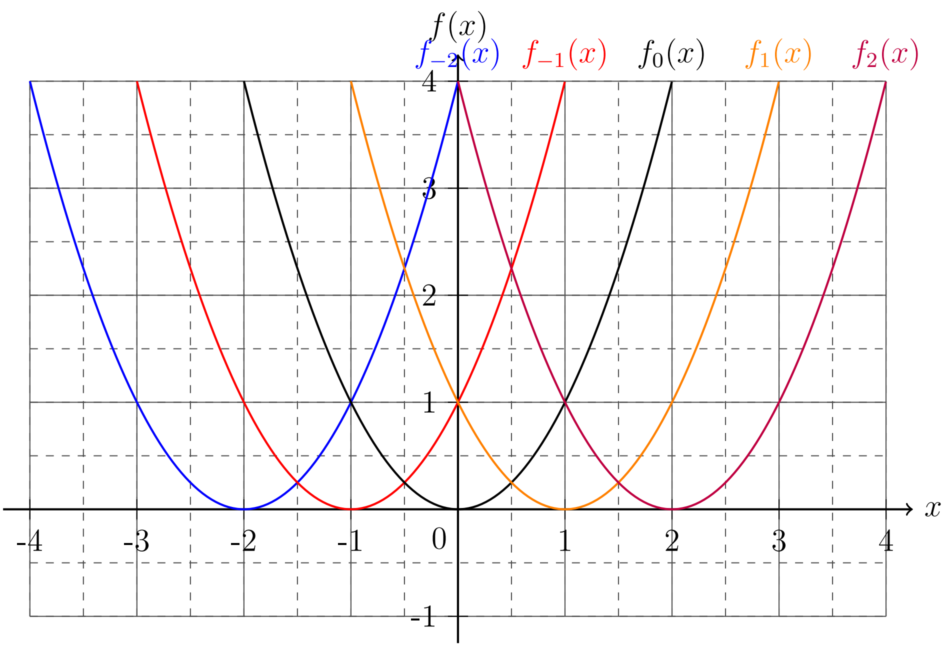
Die Graphen für verschiedene Werte von α zeigen deutlich, dass die Parabeln für Werte unter 1 gestreckt und für über 1 gestaucht sind. Aus diesem Grund heißt α auch Stauchungsparameter. Der Wert von α kann abgelesen werden, indem das Verhältnis $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bestimmt wird, wobei $\Delta x = 1$ gewählt und vom Scheitelpunkt aus parallel zur Koordinate gegangen werden sollte. Der Wert des Verhältnisses ist gleichzusetzen mit α. Des Weiteren fällt auf, dass die Parabel für positive α nach oben und für negative α nach unten geöffnet ist. Folglich entscheidet das Vorzeichen des Stauchungsparameters über die Öffnung der Parabel.

Nun soll der Parameter e variiert werden, dazu wird der Stauchungsparameter $\alpha = 1$ und $d = 0$ gewählt.



Die Graphen zeigen, dass e den Offset des Scheitelpunkts in Ordinatenrichtung.

Zu Letzt soll d variiert werden, dafür wird der Stauchungsparameter α und der Offset des Scheitelpunkts in Ordinatenrichtung $e = 0$ gewählt.



Durch die Graphen wird deutlich, dass der Parameter d den Versatz des Scheitelpunktes der Parabel auf der Koordinate beschreibt.
Aus dieser Darstellung der Parabel wird deutlich, welche Macht die quadratische Ergänzung innewohnt, da aus einer Parameterdarstellung schnell eine Scheitelpunktsform gewonnen und somit die Position des Scheitelpunkts und die Stauchung abgelesen werden kann. Dabei gilt generell, dass der Scheitelpunkt S durch $S(d|e)$ gegeben ist. Der Scheitelpunkt S würde in der Parameterdarstellung durch $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c-\frac{b^2}{4a}\right)$ gegeben sein.

Die Nullstellen von quadratischen Funktionen lassen sich über die quadratische Ergänzung berechnen. Da es sich um eine Funktion zweiter Ordnung handelt werden auch zwei Nullstellen zu berechnen sein, wie bei den Graphen $f_{-3}(x)$, $f_{-2}(x)$ und $f_{-1}(x)$ bei der Variation von e schon zu erkennen war und schon im Abschnitt zur quadratischen Ergänzung thematisiert wurde.

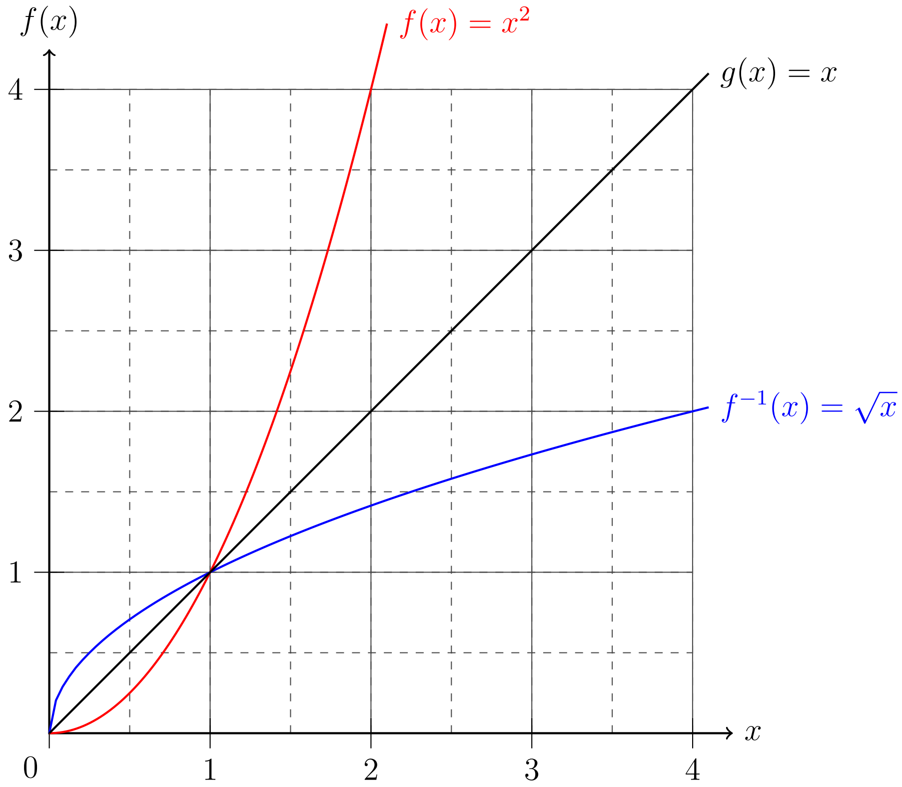
Des Weiteren bleibt zu erwähnen, dass eine Funktion zweiter Ordnung insgesamt drei Parameter besitzt, folglich werden drei Informationen benötigt, um alle drei Parameter bestimmen zu können. Dies geschieht über das gleiche Verfahren wie bei den Geradenfunktionen, nur dass ein Parameter und eine Gleichung hinzu kommt.

Übungsaufgaben zu Parabeln

Aufgabe 1: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen rechtwinkligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

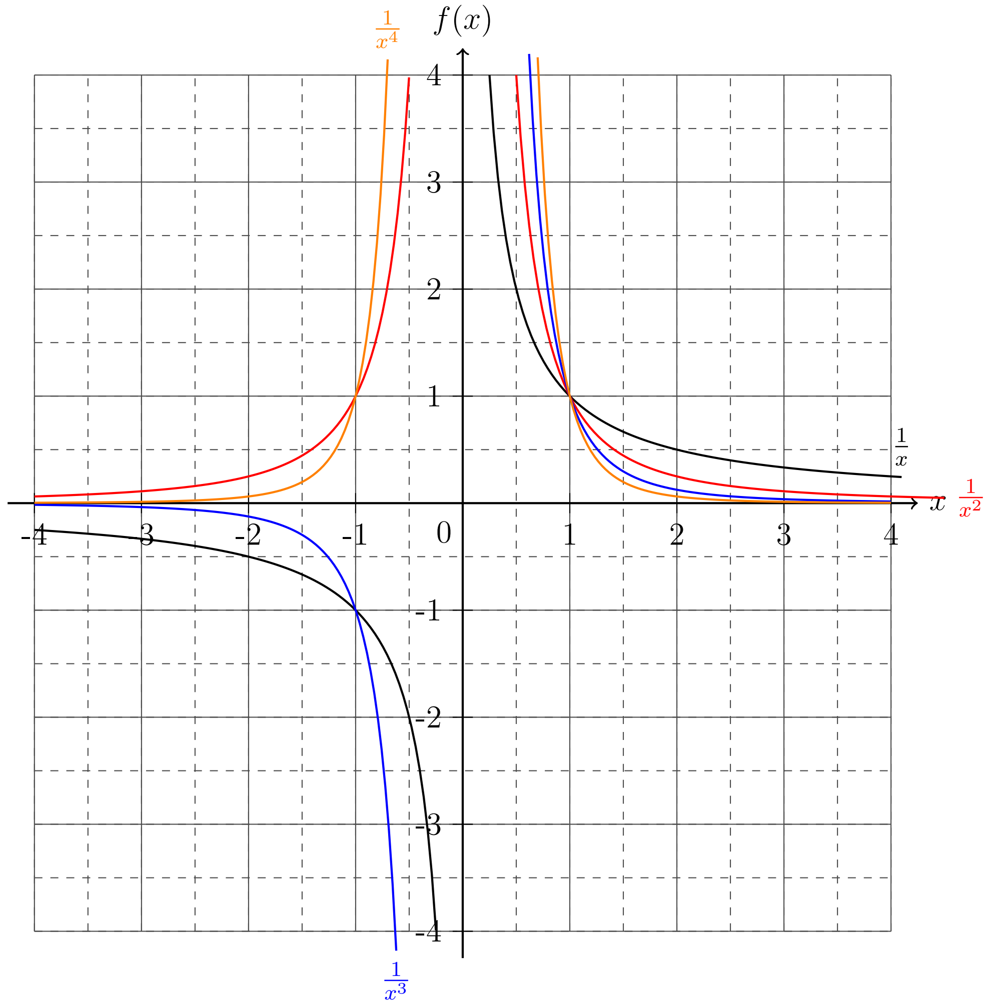
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (12.5.24) Lösungen zu Geraden.

5.4 Umkehrfunktionen



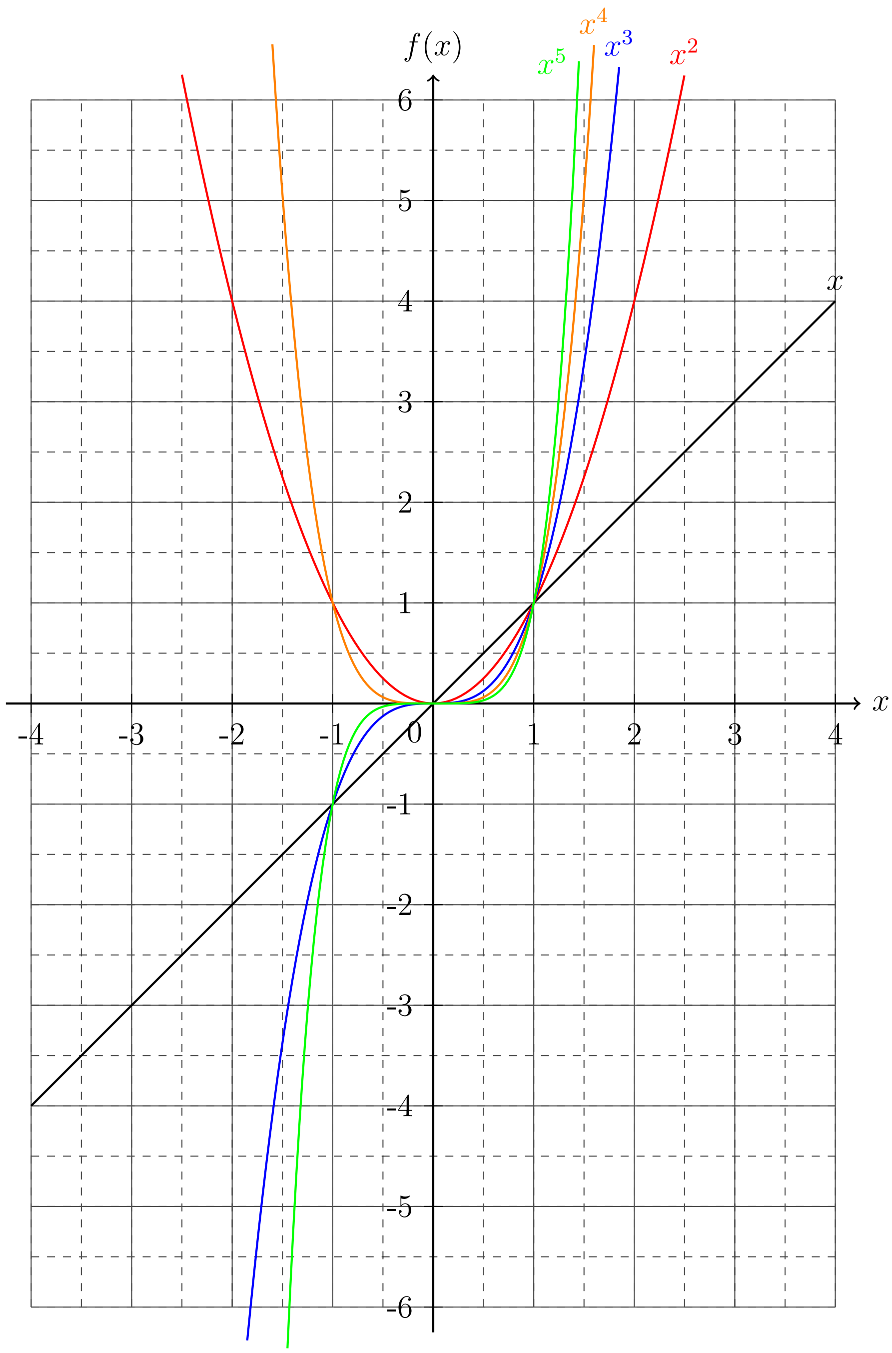
5.5 Grenzwerte

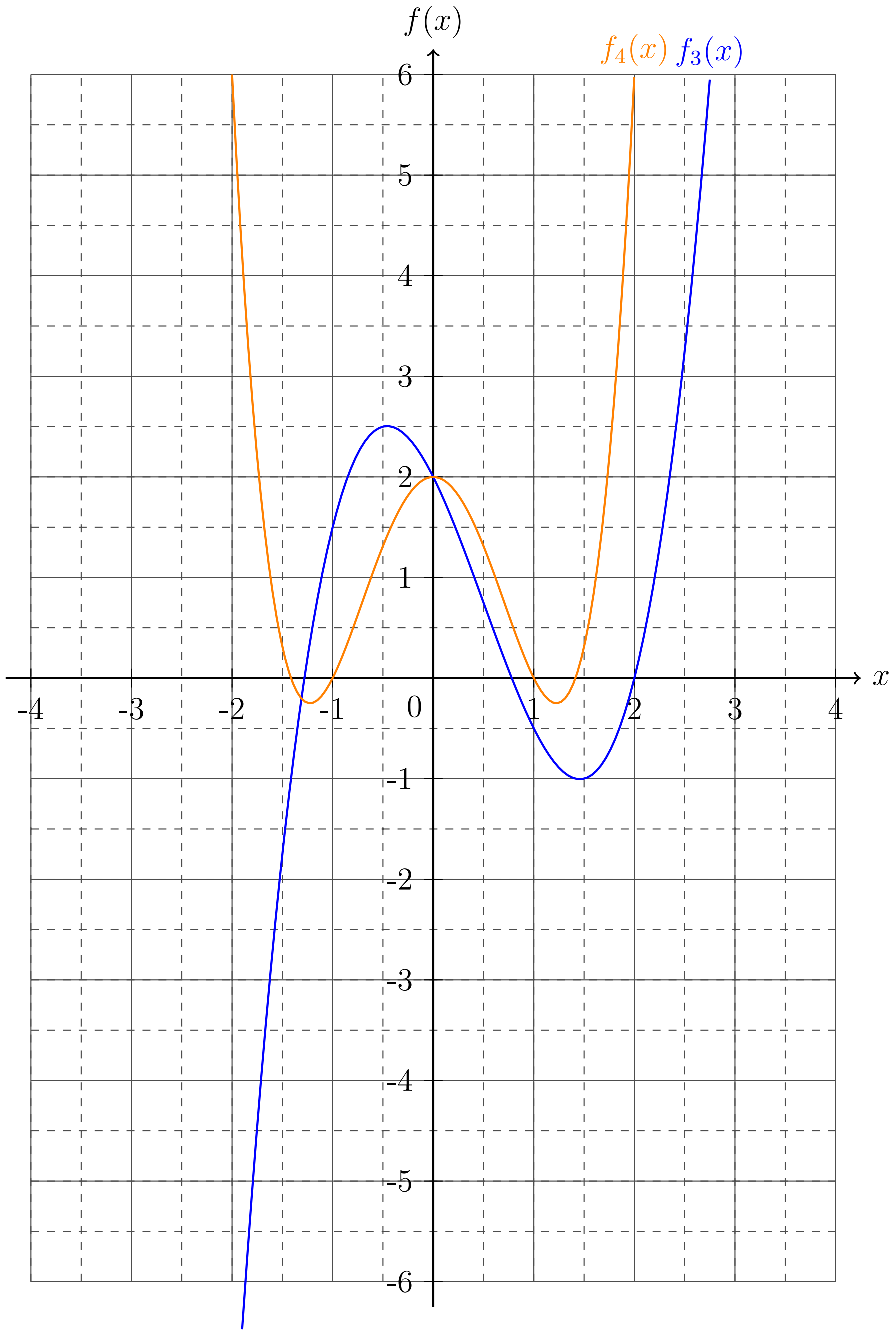
5.6 Hyperbel



5.7 Reihen

5.8 Polynomfunktionen

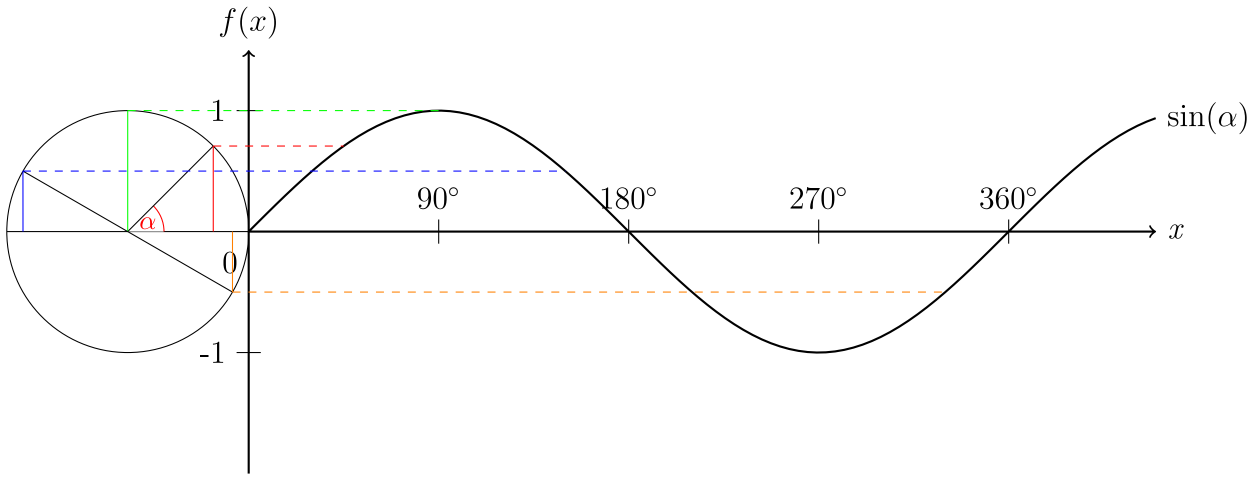


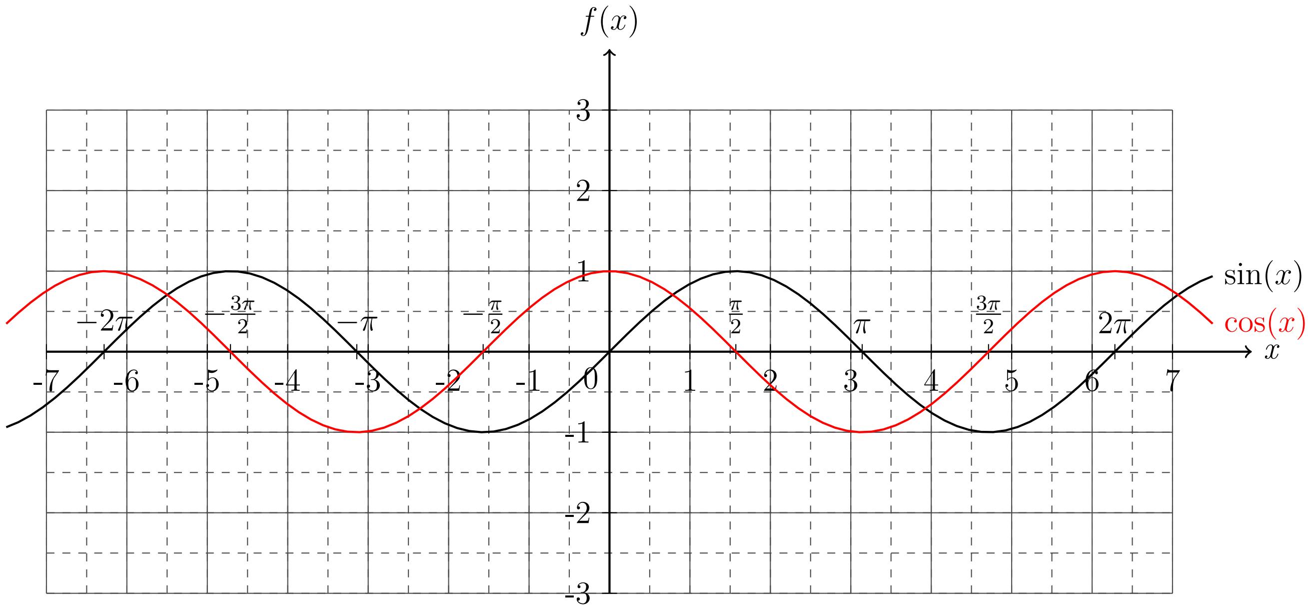

$f(x)$
$f_4(x)$ $f_3(x)$
x
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6

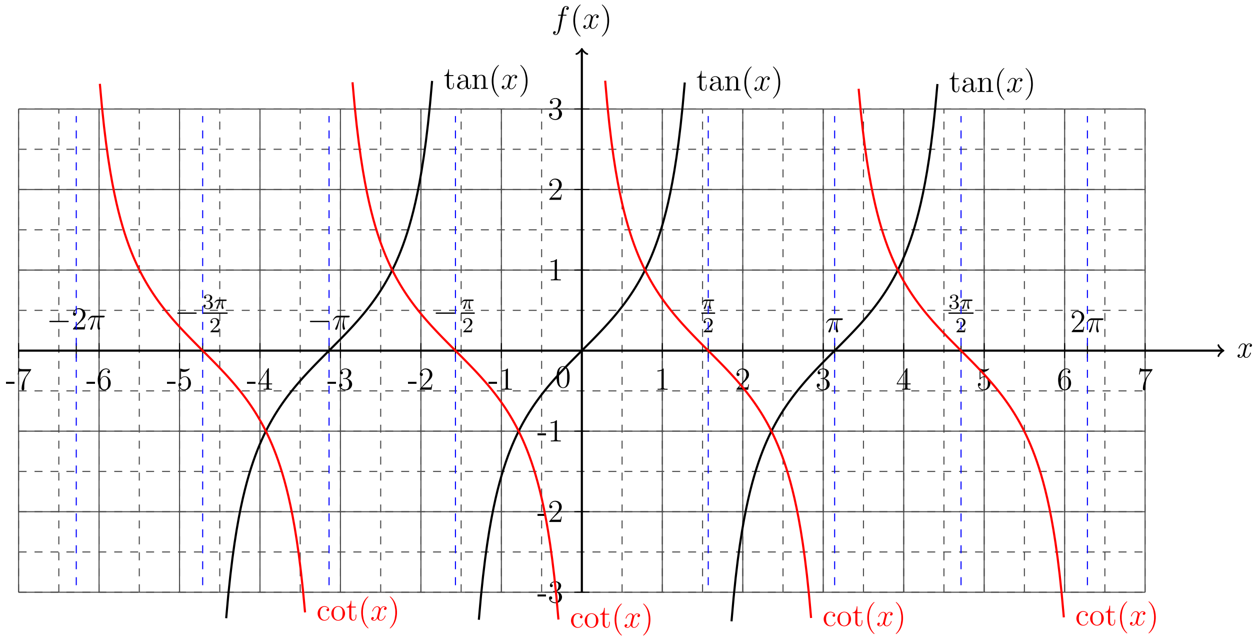
5.9 Gebrochen rationale Funktionen

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & \\
\hline
 & 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 \\
 & -(6x^3 & -12x^2) & & \\
\hline
 & & 8x^2 & +8x & -48 \\
 & & -(8x^2 & -16x) & \\
\hline
 & & & 24x & -48 \\
 & & & -(24x & -48) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

5.10 Trigonometrische Funktionen







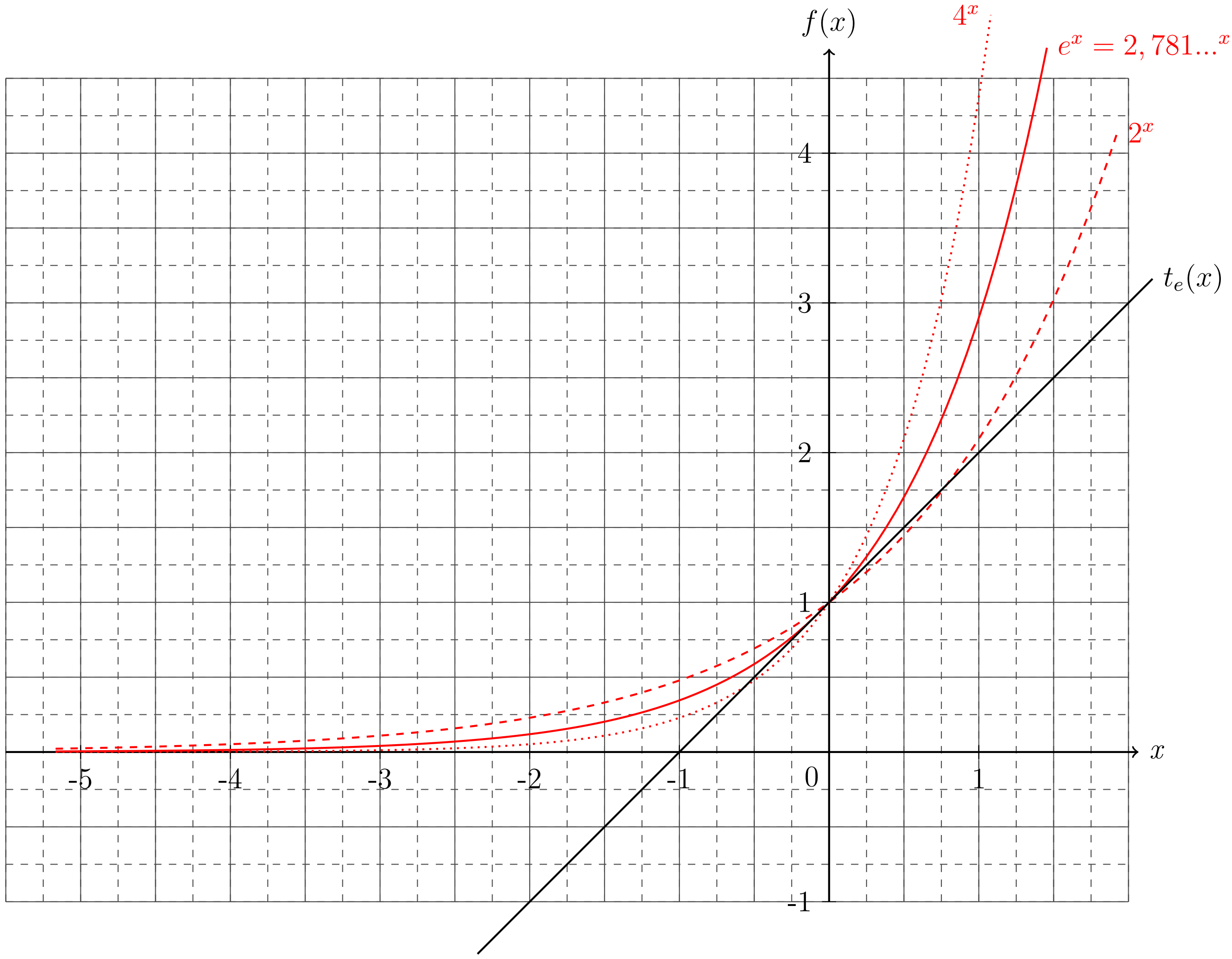
5.11 Trigonometrische Identitäten

Wie schon im vorigen Abschnitt zu sehen war, gibt es Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens, den sogenannten trigonometrischen Funktionen. Diese Beziehungen können hergeleitet und bewiesen werden. Die wichtigste trigonometrische Identität ist der Satz des Pythagoras an einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenusenlänge von 1. Somit ergeben sich die Katheten zur Länge $\sin x$ und $\cos x$, sodass daraus die folgende Identität folgt:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad , \tag{5.16}$$

wobei $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ ist.

5.12 Exponentialfunktion



Für ein tieferes Verständnis von Funktionen sollte das Kapitel „Differentiation und Integration“ bearbeitet werden, da viele Zusammenhänge zwischen den Arten der Funktionen und ihren Eigenschaften dadurch besonders deutlich erkennbar werden.

6 Vektoren

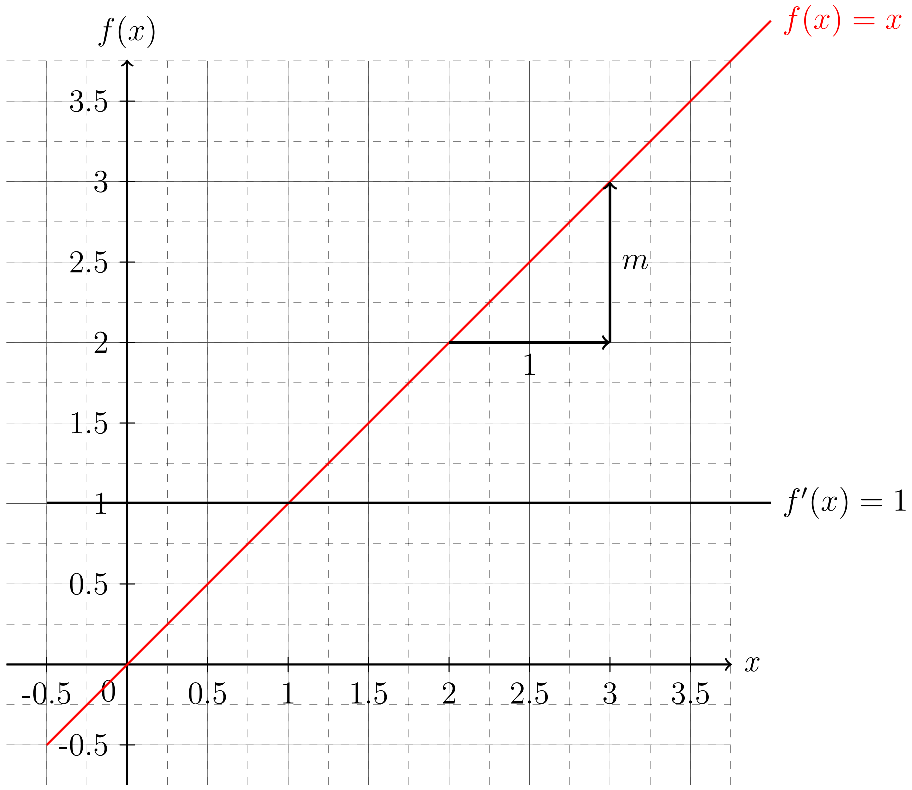
6.1 Eigenschaften

6.2 Spatprodukt

6.3 Matrizen

7 Differentiation und Integration

Die Differentiation und die Integration sind wichtige Kernelemente der Analysis. Um diese beiden Operationen effektiv einzuführen, sollte die Geradengleichung $f(x) = mx + b$ mit der Steigung der Geraden m und dem Ordinatenschnittpunkt b nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Seien die Geraden $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ gegeben, dann kann durch die Veranschaulichung im Koordinatensystem gesehen werden, dass die Steigung der Gerade $f(x)$ gleich der dem Wert der Geraden $f'(x)$ also gleich eins ist. Die Steigung der Gerade $f'(x)$ ist Null, da es sich um eine Konstante handelt wie im Koordinatensystem zu erkennen ist. Dabei ist der Begriff „Steigung“ so definiert: „Wenn man einen Einheitenschritt nach rechts von der Geraden aus geht, ist die Steigung der Geraden gleich der Einheitenschritte orthogonal zum gegangenen Schritt - folglich nach oben für positive Steigung und nach unten für negative Steigung.“



7.1 Operatoralgebra

Mathematisch lässt sich ein Ausdruck definieren, der sprachlich fordert: „*Bestimme die Steigung von der Funktion!*“ Diese Forderung wird durch den sogenannten Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ erfüllt, der „*d nach d x*“ gelesen wird. Ein solcher Operator wirkt nur nach rechts, dass heißt alle Größen die links vom Operator stehen bleiben unangetastet. Somit soll folgende Rechenvorschrift für den Operator gelten, um den veranschaulichten Forderungen im vorherigen Koordinatensystem gerecht zu werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= 1 \qquad \text{siehe Funktionenbeispiel} \\ \frac{d}{dx}1 &= 0 \qquad \text{im Koordinatensystem} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Somit würde das Kommutativgesetz, welches für normale Zahlen, Parameter und Variablen gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 0 \\ &a \cdot b - b \cdot a = 0 = [a, b] \qquad , \end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$ der sogenannte Kommutator ist, sich wie folgt verändern:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \qquad . \end{aligned} \tag{7.3}$$

Durch Äquivalenzumformung der Gleichung (7.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} &= 1 \qquad \Big| + x\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dieser Ausdruck ist von zentraler Bedeutung, der es durch ein triviales Einsetzungsverfahren ermöglicht den Operator an einer Variable vorbei zu ziehen. Sei zum Beispiel die Steigung der Funktion $g(x) = x^2$ gesucht, dann lässt sich dies mit Hilfe der Gleichung (7.4) bestimmen, indem Terme der Form $\frac{d}{dx}x$ durch den Ausdruck $\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \\ &= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \\ &= x + x\frac{d}{dx}x \\ &= x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\ &= x + x + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ähnlich verhält sich das Prozedere mit der Funktion $h(x) = x^3$, wobei lediglich die Anzahl der Schritt zunimmt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^3 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \cdot x \\
&= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\frac{d}{dx}x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\frac{d}{dx} \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\
&= x^2 + x^2 + x^2 + x^3 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\
&= 3x^2
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Dies kann für x^4 und höhere Potenzen von x auch bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der Schritte nur weiter erhöhen würde. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse ist eine Regel für die Ableitung von Polynomen erkennbar, sodass die Prozedur des wiederholten Einsetzens überflüssig wird.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}1 &= 0 \\
\frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} = 1 \\
\frac{d}{dx}x^2 &= 2x + x^2\frac{d}{dx} = 2x \\
\frac{d}{dx}x^3 &= 3x^2 + x^3\frac{d}{dx} = 3x^2 \\
\frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3 + x^4\frac{d}{dx} = 4x^3 \\
\frac{d}{dx}x^5 &= 5x^4 + x^5\frac{d}{dx} = 5x^4
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Gleichung (7.7) zeigt deutlich, dass sich die Potenz bei der Anwendung vom Differentialoperator um eins verringert und als Vorfaktor wieder zu finden ist. Somit ergibt sich folgende allgemeine Regel für die Anwendung des Differentialoperators - es wird auch vom „Ableiten“ gesprochen - auf ein Polynom:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Als verkürzende Schreibweise soll von nun an gelten:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \qquad . \tag{7.9}$$

Dabei bedeutet der Strich bei $f'(x)$, dass es sich um die Ableitung der Funktion $f(x)$ handelt und dass der wirkende Differentialoperator nach x (also $\frac{d}{dx}$) gewirkt hat. So gilt zum Beispiel ebenso:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy}f(y) = f'(y) && \text{Funktion von } y \text{ deswegen Differentialoperator nach } y \\ &\frac{d}{dz}f(z) = f'(z) && \text{Funktion von } z \text{ deswegen Differentialoperator nach } z \\ &\frac{d}{dt}f(t) = \dot{x}(t) && \text{Funktion von } t \text{ deswegen Differentialoperator nach } t, \end{aligned} \tag{7.10}$$

wobei letztes ein Spezialfall der Physik ist, da nach der Zeit t abgeleitet wurde. Generell werden in der Physik immer die Ableitungen nach der Zeit mit einem Punkt über der Funktion beschrieben.

7.2 Ableitungsregeln

Die erste Ableitungsregel wurde schon in Gleichung (7.8) beschrieben und gilt für jede Art von Polynomen.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \tag{7.11}$$

Diese Ableitungsregel ist besonders nützlich im Zusammenhang mit den Potenzgesetzen, denn so lassen sich bestimme Funktionen über einer Variable als Basis mit einer Zahl im Exponenten darstellen. Mit Hilfe dieser Ableitungsregel besteht die Möglichkeit wesentlich komplexere, also zusammengesetzte, Funktionen abzuleiten. Dazu sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt unter der Verwendung der Regeln für die Klammersetzung:

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}f(x) \tag{7.12}$$

Sei nun $f(x) = g(x)h(x)$ und zum Beispiel mit $g(x) = x^n$ und $h(x) = x^m$, dann gilt unter Berücksichtigung der Potenzgesetze und Gleichung (7.11) und der verkürzten Schreibweise aus Gleichung (7.9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) &= \frac{d}{dx}x^n x^m = \frac{d}{dx}x^{n+m} = (n+m)x^{n+m-1} \\ &= \frac{d}{dx}x^n x^m = \left(nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\right)x^m \\ &= nx^{n-1}x^m + x^n\frac{d}{dx}x^m \\ &= nx^{n-1}x^m + x^n\left(mx^{m-1} + x^m\frac{d}{dx}\right) \\ &= nx^{n-1}x^m + x^n m x^{m-1} \\ &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= nx^{n-1+m} + mx^{n+m-1} = (n+m)x^{n+m-1} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Wie Gleichung (7.13) zeigt, kann diese Aufgabe schnell über die Potenzgesetze in einer Zeile gelöst werden. Dieses Ergebnis soll als Vergleich dienen, um die Ableitungsregel für Polynome auf die zusammengesetzte Funktion $f(x)$ anzuwenden. Dabei wird erneut wie schon beim Herleiten der Ableitungsregel für Polynome das Einsetzungsverfahren verwendet. In der vorletzten Zeile dieser Rechnung ist zu erkennen, dass

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(x)h(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad , \tag{7.14}$$

gilt. Diese Ableitungsregel aus Gleichung (7.14) wird Leibnizregel oder Produktregel genannt. Ihr Nutzen wird sich offenbaren wenn nicht nur Polynome zur Diskussion stehen.

Mit der Leibnizregel und der Substitution, soll nun noch eine weitere Ableitungsregel bestimmt werden. Dabei soll gelten, dass die Funktion $f(x)$ eine verkettete Funktion sein soll: $f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ mit dem Beispiel, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$ sei - mit den Ableitungen $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 2$. Wie die Verkettung fordert, wir $h(x)$ in die Funktion $g(x)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Ableitung mit der Überprüfung des Ergebnisses durch die Ableitungsregel der Polynome sowie den Binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(h(x)) &= \frac{d}{dx} (2x+1)^2 = \frac{d}{dx} 4x^2 + 4x + 1 = 8x + 4 \\
&= \frac{d}{dx} (2x+1)(2x+1) \quad \text{Leibnizregel} \\
&= (2x+1) \frac{d}{dx} (2x+1) + (2x+1) \frac{d}{dx} (2x+1) \\
&= (2x+1) 2 + (2x+1) 2 \\
&= 2 \cdot 2 (2x+1) \quad \text{Vergleich mit } g'(x),\ h'(x) \text{ und } h(x) \\
&= h'(x) \cdot g'(h(x)) = 8x + 4
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Die letzte Zeile offenbart durch den Vergleich der Terme mit den Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ sowie ihren Ableitungen $g'(x)$ und $h'(x)$ die allgemeine Regel der Ableitung von verketteten Funktionen.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} g(h(x)) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \tag{7.16}$$

Diese Regel wird Kettenregel genannt und wird ihre Bedeutung erst offenbaren, wenn Funktionen angenommen werden, deren abgekürzte Schreibweise ihre Herkunft aus Polynomen nicht mehr offensichtlich zeigen.
Mittels der Substitution $y := h(x)$ würde das Polynom in der Klammer ersetzt werden. Allerdings muss auch der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ nach $\frac{d}{dy}$ umgewandelt werden. Dies geschieht wie folgt (Hier sollte erwähnt werden, dass es sich lediglich um eine Nebenrechnung handelt, um die Substitution zu durchführen zu können. Die gezeigten Schritte der Rechnung sehen intuitiv aus, sind allerdings nicht ohne weitere Prüfungen und tiefer liegende Mathematik durchführbar.):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dx} &= h'(x) \qquad |\cdot dx \\
dy &= dx \cdot h'(x) \qquad |: h'(x) \\
\Rightarrow dx &= \frac{dy}{h'(x)} \qquad \text{eingesetzt in: } \frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} &= h'(x) \frac{d}{dy}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

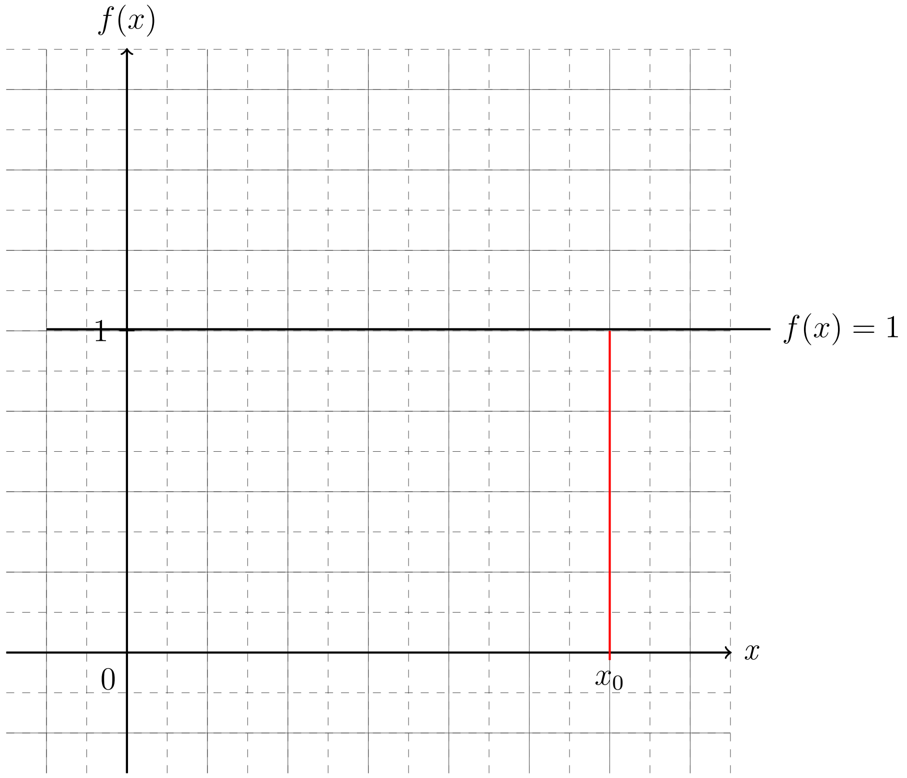
Der gefundene Ausdruck für $\frac{d}{dx}$ wird nun mit eingesetzt, wenn die Substitution durchgeführt wird.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) \qquad \text{mit: } y := h(x) \text{ und: } \frac{d}{dx} = h'(x)\frac{d}{dy} \\
&= h'(x)\frac{d}{dy}g(y) \\
&= h'(x)g'(y) \qquad \text{mit: } y = h(x) \text{ zurück eingesetzt} \\
&= h'(x)g'\left(h(x)\right)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Gleichung (7.17) und (7.18) zeigen eine Herleitung der Kettenregel ohne Spezifizierung der Funktionen, sodass festgehalten werden kann, dass jede differenzierbare verkettete Funktion über diese Regel ableitbar ist.

7.3 Integration

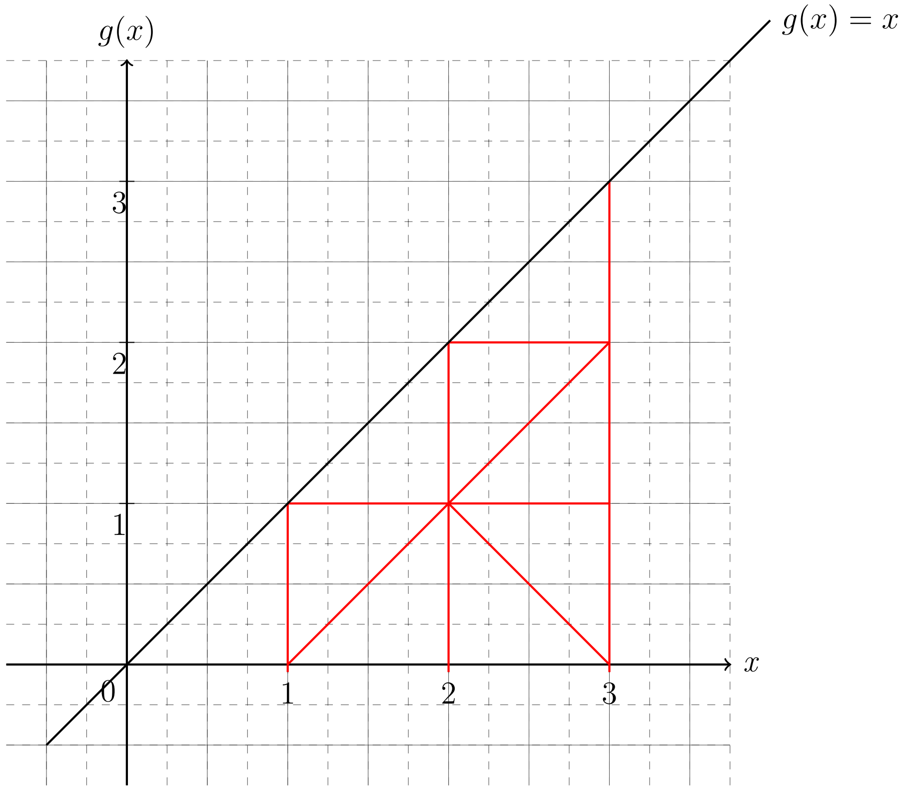
Nachdem die Differentiation zur Bestimmung der Steigung einer Funktion eingeführt wurde, soll nun eine weitere Eigenschaft der Funktion untersucht werden. Sei eine Funktion $f(x) = 1$ gegeben. Nun soll der Flächeninhalt bestimmt werden, der von der x-Achse und Funktion $f(x)$ eingeschlossen wird, von $x = 0$bis $x = x_0$ bestimmt werden.



Der Flächeninhalt als Funktion $F(x)$ wäre gegeben als:

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x) \cdot x \qquad \text{mit: } f(x) = 1 \\
F(x) &= x \qquad \text{mit: } x = x_0 \\
\Rightarrow F(x_0) &= x_0
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ wäre wieder die Funktion $f(x)$. Als weiteres Beispiel soll die Funktion $g(x) = x$ gegeben sein und erneut soll der Flächeninhalt als Funktion von x, also $G(x)$, bestimmt werden.



Der Flächeninhalt unterhalb der Funktion $g(x)$ bildet ein Dreieck. Somit ist die Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ gegeben als:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{g(x) \cdot x}{2} \qquad \text{mit: } g(x) = x \\ G(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ wäre $\frac{1}{2}2x = x = g(x)$. Somit wäre erneut die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ die Ausgangsfunktion $g(x)$. Aus dieser Erkenntnis kann wieder aus der sprachlichen Forderung „Bestimme den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)$ der durch die Grenzen $x = a$ bis $x = b$ und x-Achse begrenzt ist!“ einen mathematischen Formalismus entstehen lassen:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{7.21}$$

Diese Operation wird Integration genannt. Dabei wird Gleichung (7.21) gelesen als „Die Stammfunktion $F(x)$ ist gleich das Integral über die Funktion $f(x)$ nach x in den Grenz von a bis b“.

7.4 Integrationsregeln

Nachdem der Formalismus eingeführt wurde, soll ein allgemeines Polynom x^n untersucht werden. Dazu wird die Ableitung von x^n gebildet und über Äquivalenzumformung und mit Potenzgesetzen die Gleichung umgestellt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \qquad \text{substituiere: } m = n-1 \Rightarrow n = m+1 \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^{m+1} &= (m+1)x^m \qquad |: (m+1) \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1} &= x^m \qquad |\cdot dx \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1}dx &= x^m dx \qquad \Big|\int \\
\Rightarrow \int x^m dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Die letzte Zeile der Gleichung (7.22) zeigt die hergeleitete Regel für die Integration von Polynomen. Nachdem das generelle Integrationsgesetz für Polynome gefunden wurde, die Produktregel als Ausgangspunkt für die Herleitung einer weiteren Integrationsregel dienen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad |\cdot dx \\
\frac{d}{dx}f(x)g(x)dx &= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx \qquad \Big|\int \\
f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \Big| - \int f(x)g'(x)dx \\
\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Diese Integrationsregel wird „partielle Integration“ genannt. Sie wird dazu verwendet Funktionsprodukte zu integrieren bei dem eine Teilfunktion $f(x)$ leicht zu integrieren ist, während die andere Teilfunktion $g(x)$ eine Funktion ist die eine unbekannte Stammfunktion besitzt, deren Ableitung allerdings bekannt ist. Generell wird diese Integrationsregel dazu verwendet, um das Produkt eines Polynoms mit einer anderen Funktion zu integrieren. Dabei bildet in der Regel das Polynom die Funktion $g(x)$, sodass dieses nach mehrfacher Anwendung der partiellen Integration und dem Einsetzungsverfahren dieses Polynom restlos verschwindet und die Funktion $f(x)$ alleinstehend unter dem Integral vorzufinden.

Abschließend soll die Kettenregel in eine Regel der Integration überführt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) &= g'(x)f'\left(g(x)\right) \qquad |dx \\
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)dx &= g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \Big|\int \\
f\left(g(x)\right) &= \int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Durch Substitution lässt sich dieses Integral lösen, hierbei wird $y := g(x)$ gewählt:

$$\begin{aligned}
&\int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\
&= \int f'\left(y\right)dy = f(y) \qquad \text{zurück eingesetzt: } g(x) = y \\
&= f\left(g(x)\right)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Aus den Gleichungen (7.24) und (7.25) ist erkennbar, dass die Kettenregel der Ableitung überführt in die Integration durch Substitution bearbeitet werden kann. Aus diesem Grund wird diese Regel „Integration durch Substitution“ genannt.

Mit Grenzen würde sich bei der Integration durch Substitution die Grenzen mit verändern:

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad &\text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ = \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy &\end{aligned} \tag{7.26}$$

Dabei wird die obere Grenze und die unteren Grenze eingesetzt in die Stammfunktion und anschließend von einander subtrahiert. Für diesen Prozess gibt es zwei verschiedene Schreibweisen. Die erste Schreibweise umklammert den Term, in den einzusetzen ist, während die zweite Schreibweise einen senkrechten Strich vorsieht und aussagt, dass für alle Variablen links vom Strich eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy &= \left[f(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \left. f(y)\right|_{x=g(a)}^{x=g(b)} \\ &= f\left(g(b)\right) - f\left(g(a)\right)\end{aligned} \tag{7.27}$$

Da nun alle Regeln für die Integration und der Differentiation bekannt sind, werden im folgenden Abschnitt beide Methoden dazu verwendet um spezielle Gleichungen zu lösen - die sogenannten Differentialgleichungen.

7.5 Differentialgleichungen 1. Ordnung

7.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung

8 Wirtschaftsrechnungen

9 Wahrscheinlichkeitsrechnung

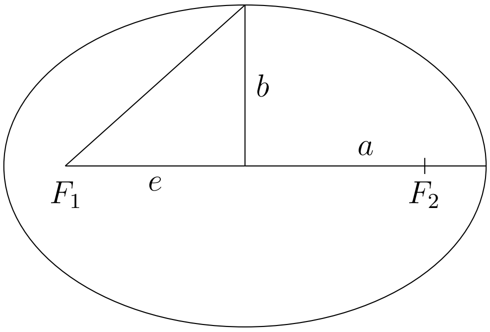
9.1 Zufallsexperimente

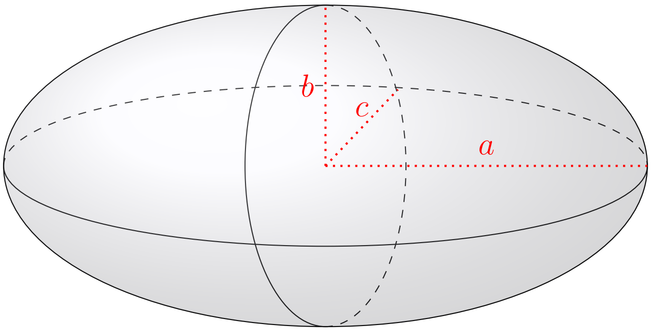
9.2 Permutationen

10 Komplexe Zahlen

11 Physikalische Anwendungen

11.1 Ellipse und Ellipsoid





12 Anhang

12.1 Alphabete

$A\ \alpha$	Alpha	$I\ \iota$	Jota	$P\ \rho$	Rho
$B\ \beta$	Beta	$K\ \kappa$	Kappa	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	Sigma
$\Gamma\ \gamma$	Gamma	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$T\ \tau$	Tau
$\Delta\ \delta$	Delta	$M\ \mu$	My	$\Upsilon\ \upsilon$	Ypsilon
$E\ \epsilon$	Epsilon	$N\ \nu$	Ny	$\Phi\ \phi\ \varphi$	Phi
$Z\ \zeta$	Zeta	$\Xi\ \xi$	Xi	$X\ \chi$	Chi
$H\ \eta$	Eta	$O\ o$	Omikron	$\Psi\ \psi$	Psi
$\Theta\ \theta$	Theta	$\Pi\ \pi$	Pi	$\Omega\ \omega$	Omega

Zurück zum Text durch folgenden Link: (3.4).

12.2 Pascal'sches Dreieck

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Zurück zum Text durch folgenden Link: (2.6.3).

12.3 10er Potenzen

Symbol	Name	10er Potenz	Ausgeschrieben	Sprachlich
Y	Yotta	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliade
E	Exa	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	10^{15}	1.000.000.000.000.000	Billarde
T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	10^{9}	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	10^{6}	1.000.000	Million
k	Kilo	10^{3}	1.000	Tausend
h	Hekto	10^{2}	100	Hundert
da	Deka	10^{1}	10	Zehn
		10^{0}	1	Eins
d	dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	centi	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
μ	mirko	10^{-6}	0,000.001	Millionstel
n	nano	10^{-9}	0,000.000.001	Milliardstel
p	piko	10^{-12}	0,000.000.000.001	Billionstel
f	femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	zepto	10^{-21}	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	yokto	10^{-24}	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel

12.4 Mathematische Begriffe auf Englisch

Symbol	Deutsch	Englisch
Σ	Summe	sum
Π	Produkt	product
$+$	addierten	add
$-$	Subtrahieren	subtract
$\cdot$	Multiplizieren	multiply
$:$	Dividieren	divide
$\frac{a}{b}$	Bruch	fraction
$\sum_{n=k}^{k=l} c_n x_n^{b_n}$	Reihe	serie
	Dreieck	triangle
	Kreis	circle
	Rechteck	rectangle
	Fläche	area
	Umfang	perimeter
	Volumen	volume
	Oberfläche	surface

12.5 Lösungen

12.5.1 Lösungen zu Mengen

Aufgabe 1:
$a)\ 4 \in \mathbb{N}$ $b)\ -1 \in \mathbb{Z}$ $c)\ 9 \in \mathbb{N}$ $d)\ 0,45 \in \mathbb{Q}$
$e)\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ $f)\ -6 \in \mathbb{Z}$ $g)\ 4,75 \in \mathbb{Q}$ $h)\ 0,\bar{3} \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$ $j)\ -\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ $k)\ 3 \in \mathbb{N}$ $l)\ 0,125 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 0,01 \in \mathbb{Q}$ $n)\ \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$ $o)\ 3,141 \in \mathbb{Q}$ $p)\ -0,75 \in \mathbb{Q}$

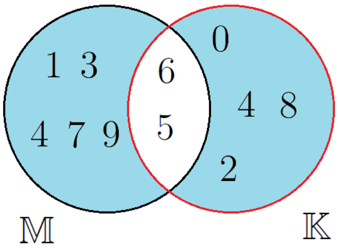
Aufgabe 2:
$a)\ 0,\bar{6} \in \mathbb{Q}$ $b)\ -\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$ $c)\ 0 \in \mathbb{N}$ $d)\ \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$ $f)\ \sqrt{13} \in \mathbb{R}$ $g)\ \frac{2}{\sqrt{16}} \in \mathbb{Q}$ $h)\ 1\% \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$ $j)\ -42 \in \mathbb{Z}$ $k)\ \sqrt{144} \in \mathbb{N}$ $l)\ \frac{16}{2} \in \mathbb{N}$
$m)\ 5,01 \in \mathbb{Q}$ $n)\ 17 \in \mathbb{N}$ $o)\ 1,1\bar{6} \in \mathbb{Q}$ $p)\ -\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3:
$a)\ \lg 10 \in \mathbb{N}$ $b)\ \sqrt{9} \in \mathbb{N}$ $c)\ -7 \in \mathbb{Z}$ $d)\ \pi \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{e^2}{2} \in \mathbb{R}$ $f)\ -\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ $g)\ 1 \in \mathbb{N}$ $h)\ 0,597813553 \in \mathbb{Q}$
$i)\ \ln 2 \in \mathbb{R}$ $j)\ -e^{\ln \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$ $k)\ \log_3 9 \in \mathbb{N}$ $l)\ 0,1 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 28\% \in \mathbb{Q}$ $n)\ \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ $o)\ \sqrt{17} \in \mathbb{R}$ $p)\ -\frac{1}{\ln e} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4:
$a)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,5,9\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{3,4,8\}$;
$b)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7\} = \mathbb{M}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{1,2,3,5,7\} = \mathbb{K}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{6\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{\} = \varnothing$;
$c)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{\} = \varnothing$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \mathbb{K}$;
$d)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{2,8\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{1,4,7\}$;
$e)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{2,3,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{2,5,8\}$;
$f)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,5,6,7,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,5,7\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{4,6\}$

Aufgabe 5:
$a)\ (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} = \varnothing;$
$b)\ (\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \mathbb{M};$
$c)\ (\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
$d)\ (\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) = \{3,4,6,9\};$
$e)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) = \{5,7\};$
$f)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
$g)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L}\Delta\mathbb{K} = \{3,5,6,7,8\};$
$h)\ \mathbb{M}\Delta\mathbb{K} = \{1,2,4,8,9\};$

Aufgabe 6:
$\mathbb{M}\Delta\mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$;



Aufgabe 7:
$a)$ $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \varnothing$; $b)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $c)$ $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (1).

12.5.2 Lösungen zur Bruchrechnung

Aufgabe 1:

$a)$ $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$	$b)$ $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$	$c)$ $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
$d)$ $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$	$e)$ $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$	$f)$ $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
$g)$ $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$h)$ $\frac{2}{5} < \frac{7}{15}$	$i)$ $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$
$j)$ $\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$	$k)$ $\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$	$l)$ $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$
$m)$ $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$	$n)$ $\frac{5}{9} > \frac{3}{7}$	$o)$ $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
$p)$ $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$	$q)$ $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$	$r)$ $\frac{14}{8} < \frac{16}{9}$
$s)$ $\frac{3}{8} = \frac{24}{64}$	$t)$ $\frac{81}{9} = \frac{36}{4}$	$u)$ $\frac{55}{5} = \frac{131}{11}$

Aufgabe 2:

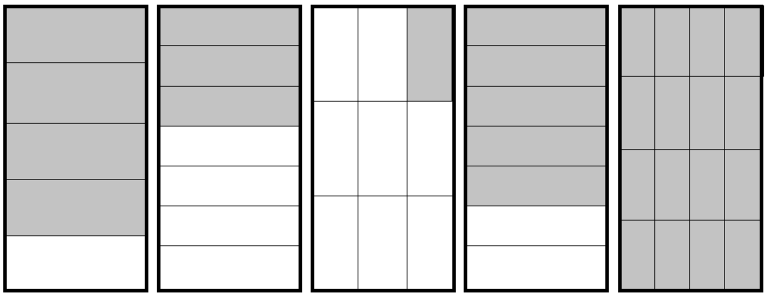
$a)$ $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	$b)$ $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$	$c)$ $\frac{9}{15} = \frac{1}{2}$
$d)$ $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$e)$ $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$	$f)$ $\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$
$g)$ $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$	$h)$ $\frac{30}{75} = \frac{6}{15}$	$i)$ $\frac{72}{108} = \frac{2}{3}$
$j)$ $\frac{16}{48} = \frac{1}{3}$	$k)$ $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$l)$ $\frac{24}{8} = 3$
$m)$ $\frac{12}{96} = \frac{1}{8}$	$n)$ $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	$o)$ $\frac{48}{144} = \frac{1}{3}$
$p)$ $\frac{33}{3} = 11$	$q)$ $\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$	$r)$ $\frac{5000}{10000} = \frac{1}{2}$
$s)$ $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$	$t)$ $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$	$u)$ $\frac{63}{108} = \frac{7}{12}$

Aufgabe 3:

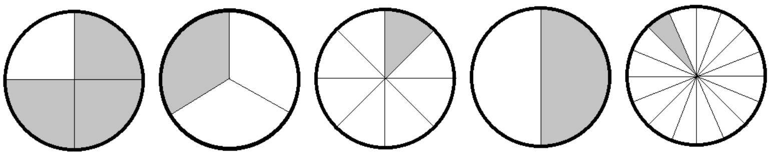
$a)$ $\frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{36}$	$b)$ $\frac{5}{7} \cdot 7 = \frac{35}{49}$	$c)$ $\frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{96}$
$d)$ $\frac{1}{2} \cdot 24 = \frac{24}{48}$	$e)$ $\frac{7}{8} \cdot 6 = \frac{42}{48}$	$f)$ $\frac{4}{6} \cdot 11 = \frac{44}{66}$
$g)$ $\frac{5}{7} \cdot 8 = \frac{40}{56}$	$h)$ $\frac{5}{13} \cdot 9 = \frac{45}{113}$	$i)$ $\frac{4}{11} = \frac{28}{77} \cdot 7$
$j)$ $\frac{7}{4} \cdot 9 = \frac{63}{36}$	$k)$ $\frac{6}{11} \cdot 5 = \frac{30}{55}$	$l)$ $\frac{3}{12} \cdot 4 = \frac{12}{48}$
$m)$ $\frac{2}{3} \cdot 21 = \frac{42}{63}$	$n)$ $\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{21}{24}$	$o)$ $\frac{4}{6} \cdot 13 = \frac{52}{78}$
$p)$ $\frac{3}{9} \cdot 8 = \frac{24}{72}$	$q)$ $\frac{5}{12} \cdot 6 = \frac{30}{72}$	$r)$ $\frac{7}{12} \cdot 7 = \frac{49}{84}$
$s)$ $\frac{3}{4} \cdot 17 = \frac{51}{68}$	$t)$ $\frac{5}{6} \cdot 4 = \frac{20}{24}$	$u)$ $\frac{13}{6} \cdot 1000 = \frac{13000}{6000}$

Aufgabe 4: Quadrate: $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.
Kreise: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, 1, \frac{2}{3}, \frac{13}{16}, 0, \frac{5}{8}, \frac{5}{12}$ und $\frac{1}{16}$.

Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{9}, \frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 7:
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ *b)* $\frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$ *c)* $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$
d) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ *e)* $\frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$ *f)* $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$
g) $\frac{1}{4} + \frac{3}{32} = \frac{11}{32}$ *h)* $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$ *i)* $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Aufgabe 8:
a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ *b)* $\frac{3}{7} - \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$ *c)* $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$
d) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ *e)* $\frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$ *f)* $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$
g) $\frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$ *h)* $\frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ *i)* $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 9:
a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$ *b)* $\frac{13}{7} - \frac{15}{14} = \frac{11}{14}$ *c)* $\frac{9}{5} + \frac{13}{10} = \frac{32}{10}$
d) $\frac{21}{2} - \frac{31}{8} = \frac{53}{8}$ *e)* $\frac{9}{8} + \frac{19}{16} = \frac{37}{16}$ *f)* $\frac{5}{3} - \frac{11}{9} = \frac{4}{9}$
g) $\frac{7}{4} + \frac{67}{32} = \frac{123}{32}$ *h)* $\frac{13}{5} - \frac{25}{15} = \frac{14}{15}$ *i)* $\frac{13}{3} + \frac{11}{6} =$
j) $\frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$ *k)* $\frac{13}{4} - \frac{9}{6} = \frac{7}{4}$ *l)* $\frac{9}{5} + \frac{3}{4} = \frac{51}{20}$
m) $\frac{21}{4} - \frac{11}{8} = \frac{31}{8}$ *n)* $\frac{3}{8} + \frac{9}{32} = \frac{21}{32}$ *o)* $\frac{4}{3} - \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$
p) $\frac{7}{8} - \frac{11}{32} = \frac{17}{32}$ *q)* $\frac{13}{5} - 2 = \frac{3}{5}$ *r)* $14 + \frac{11}{6} = \frac{95}{6}$
s) $\frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$ *t)* $\frac{15}{6} - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}$ *u)* $\frac{9}{5} - \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$
v) $\frac{23}{4} + \frac{17}{8} = \frac{63}{8}$ *w)* $\frac{7}{9} - \frac{11}{18} = \frac{5}{9}$ *x)* $\frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = \frac{99}{1000}$
y) $\frac{5}{20} - \frac{1}{1000} = \frac{249}{1000}$ *z)* $\frac{13}{15} + 6 = \frac{103}{15}$

Aufgabe 10:
a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ *b)* $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{98}$ *c)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{50}$

$d)$ $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ $e)$ $\frac{5}{16} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{128}$ $f)$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$
$g)$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{32} = \frac{3}{128}$ $h)$ $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{75}$ $i)$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

Aufgabe 11:
$a)$ $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ $b)$ $\frac{3}{7} : \frac{1}{14} = 6$ $c)$ $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{4}{3}$
$d)$ $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3}$ $e)$ $\frac{3}{8} : \frac{5}{16} = \frac{6}{5}$ $f)$ $\frac{1}{3} : \frac{2}{9} = \frac{3}{2}$
$g)$ $\frac{1}{4} : \frac{3}{32} = \frac{8}{3}$ $h)$ $\frac{2}{5} : \frac{2}{15} = 3$ $i)$ $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$

Aufgabe 12:
$a)$ $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ $b)$ $\frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} = \frac{195}{98}$ $c)$ $\frac{9}{5} : \frac{13}{10} = \frac{18}{13}$
$d)$ $\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} = \frac{651}{16}$ $e)$ $\frac{9}{8} : \frac{19}{16} = \frac{18}{19}$ $f)$ $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} = \frac{55}{27}$
$g)$ $\frac{7}{4} : \frac{67}{32} = \frac{56}{67}$ $h)$ $\frac{13}{5} : \frac{25}{15} = \frac{39}{25}$ $i)$ $\frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{26}{11}$
$j)$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$ $k)$ $\frac{13}{4} : \frac{9}{6} = \frac{39}{18}$ $l)$ $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{36}{15}$
$m)$ $\frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} = \frac{231}{32}$ $n)$ $\frac{3}{8} : \frac{9}{32} = \frac{4}{3}$ $o)$ $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27}$
$p)$ $\frac{7}{8} : \frac{11}{32} = \frac{28}{11}$ $q)$ $\frac{13}{5} : 2 = \frac{13}{10}$ $r)$ $14 \cdot \frac{11}{6} = \frac{77}{3}$
$s)$ $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{128}$ $t)$ $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$ $u)$ $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{36}{15}$
$v)$ $\frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} = \frac{391}{32}$ $w)$ $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} = \frac{77}{162}$ $x)$ $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} = 100$
$y)$ $\frac{5}{20} : \frac{1}{1000} = 250$ $z)$ $\frac{13}{15} \cdot 6 = \frac{26}{5}$
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.1).

12.5.3 Lösungen zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1:
$a)$ $\frac{1}{2} = 0,5$ $b)$ $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ $c)$ $\frac{1}{5} = 0,2$
$d)$ $\frac{1}{8} = 0,125$ $e)$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $f)$ $\frac{1}{16} = 0,0625$
$g)$ $\frac{3}{4} = 0,75$ $h)$ $\frac{4}{5} = 0,8$ $i)$ $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$
$j)$ $\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$ $k)$ $\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$ $l)$ $\frac{19}{5} = 3,8$
$m)$ $\frac{5}{9} = 0,\bar{5}$ $n)$ $\frac{11}{6} = 1,8\bar{3}$ $o)$ $\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$
$p)$ $\frac{43}{5} = 8,6$ $q)$ $\frac{55}{2} = 27,5$ $r)$ $\frac{17}{8} = 2,125$
$s)$ $\frac{67}{7} = 9,\overline{571428}$ $t)$ $\frac{81}{3} = 27$ $u)$ $\frac{55}{7} = 7,\overline{857142}$
$v)$ $\frac{1}{10} = 0,1$ $w)$ $\frac{1}{100} = 0,01$ $x)$ $\frac{1}{1000} = 0,001$

Aufgabe 2:
$a)$ $4 \cdot 0,1 = 0,4$ $b)$ $1 + 0,75 = 1,75$ $c)$ $9 \cdot 1,001 = 9,009$
$d)$ $2,125 - 1 = 1,125$ $e)$ $6,\bar{6} + 3,\bar{3} = 10$ $f)$ $1 + 0,0004 = 1,0004$
$g)$ $3,003 : 3 = 1,001$ $h)$ $100 \cdot 1,001 = 100,1$ $i)$ $1000 \cdot 0,001 = 1$
$j)$ $5,\bar{5} : 5 = 1,\bar{1}$ $k)$ $5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} = 0,8\bar{3}$ $l)$ $14 + 0,\bar{7} = 14,\bar{7}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.2).

12.5.4 Lösungen zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: $a = 3,\ b = 2,\ c = 4$
$a)$ $a + b - c = 3 + 2 - 4 = 1$
$b)$ $3a - 4b + c = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 4 = 5$
$c)$ $ab - bc = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2$
$d)$ $ab - ba = 0$
$e)$ $4ab + 2cc - 3bc = 32$
$f)$ $4\frac{a}{b} + \frac{c}{a} = \frac{22}{3}$
$g)$ $2ab + 2ac + 2bc = 52$
$h)$ $a + d = 27$ mit: $d = abc$
$i)$ $ad = -6$ mit: $d = ab - cb$
$j)$ $\frac{a}{bd} = \frac{1}{24}$ mit: $d = 4aa$
$k)$ $\frac{d}{a} - \frac{b}{d} = bc - \frac{1}{ac} = \frac{95}{12}$ mit: $d = abc$
$l)$ $\frac{1}{d} = a = 3$ mit: $d = \frac{1}{a}$
$m)$ $a + b\frac{d}{c} = a + b\frac{2ac-c}{bc} = a + 2a - 1 = 8$ mit: $d = \frac{2ac-c}{b}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.3).

12.5.5 Lösung zur Prozentrechnung

Aufgabe 1:
$a)$ $0,01 = 1\%$ $b)$ $100 = 10000\%$ $c)$ $0,5 = 50\%$
$d)$ $0,125 = 12,5\%$ $e)$ $0,0024 = 0,24\%$ $f)$ $289 = 2,89\%$
$g)$ $0,9315 = 93,15\%$ $h)$ $0,0341 = 3,41\%$ $i)$ $0,891 = 89,1\%$

Aufgabe 2:
$a)$ $1\% = 0,01$ $b)$ $100\% = 1$ $c)$ $54\% = 0,54$
$d)$ $1626\% = 16,26$ $e)$ $2,374\% = 0,02374$ $f)$ $2,01\% = 0,0201$
$g)$ $99\% = 0,99$ $h)$ $5\% = 0,05$ $i)$ $81,063\% = 0,81063$

Aufgabe 3:
$a)$ $\frac{1}{4} = 25\%$ $b)$ $\frac{1}{3} \approx 33,3\%$ $c)$ $\frac{5}{6} \approx 83,3\%$
$d)$ $\frac{9}{14} \approx 64,3\%$ $e)$ $\frac{8}{25} = 32\%$ $f)$ $\frac{1}{8} = 12,5\%$
$g)$ $\frac{7}{9} \approx 77,7\%$ $h)$ $\frac{9}{4} = 225\%$ $i)$ $\frac{43}{83} \approx 51,8\%$

Aufgabe 4:
$a)$ $700 \cdot 1\% = 7$ $b)$ $45 \cdot 100\% = 45$ $c)$ $200 \cdot 4\% = 8$
$d)$ $80 \cdot 25\% = 20$ $e)$ $1500 \cdot 2\% = 30$ $f)$ $50000 \cdot 3\% = 1500$
$g)$ $9000 \cdot 99\% = 8910$ $h)$ $3141 \cdot 0,1\% = 3,141$ $i)$ $120 \cdot 5\% = 6$

Aufgabe 5:
$a)$ 4% von 1000€ sind: $4\% \cdot 1000€ = 40€$
$b)$ 2% von 5550€ sind: $2\% \cdot 5550€ = 111€$
$c)$ 10% von 862434€ sind: $10\% \cdot 862434€ = 86243,4€$
$d)$ 19% von 299€ sind: $19\% \cdot 299€ = 56,81€$
$e)$ 12% von 1200€ sind: $12\% \cdot 1200€ = 144€$
$f)$ 11% von 65300€ sind: $11\% \cdot 65300€ = 7183€$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.4).

12.5.6 Lösungen zur Klammersetzung

Aufgabe 1:
$a)$ $\frac{1}{2}(9+7) = 8$ $b)$ $\frac{25+65}{10} = 9$
$c)$ $4(3+2) - 2(1+3) = 12$ $d)$ $\frac{16+48}{2} = 32$

Aufgabe 2:
$a)$ $4(a+b) = 4a + 4b$ $b)$ $c(a-5b) = ac - 5bc$
$c)$ $\frac{2}{5}(9a-5) = \frac{18a}{5} - 10$ $d)$ $(a+b)(a+b) = aa + 2ab + bb$
$e)$ $\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b} - \frac{5c}{d}\right) = \frac{2a}{5b} - \frac{2c}{d}$ $f)$ $(a-b)(a-b) = aa - 2ab + bb$
$g)$ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ $h)$ $(a-b)(a+b) = aa - bb$
$i)$ $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $j)$ $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) = a + 2ab + bb$

Aufgabe 3:
$a)$ $9a + 9b = 9(a+b)$ $b)$ $2a + 6 - 8b = 2(a + 3 - 4b)$
$c)$ $ab - acd + aa = a(b - cd + a)$ $d)$ $2ab + 4ab + 8ab = 2ab(1 + 2 + 4)$
$e)$ $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} = \frac{5}{bc}(a+5)$ $f)$ $abcdefghijkl - bcdefghijk = bcdefghijk(al-1)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.5.3).

12.5.7 Lösungen zur Potenzen

Aufgabe 1:
$a)$ $2^3 = 8$ $b)$ $3^4 = 81$ $c)$ $2^6 = 64$
$d)$ $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $e)$ $10^3 = 1000$ $f)$ $8^3 = 512$
$g)$ $4^{-3} = \frac{1}{64}$ $h)$ $10^{-6} = \frac{1}{1000000}$ $i)$ $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$
$j)$ $(5^3)^2 = 3125$ $k)$ $4^{\left(3^2\right)} = 4096$ $l)$ $2^6 \cdot 2^2 = 256$
$m)$ $(2^3 + 2^3)^3 = 4096$ $n)$ $(10^2)^{-1} = \frac{1}{100}$ $o)$ $\left((2^6)^{-1}\right)^{-1} = 64$

$p)$ $\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 100$ $q)$ $\left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} = 3,141$ $r)$ $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 = 125$

Aufgabe 2:
$a)$ $\sqrt{16} = 4$ $b)$ $\sqrt{81} = 9$ $c)$ $\sqrt[3]{8} = 2$
$d)$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $e)$ $\sqrt{144} = 12$ $f)$ $\sqrt[5]{100000} = 10$
$g)$ $\sqrt{289} = 17$ $h)$ $\sqrt[4]{81} = 3$ $i)$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} = 2$

Aufgabe 3:
$a)$ $1m^2 = 10^4 cm^2$ $b)$ $2,718km = 2,718{\cdot}10^6 mm$ $c)$ $1mm^3 = 10^6 dm^3$
$d)$ $3m^3 = 3{\cdot}10^3 dm^3$ $e)$ $0,5cm^2 = 5{\cdot}10^{-5} m^2$ $f)$ $13,3cm^3 = 133{\cdot}10^{-7} m^3$
$g)$ $10^3 km^2 = 10^9 dm^2$ $h)$ $1,234dm = 123,4mm$ $i)$ $\frac{15}{4}\mu m^2 = \frac{15}{4}{\cdot}10^6 mm^2$
$j)$ $\frac{1}{3}Mm^3 = \frac{1}{3}{\cdot}10^9 km^3$ $k)$ $0,01km^2 = 10^8 cm^2$ $l)$ $125mm^5 = 125{\cdot}10^{-5} cm^5$
$m)$ $6,\bar{6}m^4 = 6,\bar{6} \cdot 10^8 cm^4$ $n)$ $0,025km^7 = 0,025 \cdot 10^{42} mm^7$
$o)$ $3,141Tm^2 = 3,141 \cdot 10^{36} nm^2$

Aufgabe 4:
$a)$ $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$ $b)$ $\left(a - \sqrt{2}\right)^2 = a^2 - 2\sqrt{2}a + 2$
$c)$ $\left(\sqrt{2}a + 2\right)^4 = 4a^4 + 16\sqrt{2}a^3 + 48a^2 + 32\sqrt{2}a + 16$
$d)$ $\left(3a + \frac{2}{3}\right)^3 = 27a^3 + 18a^2 + 4a + \frac{8}{27}$
$e)$ $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
$f)$ $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.6.3).

12.5.8 Lösungen zu Logarithmen

Aufgabe 1:
$a)$ $\log_2 16 = 4$ $b)$ $\lg 1000 = 3$ $c)$ $\log_8 64 = 2$
$d)$ $\mathrm{lb}\ 512 = 9$ $e)$ $\ln e^9 = 9$ $f)$ $\log_5 125 = 3$
$g)$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$ $h)$ $\lg 11 \cdot 10^6 = 6 + \lg 11 \approx 7,04139$ $i)$ $\log_{17} 1 = 0$
$j)$ $\log_3 81 = 4$ $k)$ $\log_4 64 = 3$ $l)$ $\log_{15} 225 = 2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.7).

12.5.9 Lösungen zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1:

$a)\ 3 \cdot x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ $b)\ 2 \cdot x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

$c)\ 9 \cdot x + 55 = 0 \Rightarrow x = -\frac{55}{9}$ $d)\ 5 \cdot x - 25 = 0 \Rightarrow x = 5$

$e)\ 3 \cdot x + 9 = 6 \Rightarrow x = -1$ $f)\ x - 66 = 9 \Rightarrow x = 75$

$g)\ 4 \cdot x + 4 = 11 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$ $h)\ 9 \cdot x - 5 = 4 \Rightarrow x = 1$

$i)\ 32 \cdot x + 3 = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$ $j)\ 1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23 \Rightarrow x = \frac{47}{22}$

$k)\ 7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x \Rightarrow x = -\frac{7}{5}$ $l)\ 98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$

Aufgabe 2:

$a)\ -16x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $b)\ \sqrt{2x-6} - 144 = 0 \Rightarrow x = 9$

$c)\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{289}$ $d)\ \ln 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{e^2}{5}$

$e)\ \ln \frac{13}{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = e^{-\sqrt{2}+\ln 13}$ $f)\ \frac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}$

$g)\ \left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 7$ $h)\ e^{2x-6} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(6 + \ln 2) = 3 + \ln\sqrt{2}$

Aufgabe 3:

$a)\ x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1$

$b)\ 4x^2 - 16x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 4$

$c)\ 3x^2 + 24x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{17}$

$d)\ 5x^2 - 20x = 50 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{14}$

$e)\ 2x^2 - 20x = 6 - 10x \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

$f)\ 7x = 8 - 3x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{145}}{6}$

$g)\ 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

$h)\ x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.8.1).

12.5.10 Lösungen zur Substitution

Aufgabe 1:

$a)\ (x^2 + x + 1)^3 = 8$ mit: $y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y^3 = 8$

$b)\ (a + 4x)^{\frac{1}{2}} = 6b - c$ mit: $y^2 = 4x + a \Rightarrow \sqrt{y^2} = 6b - c$

$c)\ (18x - 4ab)^2 = c$ mit: $\sqrt{y} = 18x - 4ab \Rightarrow \sqrt{y}^2 = c$

$d)\ d)\ 2^{2a-c} = 32$ mit: $b = 2a - c \Rightarrow 2^b = 32$

$e)\ x = 4a$ mit: $y = x + 4a \Rightarrow y + 4a = 4a$

$f)\ x^2 + 8x + 16 = 0$ mit: $(y+4)^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow (y+4)^2 = 0$

$g)\ (3a + 2x)(2x - 3a) = 0$ mit: $y = 2x + 3a \Rightarrow y^2 - 6ya = 0$

$h)\ \ln(x^2 + 4x) = 2$ mit: $y = x^2 + 4x \Rightarrow \ln y = 2$

Aufgabe 2:

$a)$ $x^3 + 4x^2 - x - 8 = 0 \Rightarrow y - 8 = 0$ mit: $y = x^3 + 4x^2 - x$

$b)$ $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{y} = 0$ mit: $y = \frac{x}{2}$

$c)$ $\frac{x^2}{ab} + \frac{5}{ab} - 3 = 0 \Rightarrow dx^2 + 5d - 3 = 0$ mit : $d = \frac{1}{ab}$

$d)$ $\frac{ax^2+bx-c}{5} = 0 \Rightarrow \frac{y}{5a} = 0$ mit: $y = a\left(ax^2 + bx - c\right)$

$e)$ $ax + bx + cx + xd + xe - f = 0 \Rightarrow gx - f = 0$ mit: $g = a + b + c + d + e$

$f)$ $x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{4} + 2\right)^2 = 0$ mit: $y = 4x - 8$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.9).

12.5.11 Lösungen zu Fakultäten

Aufgabe 1:

$a)$ $5! = 120$ $b)$ $3! = 6$ $c)$ $\frac{7!}{5!} = 120$

$d)$ $\frac{3!}{4!} \cdot 0! = \frac{1}{4}$ $e)$ $\frac{(4b)!}{b!} = 24$ $f)$ $4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$

Aufgabe 1:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$ $b)$ $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 70$ $c)$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 289 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$

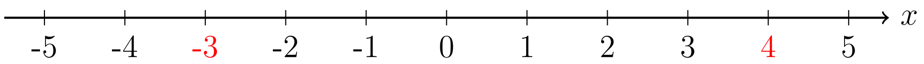
$d)$ $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 21$ $e)$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ $f)$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 3 = 18$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.10).

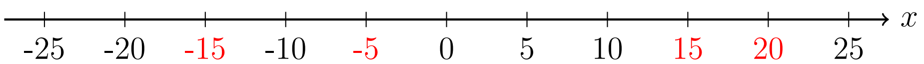
12.5.12 Lösungen zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1:

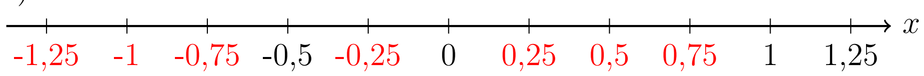
a)



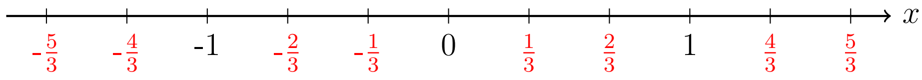
b)



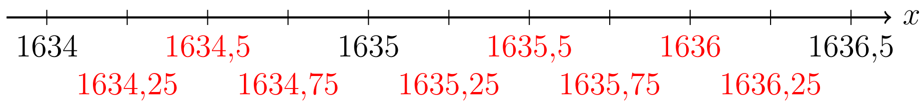
c)



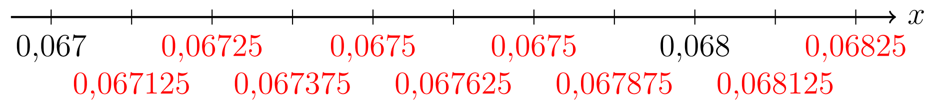
d)



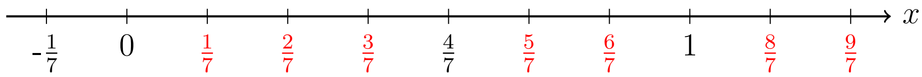
e)



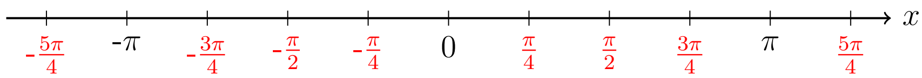
f)



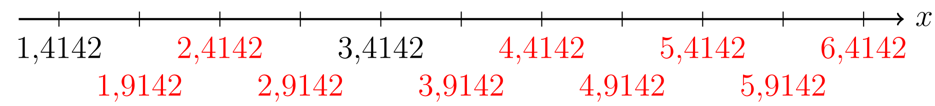
g)



h)



i)



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.1).

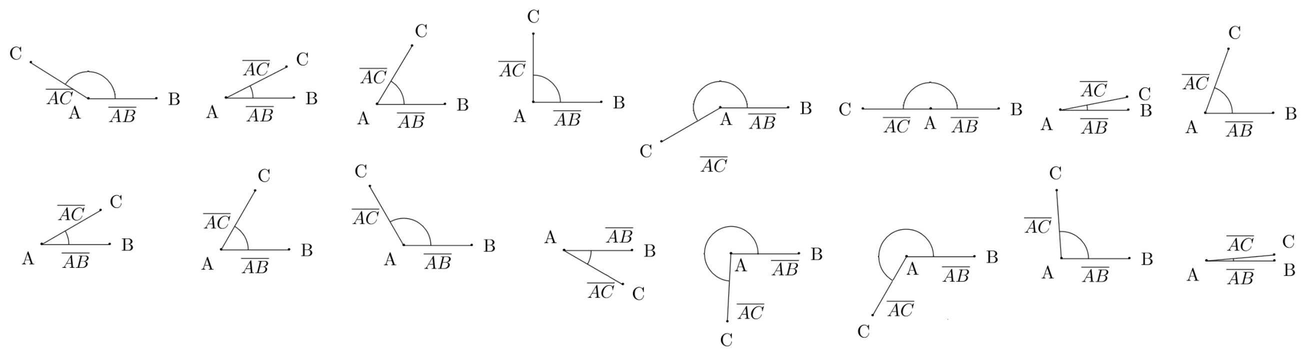
12.5.13 Lösungen zu Winkeln

Aufgabe 1:
$\measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) =$

57°: spitzer Winkel | 133°: stumpfer Winkel | 14°: überspitzer Winkel
214°: überstumpfer Winkel | 75°: spitzer Winkel | 300°: überstumpfer Winkel
117°: stumpfer Winkel | 91°: stumpfer Winkel | 270°: überstumpfer Winkel
179°: stumpfer Winkel | 8°: überspitzer Winkel | 45°: spitzer Winkel

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:
$a \parallel b$, $c \nparallel, d$ $e \parallel, f$
$g \nparallel h$, $i \parallel, j$ $k \parallel, l$
Zusätzliche Parallelitäten: $a \parallel c$, $b \parallel c$



Aufgabe 4:
$a \not\perp b$, $c \not\perp d$, $e \perp f$, $g \not\perp h$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.2).

12.5.14 Lösungen zu Rechtecken

Aufgabe 1:
a) $A = 18cm^2$ und $U = 18cm$
b) $A = 14cm^2$ und $U = 18cm$
c) $A = 108cm^2$ und $U = 42cm$
d) $A = 68cm^2$ und $U = 42cm$
e) $A = 81cm^2$ und $U = 60cm$
f) $A = 90cm^2$ und $U = 123cm$
g) $A = 1cm^2$ und $U = 5cm$

Aufgabe 2:
a) $A = 1,8dm^2$ und $U = 7,2dm$
b) $A = 4500mm^2$ und $U = 280mm$
c) $A = 180600cm^2$ und $U = 1700cm$
d) $A = 0,4cm^2$ und $U = 4,4cm$
e) $A = 0,3dm^2$ und $U = \frac{2431}{45}dm \approx 54,022dm$
f) $A = 9000m^2$ und $U = 18250m$
g) $A = 1200\sqrt{111}cm^2 \approx 12642,785cm^2$ und $U = 20\sqrt{111}cm + 240cm \approx 450,713cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.3).

12.5.15 Lösungen zu Dreiecken

Aufgabe 1:
a) $g = 9cm$, $a = 4cm$ und $h_g = 3cm$: $p = \sqrt{7}cm$, $q = 9cm - \sqrt{7}cm$, $b \approx 6,51cm \Rightarrow A = 13,5cm^2$, $U \approx 19,51cm$
b) $g = 11cm$, $a = 5cm$ und $h_g = 2cm$: $p = \sqrt{21}cm$, $q = 11cm - \sqrt{21}cm$, $b \approx 6,72cm$ $\Rightarrow A = 11cm^2$, $U \approx 22,72cm$
c) $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $h_c = 2cm$: $p = \sqrt{32}cm$, $q = \sqrt{45}cm$, $c = p + q \Rightarrow A \approx 12,37cm^2$, $U \approx 22,37$
d) $g = 7cm$, $b = 6cm$ und $h_g = 1cm$: $p = \sqrt{35}cm$, $q = 7cm - \sqrt{35}cm$, $a \approx 1,48cm$ $\Rightarrow A = 3,5cm^2$, $U \approx 14,48cm$
e) $p = 2,5cm$, $q = 2cm$ mit einem rechten Winkel: $c = 4,5cm$, $h_c = \sqrt{5}$, $a \approx 3,35cm$, $b = 3cm$ $\Rightarrow A \approx 5,03cm^2$, $U \approx 10,85cm$
f) $c = 12cm$, $q = 3cm$ und $a = 5cm$: $h_c = 4cm$, $p = 9cm$, $b \approx 9,85cm \Rightarrow A = 24cm^2$, $U \approx 26,85cm$

Aufgabe 2:
Da das Geodreieck mit einem 45° Winkel zum Boden gehalten wird, ist der Abstand zum Turm gleich die Resthöhe des Turms, da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt. Die Höhe, in der das Geodreieck gehalten wird, muss anschließend noch dazu addiert werden: $h = 21,5m$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.4).

12.5.16 Lösungen zu Vierecken

Aufgabe 1:
a) Quadrat: $a = 2cm$: $\Rightarrow A = 4cm^2$, $U = 8cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm$: $\Rightarrow A = 20cm^2$, $U = 20cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm$, $b = 3cm$ und $h_a = 2cm$: $\Rightarrow A = 12cm^2$, $U = 18cm$
d) Trapez: $a = 4cm$, $c = 11cm$, $d = b$ und $h = 4cm$: $b \approx 5,32$, $\Rightarrow A = 30cm^2$, $U \approx 25,64cm$
e) Drachen: $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $e = 6cm$: $d \approx 7,84cm \Rightarrow A \approx 47,04cm^2$, $U = 20cm$

Aufgabe 1:
a) $A = 8cm^2 + 18cm^2 + 20cm^2 = 46cm^2$, $U = 2 \cdot 2cm + 4cm + 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{45} \approx 28,63cm$
b) $A = 2 \cdot 9cm^2 + 2 \cdot 10cm^2 + 36cm^2 = 74cm^2$, $U = 2 \cdot 4cm + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{18} \approx 33,92cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.5).

12.5.17 Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1:
a) Würfel: $a = 3cm \quad \Rightarrow V = 27cm^3, O = 54cm^2$
b) Quader: $a = 2cm$, $b = 9cm$ und $c = 4cm \quad \Rightarrow V = 72cm^3, O = 122cm^2$
c) Pyramide: $b = a = 4cm$ und $h = 6cm \quad \Rightarrow V = 32cm^3, O = 2\sqrt{52}\cdot 6cm^2 + 16cm^2 \approx 102,53cm^2$
d) Pyramide: $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $h = 5cm \quad \Rightarrow V = 20cm^3, O = 5\sqrt{41}cm^2 + 5\sqrt{34}cm^2 + 12cm^2 \approx 73,17cm^2$
e) Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$: $a = 6cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 4cm \quad \Rightarrow V = 80cm^3, O = 6\cdot 5cm^2 + 2\cdot 4\cdot 6cm^2 + 2\cdot 4\cdot 5cm^2 + 4\cdot\sqrt{41}cm^2 + 4\cdot\sqrt{52}cm^2 \approx 172,46cm^2$
f) Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf: $a = 2,5cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 2,5cm \quad \Rightarrow V \approx 41,67cm^3, O \approx 72,81cm^2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.6).

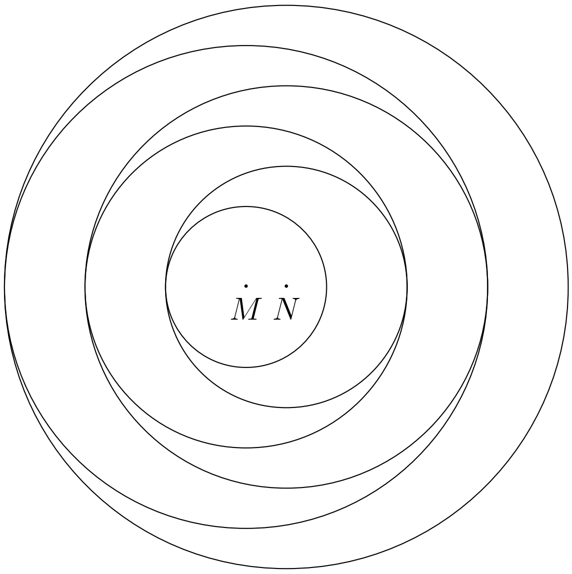
12.5.18 Lösungen zu Kreisen

Aufgabe 1:
a) $r = 3cm, \Rightarrow A \approx 28,27cm^2, U \approx 18,85cm,$
b) $r = \pi cm, \Rightarrow A \approx 31,01cm^2, U \approx 19,74cm,$
c) $d = 4cm, \Rightarrow A \approx 12,57cm^2, U \approx 12,57cm,$
d) $d = 0,5cm, \Rightarrow A \approx 0,20cm^2, U \approx 1,57cm,$
e) $r = 2,718cm, \Rightarrow A \approx 23,21cm^2, U \approx 17,08cm,$
f) $d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow A \approx 2,31cm^2, U \approx 5,39cm,.$

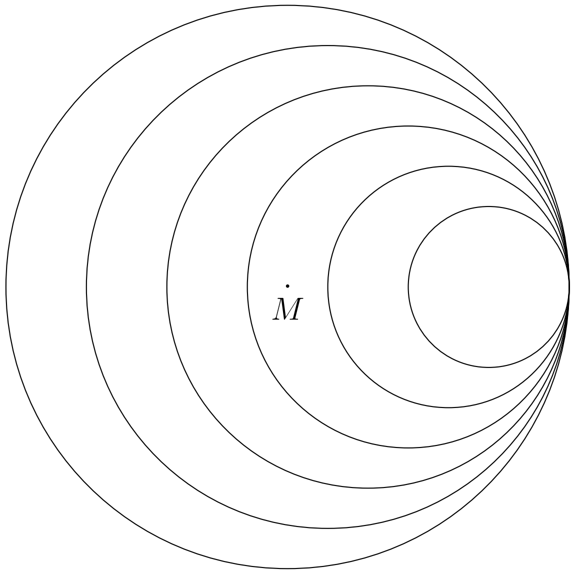
Aufgabe 2:
a) $\alpha = 60°$ und $r = 5cm, \Rightarrow A \approx 13,09cm^2, U \approx 15,24cm,$
b) $\alpha = 230°$ und $r = 2cm, \Rightarrow A \approx 8,03cm^2, U \approx 12,03cm,$
c) $\alpha = 177°$ und $r = \sqrt{17}cm, \Rightarrow A \approx 26,26cm^2, U \approx 20,98cm,$
d) $\alpha = 55°$ und $r = 3cm, \Rightarrow A \approx 4,32cm^2, U \approx 8,88cm,$
e) $\alpha = 145°$ und $r = 7cm, \Rightarrow A \approx 62,00cm^2, U \approx 31,72cm,$
f) $\alpha = 310°$ und $r = 2,5cm, \Rightarrow A \approx 16,91cm^2, U \approx 18,53cm.$

Aufgabe 3:
(Alle Größen wurden mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.)

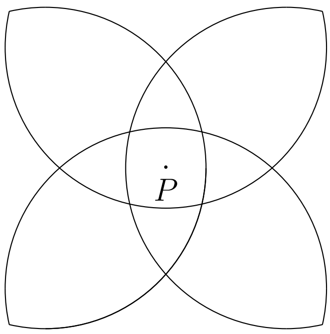
a)



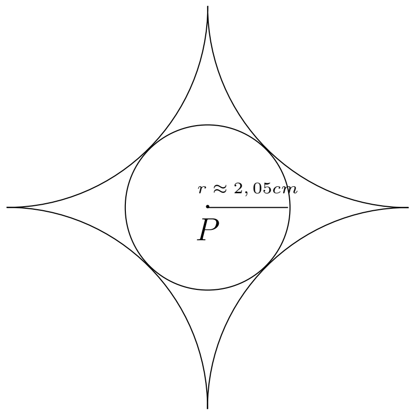
b)



c)

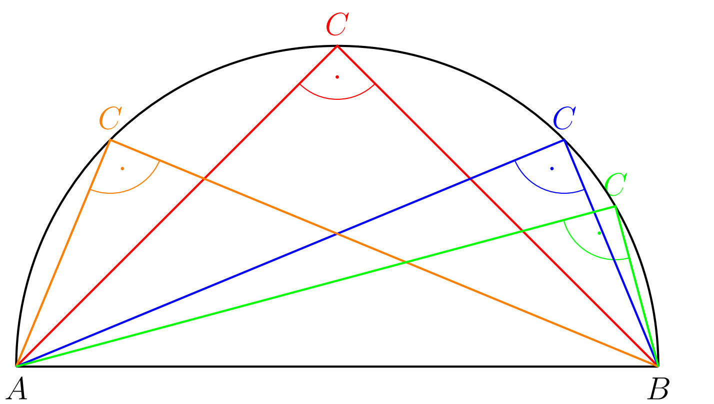


d)



Aufgabe 4:
Der Abstand der Mittelpunkte nimmt nach rechts immer weiter um $0,5cm$ zu, während die Radien der Kreise um $0,5cm$ abnehmen.

Aufgabe 5:



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.7.2).

12.5.19 Lösungen zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1:
a) $r = 5cm$ und $h = 11cm$, $\Rightarrow V \approx 863,94cm^3, O \approx 329,87cm^2$,
b) $r = 47cm$ und $h = 85cm$, $\Rightarrow V \approx 589551,15cm^3, O \approx 26430,22cm^2$,
c) $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm$, $\Rightarrow V \approx 0,59cm^3, O \approx 2,75cm^2$,
d) $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm$, $\Rightarrow V \approx 43,98cm^3, O \approx 60,61cm^2$,
e) $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm$, $\Rightarrow V \approx 38,25cm^3, O \approx 50,60cm^2$,
f) $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm$, $\Rightarrow V \approx 68,02cm^3, O \approx 323,78cm^2$.

Aufgabe 2:
a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm$, $\Rightarrow V \approx 45,24cm^3, s \approx 4,83cm, O \approx 110,91cm^2$,
b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm$, $\Rightarrow V \approx 0,84cm^3, s \approx 1,47cm, O \approx 12,81cm^2$,
c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm$, $\Rightarrow V \approx 220,65cm^3, s \approx 8,22cm, O \approx 334,60cm^2$,
d) $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm$, $\Rightarrow V \approx 8,55cm^3, s \approx 4,25cm, O \approx 25,47cm^2$,
e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm$, $\Rightarrow V \approx 36,65cm^3, s \approx 5,19cm, O \approx 160,10cm^2$,
f) $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm$, $\Rightarrow V \approx 0,15cm^3, s \approx 9,00cm, O \approx 3,58cm^2$.

Aufgabe 3:
a) $r_1 = 4cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm$, $\Rightarrow V \approx 146,61cm^3, s_1 \approx 5,39cm, O \approx 164,34cm^2$,
b) $r_1 = 3,5cm$, $r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm$, $\Rightarrow V \approx 144,78cm^3, s_1 \approx 7,28cm, O \approx 159,91cm^2$,
c) $r_1 = 6cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm$, $\Rightarrow V \approx 490,09cm^3, s_1 \approx 9,85cm, O \approx 373,19cm^2$,
d) $r_1 = \frac{1}{3}cm$, $r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm$, $\Rightarrow V \approx 40,32cm^3, s_1 \approx 6,78cm, O \approx 38,55cm^2$,
e) $r_1 = 1cm$, $r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm$, $\Rightarrow V \approx 56,81cm^3, s_1 \approx 4,37cm, O \approx 163,98cm^2$,
f) $r_1 = \pi cm$, $r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm$, $\Rightarrow V \approx 38,20cm^3, s_1 \approx 1,48cm, O \approx 81,39cm^2$.

Aufgabe 4:
Beide Körper haben das gleiche Volumen und die gleiche Oberfläche. $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(h_1 + h_2)r_1^2 - 2\frac{1}{3}\pi h_2 r_2^2 \approx 100,53cm^3, O = \pi r_1^2 + \pi(s_1 + s_2)r_1 \approx 499,85cm^2$. Dabei ist das Volumen des kleines Kegels zweimal vom großen Kegel zu subtrahieren. Die Oberfläche ist dabei identisch zur Oberfläche eines großen Kegels.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.8).

12.5.20 Lösungen zu Kugeln

Aufgabe 1:
a) $r = 3cm, \Rightarrow V \approx 113,10cm^3, O \approx 113,10cm^2$,
b) $r = \pi cm, \Rightarrow V \approx 129,88cm^3, O \approx 124,03cm^2$,
c) $d = 4cm, \Rightarrow V \approx 33,51cm^3, O \approx 50,27cm^2$,
d) $d = 0,5cm, \Rightarrow V \approx 0,066cm^3, O \approx 0,785cm^2$,
e) $r = 2,718cm, \Rightarrow V \approx 84,11cm^3, O \approx 92,83cm^2$,
f) $d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow V \approx 2,64cm^3, O \approx 9,23cm^2$.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.9).

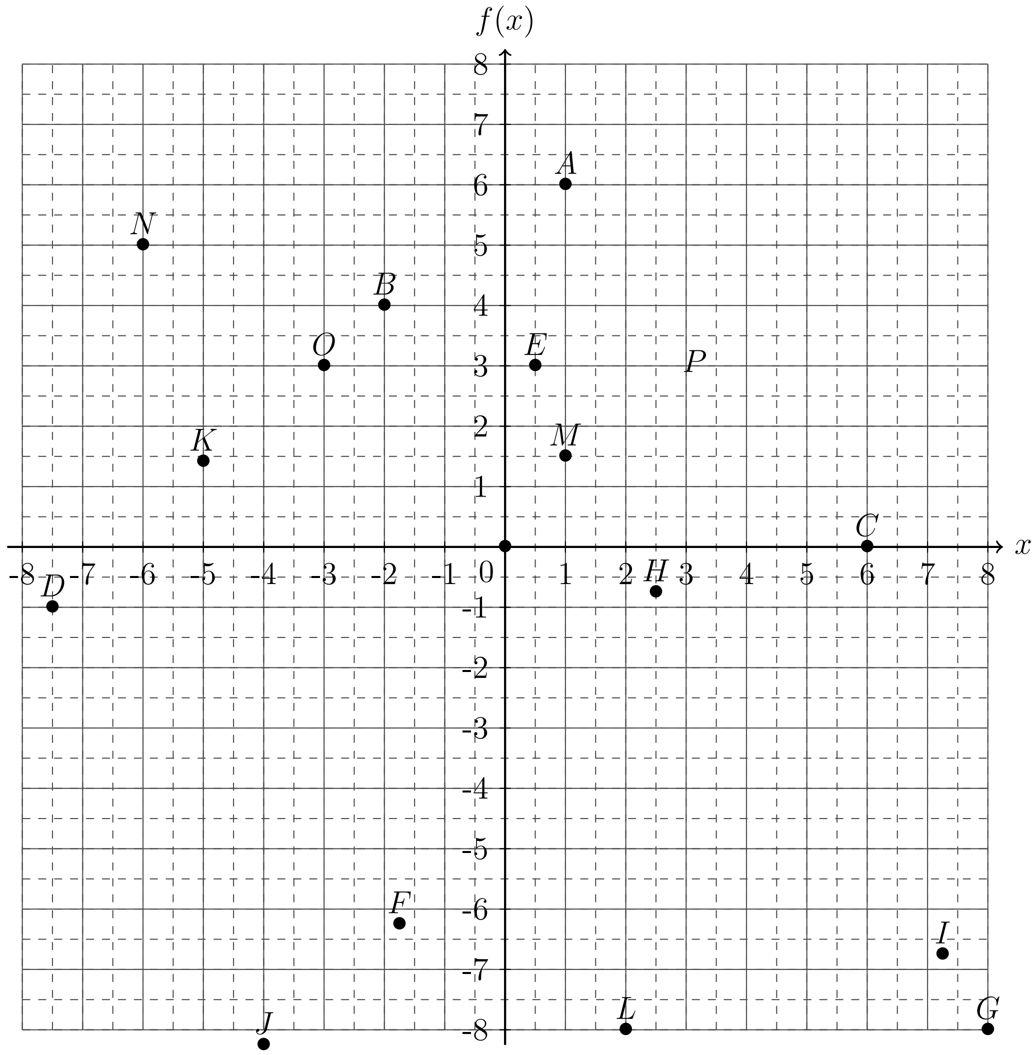
12.5.21 Lösungen zur Trigonometrie

Aufgabe 1:
a) $a = 7cm$ und $c = 11cm$: $\Rightarrow b \approx 8,49cm, \alpha \approx 39,52°, \beta \approx 50,48°$
b) $a = 4cm$ und $b = 6cm$: $\Rightarrow c \approx 7,21cm, \alpha \approx 33,69°, \beta \approx 56,31°$
c) $\alpha = 55°$ und $c = 9cm$: $\Rightarrow a \approx 7,37cm, b \approx 5,16cm, \beta \approx 35°$
d) $a = 5,35cm$ und $\beta = 18°$: $\Rightarrow b \approx 1,74cm, \alpha \approx 72°, c \approx 5,63cm$
e) $b = 14cm$ und $\beta = 81°$: $\Rightarrow c \approx 14,18cm, a \approx 2,22cm, \beta \approx 9°$
f) $a = \pi cm$ und $\alpha = 27,18°$: $\Rightarrow b \approx 6,12cm, c \approx 6,88cm, \beta \approx 62,82°$
g) $c = \sqrt{60}cm$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi$rad: $\Rightarrow b \approx 6,71cm, a \approx 3,87cm, \alpha \approx 30°$
h) $c = \frac{83}{17}cm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi$rad: $\Rightarrow b \approx 2,12cm, a \approx 4,40cm, \beta \approx 64,29°$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4).

12.5.22 Lösungen zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

a)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	7	5	3	2	1	0	-1

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	5,83	3,67	2,6	0,71	-2,44	-3,28	-5,25

b)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2

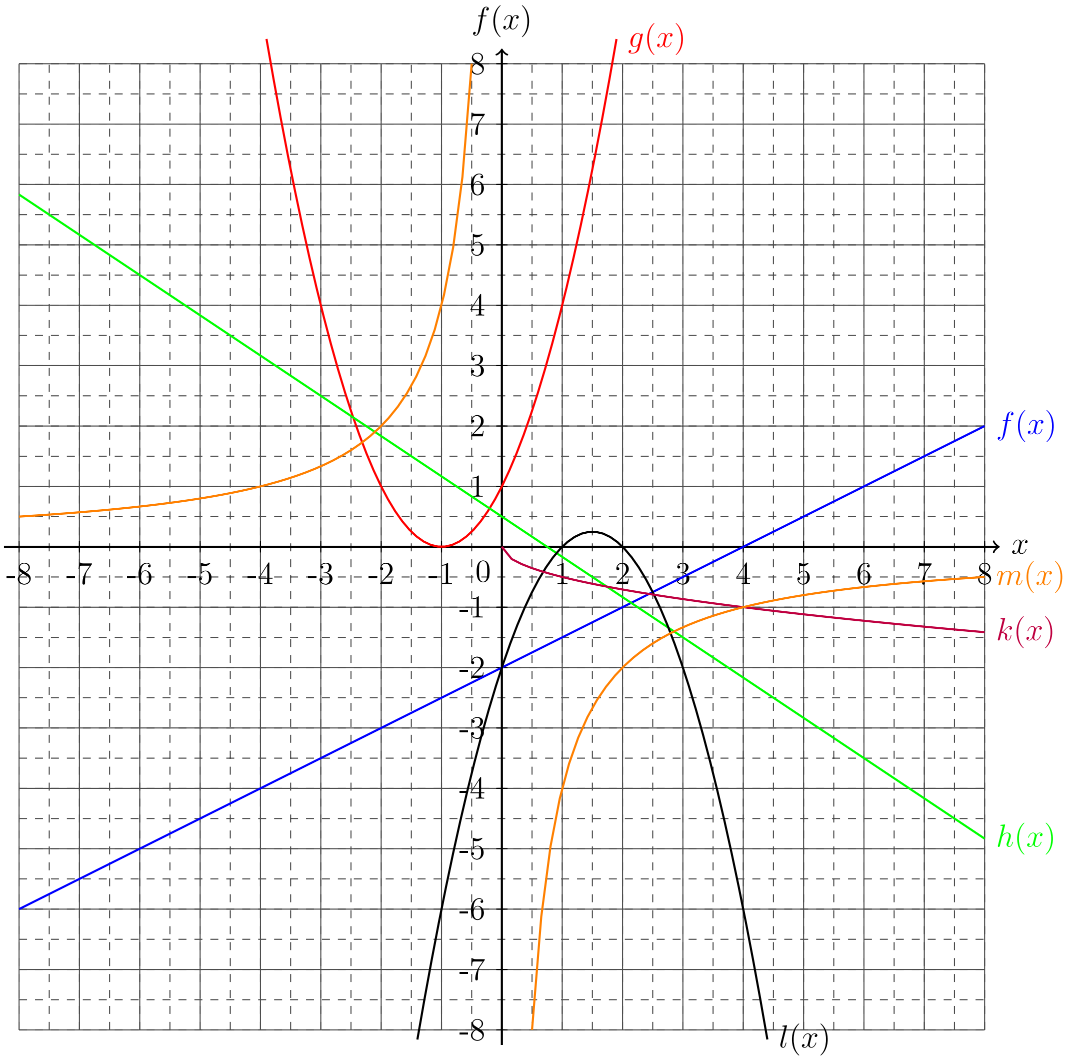
c)

d)

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-12,49	$\frac{1}{3}$	-3,08	-4,94	3,86	8,76	24,26

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	$\frac{9}{8}$	-1	$\frac{29}{8}$	-6

Aufgabe 3:



a) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$
b) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{g(x) \in \mathbb{R}^+\}$
c) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{h(x) \in \mathbb{R}\}$
d) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^+\}, \quad \mathbb{W} = \{k(x) \in \mathbb{R}^-\}$
e) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \left\{l(x) \in \mathbb{R} | l(x) \leq \frac{1}{4}\right\}$
f) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \quad \mathbb{W} = \{m(x) \in \mathbb{R}\}$

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,83	1,52	1,85	-1,73	7,47	-6,47	4,09

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	-$\frac{87}{16}$	-6	- $\frac{71}{16}$	3

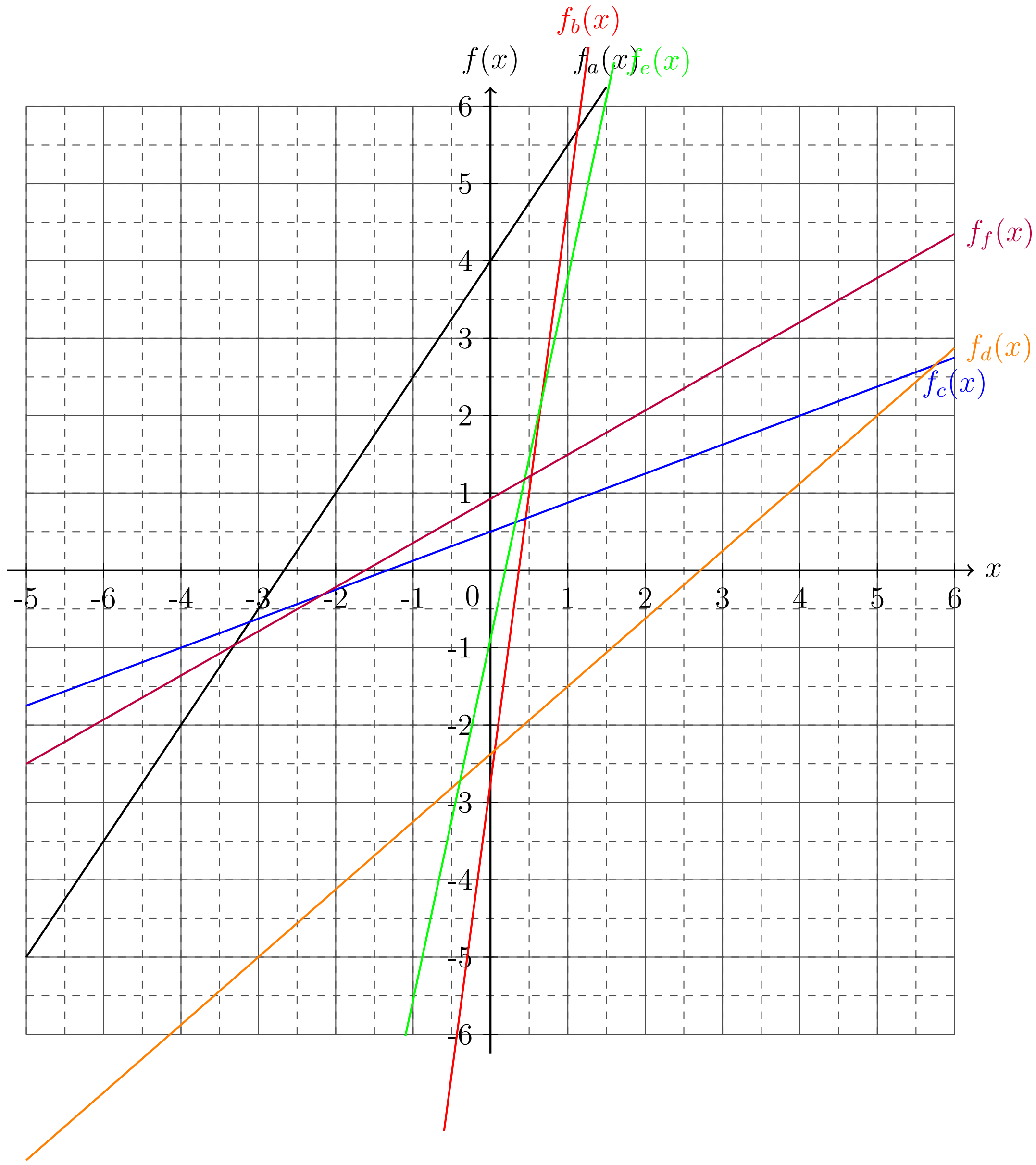
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	- $\frac{422}{81}$	-5,08	-5,91	34,82	72,67	250

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.1).

12.5.23 Lösungen zu Geraden

Aufgabe 1:

$a)$ $f_a(x) = \frac{3}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow x_N = -\frac{8}{3}$
$b)$ $f_b(x) = \frac{15}{2} \cdot x - \frac{11}{4} \quad \Rightarrow x_N = \frac{11}{30}$
$c)$ $f_c(x) = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_N = -\frac{4}{3}$
$d)$ $f_d(x) = \frac{7}{8} \cdot x - \frac{19}{8} \quad \Rightarrow x_N = \frac{19}{7}$
$e)$ $f_e(x) = \frac{14}{3} \cdot x - \frac{8}{9} \quad \Rightarrow x_N = \frac{4}{21}$
$f)$ $f_f(x) = \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot x + e - \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot \pi$
$f_f(x) \approx 0,571 \cdot x + 0,925 \quad \Rightarrow x_N = -1,620$



Aufgabe 2:

a) $f_a(x) = \frac{5}{4} \cdot x + 1$
b) $f_b(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$
c) $f_c(x) = -2 \cdot x + \frac{9}{4}$
d) $f_d(x) = 6 \cdot x - 2$
e) $f_e(x) = -\frac{1}{4} \cdot x - 5$
f) $f_f(x) = -x + \frac{1}{3}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.2).

12.5.24 Lösungen zu Parabeln

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.3).

Implementierungsnotizen

Grundrechenarten
$+(-1) = -(+1)$
$(-1)(+2) = (+1)(-2)$
Distributionen
$\frac{1}{0}$
$\sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$
Runden
Strahlensatz
Symmetrien und Spiegeln
Sinus- und Kosinussatz
Betrag