Repetitorium der Mathematik

mit Beispielen aus der Physik

von

Martin Lommatzsch

3. Mai 2015

Vorwort

Dieses Repetitorium ist aus der Motivation entstanden den naturwissenschaftlichen Unterricht an Schulen für die Schüler zu erleichtern. Dazu werden in den ersten Kapiteln mathematische Grundlagen in Form von Vokabeln, Zahleneigenschaften, Rechenoperationen und Abkürzungen eingeführt. Da viele Schüler von der gesellschaftlichen Meinung, Mathematik und Naturwissenschaften seien schwer, zu Ausreden in der Leistung inspiriert werden, soll in diesem Buch explizit auf die Einfachheit der mathematischen Sprache hingewiesen werden. Dieser Trivialität gehen allerdings einige Dinge voraus, die dem durchschnittlichen Schüler erst nach seiner Schullaufbahn bewusst werden - das Mathematik vom Vokabular legt, da Wörter und ihre Abkürzungen eindeutige Bedeutungen erhalten, welche in anderen Sprachen, wie Deutsch oder Englisch, oftmals erst durch den Satz eine genauere Bedeutung erhalten. Auch soll dargestellt werden, dass es in der Mathematik im Vergleich zu anderen Sprachen keine Ausnahmen gibt.

Dieses Buch soll ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht werden und als Wiederholungswerk für die naturwissenschaftlichen Fächer dienen. Aus diesem Grund wird sich dieses Werk ständig weiterentwickeln und dabei auf das Verständnis der Schüler ausgerichtet werden. Als Grundlage zum Verständnis dieses Buches soll der Umgang mit Zahlen und Grundrechenoperationen genügen, sodass es für jeden Schüler einer weiterführenden Schule geeignet ist. In diesem Buch wird schnell deutlich, dass das mathematische Verständnis stark verknüpft mit der korrekten Verwendung von definierten Begriffen ist. Deswegen sollte jeder Schüler angeregt werden die jeweiligen eingeführten Vokabeln zu verinnerlichen.

Zu jedem Abschnitt werden Übungsaufgaben existieren, welche mit den Lösungen im Anhang verglichen werden können. Die Aufgaben sind so gestellt, dass sie das Verständnis überprüfen und vertiefen. Deswegen ist es ratsam, wenn alle Aufgaben bearbeitet und erst danach mit den Lösungen verglichen werden. Auch werden Aufgaben gestellt, die erst mit Wissen aus den nachfolgenden Kapiteln zu lösen sind. Diese Aufgaben sollten bearbeitet werden, wenn das Wissen mit dem Umgang der Abkürzungen oder Operatoren bekannt ist, um das schon bestehende Wissen zu reaktivieren und weiter zu vertiefen.

Alle Wörter die leicht *schräggestellt* sind, können im Anhang des Buches in einem mathematischen Wörterverzeichnis mit einer kurzen Erklärung nachgeschlagen werden. Der Abschnitt zum Nachschlagen der Wörter soll dem Schüler den Umgang mit der mathematischen Sprache erleichtern und auch aufzeigen, wie aufbauend die mathematische Sprache ist.

Zu Letzt sei angemerkt, dass in absehbarer Zeit wesentlich mehr Aufgaben mit Lösungen es in dieses Buch schaffen werden. Des Weiteren werden auch Aufgaben folgen, die Abschnitte voraussetzen, welche weiter hinten im Buch sind. Zu diesen Aufgaben werden Hinweise auf die betreffenden Abschnitte geliefert, sodass je nach Vorwissen auch komplexere Aufgaben bearbeitet werden können. Generell sollten die Schüler die Aufgaben mit den Rechenmethoden lösen wie es ihnen beliebt, da das Ergebnis das wichtigste an einer Rechnung ist. Folglich sind alle Rechenwege zugelassen, die keine Fehler beinhalten.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

Zahlen können in verschiedene Kategorien, sogenannter *Mengen*, eingeordnet werden. Dabei bilden die sogenannten *natürlichen Zahlen* die Basis aller anderen Zahlenmengen, die in der Schule besprochen werden. Die natürlichen Zahlen werden durch das Symbol $\mathbb{N}$ beschrieben und beinhalten Zahlen wie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$. Die mathematische Schreibweise dazu wäre: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, wobei in den geschweiften Klammern $\{\}$ alle Zahlen aufgelistet werden, die zur *Zahlenmenge* gehören. Oftmals werden die *natürlichen Zahlen* auch ohne Null verwendet und werden im Folgenden als $\mathbb{N}^+$ bezeichnet. Die erste Erweiterung der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Bei genauem Betrachten fällt auf, dass die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ eine *Teilmenge* der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, was mit dem *Mengenoperator* $\subset$ („ist *Teilmenge* von“) wie folgt geschrieben wird:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Die Folgen der Einführung der *ganzen Zahlen* sind gravierend, da die *Subtraktion* damit an Wichtigkeit verliert, da zum Beispiel aus $-1 = +(-1)$ wird.
Die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind alle Zahlen, die durch *Brüche* dargestellt werden können. Diese Zahlen werden *rationale Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{7}, 1, 2, \frac{34}{15}, ...\right\}$ genannt.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.2}$$

Aber es gibt auch noch Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Diese werden *reelle Zahlen* $\mathbb{R}$ genannt und beherbergen Zahlen wie zum Beispiel π, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Die letzte Erweiterung der Zahlenmengen wird durch die Zahl $i = \sqrt{-1}$ gegeben und führt somit die *komplexen Zahlen* ein $\mathbb{C}$. *Komplexe Zahlen* werden in der Regel nicht an Schulen besprochen, dennoch hat ihre Einführung einige Vorteile beim Beschreiben von Zusammenhängen im Bereich der *Analysis*[1].

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{1.3}$$

Es ist möglich *Teilmengen* auf zustellen, dazu werden bestimmte *Mengenoperatoren* wie $\subset$ verwendet. Sei die *Menge* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die *Menge* $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$ gegeben, dann existieren folgende *Mengenoperationen*:

[1] Die *Analysis* ist eines der großen Teilgebiete der Mathematik neben der *Algebra*. Der Begriff rührt von analysieren her.

Die *Vereinigung* $\cup$, welche wie folgt dargestellt wird:

$$\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \textit{Vereinigung} \text{ von } \mathbb{M} \text{ mit } \mathbb{K} \tag{1.4}$$

Die *Vereinigung* wird auch gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ oder $\mathbb{K}$ befinden“, damit ist gemeint, dass alle Zahlen der ersten *Menge* $\mathbb{M}$ und alle Zahlen der zweiten *Menge* $\mathbb{K}$ eine neue *Menge* bilden in der alle Zahlen aus der *Menge* $\mathbb{M}$ und der *Menge* $\mathbb{K}$ vorkommen. Das mathematische „oder“ ist anders zu gebrauchen als das „oder“ im normalen Sprachgebrauch, da es in der Sprache im Zusammenhang betrachtet werden muss, während es immer die selbe Vorgehensweise in der Mathematik fordert.

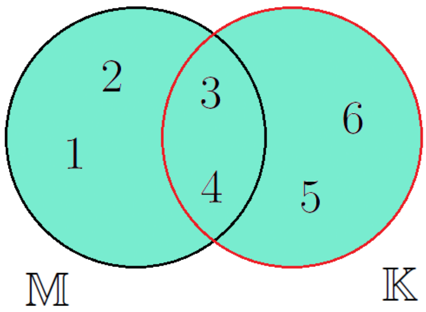


Abbildung 1.1: *Vereinigung* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Vereinigung* der beiden *Mengen*.

Die Abbildung (1.1) zeigt wie in der *Menge* $\mathbb{M}$ die Zahlen $1, 2, 3$ und 4 und in der *Menge* $\mathbb{K}$ die Zahlen $3, 4, 5$ und 6 enthalten sind, da $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eine weitere *Mengenoperation* ist der sogenannte *Durchschnitt* $\cap$:

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 4\} \qquad \textit{Durchschnitt} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.5}$$

Der *Durchschnitt* wird gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ befinden“. Auch hier ist zu unterscheiden zwischen dem mathematischen und sprachlichen „und“.

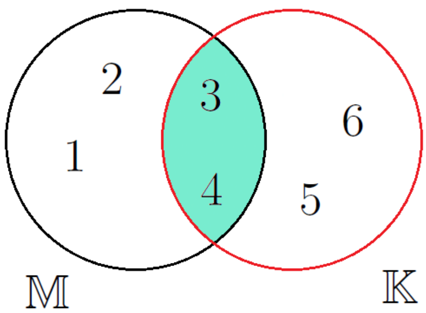


Abbildung 1.2: *Durchschnitt* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet den *Durchschnitt* der beiden *Mengen*.

Die Abbildung (1.2) zeigt, was sich hinter dem mathematischen logischen *Operator* „und“ verbirgt. Der *Durchschnitt* ist gegeben als alle Zahlen einer *Menge*, die auch in der anderen *Menge* vorhanden sind. Somit sind nur die 3 und die 4 in diesem Fall in der resultierenden *Durchschnittsmenge*.

Die letzte wichtige *Mengenoperation* ist die *Differenz* $\setminus$:

$$\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 2\} \qquad \textit{Differenz} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.6}$$

Dabei wird die *Differenz* gelesen als „Alle Zahlen von $\mathbb{M}$ ohne die Zahlen aus $\mathbb{K}$ “. Grafisch veranschaulicht würde dies wie folgt aussehen:

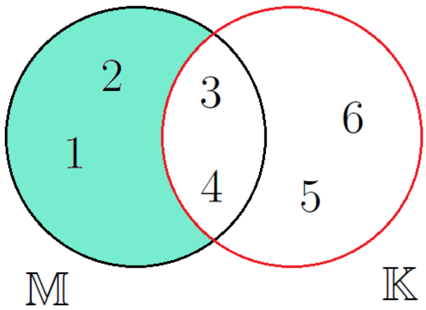


Abbildung 1.3: *Differenz* von $\mathbb{M}$ ohne $\mathbb{K}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{M}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{K}$ enthalten sind.

Deutlich zu erkennen ist, dass die Zahlen, welche in beiden *Mengen* $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ vorkommen nicht Teil der resultierenden *Menge* sind. Außerdem wird deutlich, dass die resultierende *Menge* sich unterscheidet wenn die *Mengen* bei dieser *Operation* umdrehen würde.

$$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{5, 6\} \qquad \text{Differenz von } \mathbb{K} \text{ und } \mathbb{M} \tag{1.7}$$

Diese Umkehrung der *Mengen* bei der *Operation* hätte ein vollkommen anderes Ergebnis, wie auch in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

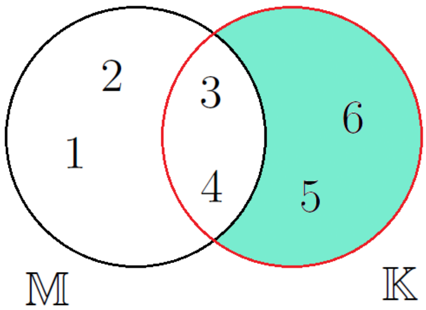


Abbildung 1.4: *Differenz* von $\mathbb{K}$ ohne $\mathbb{M}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{K}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{M}$ enthalten sind.

Es wird deutlich, dass bei der *Differenz* von *Mengen* $\setminus$ die Reihenfolge entscheidender Natur ist, während sich der *Durchschnitt* und die *Vereinigung* nicht verändern würden.

Nun da alle wichtigen *Mengenoperationen* eingeführt wurden, werden noch einige wichtige mathematische Abkürzungen eingeführt, welche zur Beschreibung einer Menge des Öfteren von Nöten sein. Diese Abkürzungen können als Vokabeln angesehen werden, welche jeder Schüler beherrschen sollte.
Wenn eine Zahl ein *Element* einer Zahlenmenge ist, dann wird dies mathematisch geschrieben als:

$$4 \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

Weitere wichtige Abkürzungen der Mathematik werden nun aufgelistet und im Folgenden verwendet.

$$\begin{array}{ll}
\forall & \text{für alle gilt} \\
\exists & \text{es existiert} \\
\exists! & \text{es existiert genau ein} \\
\wedge & \text{und} \\
\vee & \text{oder} \\
\neg & \text{nicht} \\
:= & \text{definiert als} \\
\| & \text{parallel zu} \\
\perp & \text{orthogonal (senkrecht) zu} \\
\measuredangle & \text{Winkel zwischen} \\
\varnothing & \text{leere Menge} \\
\Rightarrow & \text{daraus folgt} \\
< & \text{kleiner als} \\
> & \text{größer als} \\
\stackrel{!}{=} & \text{setze gleich} \\
\stackrel{\wedge}{=} & \text{entspricht}
\end{array} \tag{1.9}$$

So würde der Satz „Die *Menge* $\mathbb{M}$ beinhaltet alle Zahlen x, die die Bedingung erfüllen, dass sie *Element* der *reellen Zahlen* sind und dass es genau ein Zahl e gibt durch die man die Zahl x teilen kann, sodass 1 dabei heraus kommt.“ mathematisch so aussehen:

$$\mathbb{M} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists! e \forall x \mid \frac{x}{e} = 1 \right\} \tag{1.10}$$

Mittels dieser Abkürzungen ist es möglich eine *Zahlenmenge* einzuführen, welche von besonderer Bedeutung ist - die *Primzahlen*. Also die Zahlen die nur durch selbst oder durch Eins teilbar sind. Diese Zahlenmenge kann wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{P} = \left\{ p \in \mathbb{N} | \nexists \frac{p}{n} \in \mathbb{N} \forall n \neq \{1, p\} \right\} \tag{1.11}$$

1.0.1 Übungsaufgaben zu Mengen

Aufgaben mit Zahlen, die noch unbekannt sind, können vorerst ausgelassen werden. Allerdings sollten diese nach der jeweiligen Einführung nachgeholt werden.

Aufgabe 1: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $4 \in$	*b)* $-1 \in$	*c)* $9 \in$	*d)* $0,45 \in$
e) $\frac{1}{2} \in$	*f)* $-6 \in$	*g)* $4,75 \in$	*h)* $0,\bar{3} \in$
i) $\frac{1}{81} \in$	*j)* $-\frac{3}{7} \in$	*k)* $3 \in$	*l)* $0,125 \in$
m) $0,01 \in$	*n)* $\frac{1}{11} \in$	*o)* $3,141 \in$	*p)* $-0,75 \in$

Aufgabe 2: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $0,\bar{6} \in$	*b)* $-\sqrt{4} \in$	*c)* $0 \in$	*d)* $\sqrt{3} \in$
e) $\frac{7}{8} \in$	*f)* $\sqrt{13} \in$	*g)* $\frac{2}{\sqrt{16}} \in$	*h)* $1\% \in$
i) $\frac{1}{\sqrt{5}} \in$	*j)* $-42 \in$	*k)* $\sqrt{144} \in$	*l)* $\frac{16}{2} \in$
m) $5,01 \in$	*n)* $17 \in$	*o)* $1,1\bar{6} \in$	*p)* $-\sqrt{64} \in$

Aufgabe 3: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $\lg 10 \in$	*b)* $\sqrt{9} \in$	*c)* $-7 \in$	*d)* $\pi \in$
e) $\frac{e^2}{2} \in$	*f)* $-\frac{1}{6} \in$	*g)* $1 \in$	*h)* $0,597813553 \in$
i) $\ln 2 \in$	*j)* $-e^{\ln \frac{1}{3}} \in$	*k)* $\log_3 9 \in$	*l)* $0,1 \in$
m) $28\% \in$	*n)* $\frac{\pi}{4} \in$	*o)* $\sqrt{17} \in$	*p)* $-\frac{1}{\ln e} \in$

Aufgabe 4: *Bestimme die Vereinigung, den Durchschnitt und jede mögliche Differenz der jeweiligen Mengen.*

a) $\mathbb{M} = \{1, 5, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8\}$
b) $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
c) $\mathbb{M} = \{5, 7, 9, 11\}$ und: $\mathbb{K} = \{4, 6, 8, 10\}$
d) $\mathbb{M} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) $\mathbb{M} = \{3, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$
f) $\mathbb{M} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Aufgabe 5: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 6\}$, $\mathbb{L} = \{4, 5, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} =$
b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) =$
e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) =$
f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L}\Delta\mathbb{K} =$
h) $\mathbb{M}\Delta\mathbb{K} =$

Aufgabe 6: *Bestimme* $\mathbb{M}\Delta\mathbb{K}$ *wie in Aufgabe 5 definiert und zeichne wie in den Abbildungen (1.1) bis (1.4) und kennzeichne die Fläche der resultierenden Menge. Hierbei soll* $\mathbb{M} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ *sein.*

Aufgabe 7: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ *und* $\mathbb{K} = \{\} = \varnothing$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} =$
b) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} =$
c) $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.1) Lösungen zu Mengen.

2 Algebraische Grundlagen

Um den naturwissenschaftlichen Unterricht und mathematischen Erklärungen besser folgen zu können, müssen die Begrifflichkeiten der *Algebra* geklärt werden. Dazu werden im Laufe dieses Kapitels die wichtigsten mathematischen Vokabeln, Abkürzungen und Rechenvorschriften erläutert.

2.1 Grundrechenarten

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begrifflichkeiten der Grundrechenarten und ihre schriftlichen Rechenverfahren erklärt werden. Dazu wird zunächst ein Beispiel betrachtet, um die Art dieser Rechnung zu verdeutlichen. Anschließend wird anhand eines weiteren Beispiels die Rechenvorschrift in ihrer schriftlichen Anwendung beschrieben.

- *Addition*: Die *Addition* ist die wichtigste Grundrechenart. Mit ihr werden Zahlen zusammengezählt, was immer durch den *Additionsoperator* $+$ beschrieben wird. Das Ergebnis, die sogenannte *Summe*, wird immer auf der anderen Seite eines Gleichheitszeichen $=$ geschrieben.

$$2 + 4 = 6 \tag{2.1}$$

Im Beispiel aus Gleichung (2.1) ist zu sehen, dass die Zwei mit der Vier zusammengezählt wurde, wie es der *Additionsoperator* $+$ (gesprochen „plus“) gefordert hat. Für größere Zahlen lohnt sich eine Schreibweise, die die Zahlen, die addiert werden sollen, untereinander schreibt. Dabei wird das Ergebnis unter einem Strich ausgerechnet.

$$\begin{array}{r} 1337 \\ +4265 \\ \color{red}{11} \\ \hline 5062 \end{array} \tag{2.2}$$

Bei dieser Art der Schreibweise, werden die Zahlen die untereinander stehen einzeln *addiert*. Dabei wird immer bei den hintersten Zahlen begonnen. Wenn die *addierte* Zahl höher ist als Neun, dann wird die Eins der Zehn zur nächsten Zahlenspalte hinzugezählt. Diese Eins wird auch oft Merkeins genannt und ist in der Beispielrechnung rot eingefärbt. Der Vorteil dieser Schreibweise ist es, dass niemals höhere Zahlen als 9 und 9 *addiert* werden können. Folglich benötigt der Schüler nur ein sehr gutes Zahlenverständnis von der Zahl 0 bis 18 um jegliche Additionsaufgabe zu lösen. Falls mehr als zwei *Summanden* (im Beispiel sind 1337 und 4265 die *Summanden*) vorkommen ist es immer erlaubt in einer Nebenrechnung zunächst nur zwei *Summanden* zu *addieren* um dann anschließend die *Summe* der ersten beiden *Summanden* mit der nächsten *Summanden* zu verrechnen.

- *Subtaktion*: Die *Subtraktion* ist das Gegenteil der *Addition* und wird durch den *Subtraktionsoperator* $-$ (gesprochen „minus“) beschrieben.

$$5 - 2 = 3 \tag{2.3}$$

Wie die Gleichung (2.3) zeigt, wird von der Zahl 5, dem sogenannten *Minuend*, die Zahl 2, dem *Subtrahend*, abgezogen. Das Ergebnis wird dabei *Differenz* genannt. Wie schon bei der *Addition* lohnt sich die Schreibweise, in der alle Zahlen untereinander aufgeführt werden.

$$\begin{array}{r} 6337 \\ -4265 \\ {\color{red}1} \\ \hline 2072 \end{array} \tag{2.4}$$

Auch bei der *Subtraktion* werden die Zahlen startend von hinten bearbeitet. Dabei kann die Zahl des *Subtrahenden* größer sein als die des *Minuenden*, wie in der zweiten Zahlenspalte. Hierbei ist die Zahl 6 statt von der 3 von der 13 zu subtrahieren. Die dazu geschriebene Zehn muss anschließend von der nächsten Zahlenspalte abgezogen werden, was durch die Merkeins in rot wieder symbolisiert wird. Auch bei der *Subtraktion* kann es vorkommen, dass mehrere *Subtrahenden* vorzufinden sind. Dabei sind zwei Arten von Nebenrechnungen zulässig: Die erste Variante sieht vor, dass die *Subtrahenden* nacheinander vom *Minuenden subtrahiert* werden, während die zweite Variante vorsieht, dass die *Subtrahenden addiert* werden und anschließend die *Summe* der *Subtrahenden* vom *Minuend* abgezogen werden.
Beim schriftlichen *Subtrahieren* kann maximal die Zahl 9 als *Subtrahend* der einzelnen Spalten auftauchen. Somit ist die größte Zahl von der abgezogen werden kann die 18. Folglich braucht der Schüler lediglich ein gutes Zahlenverständnis bei der *Subtraktion* von den Zahlen 0 bis 18.

- *Multiplikation*: Die *Multiplikation* ist die erste abkürzende Schreibweise, die ein der Schule eingeführt wird. Dabei wird die Rechnung $3 + 3 + 3 + 3$ abgekürzt zu $4 \cdot 3$, also vier mal die Drei, was durch den *Multiplikationsoperator* $\cdot$ beschrieben wird. Die schriftliche *Multiplikation* sieht Zahlen von 0 bis $9 \cdot 9 = 81$ vor, da auch hier die einzelnen *Ziffern* der Zahl nacheinander bearbeitet werden.

$$\begin{array}{r} 1337 \cdot 23 \\ \hline 2674 \\ +\ 3011 \\ \hline 29751 \end{array} \tag{2.5}$$

Aus der Gleichung (2.5) ist zu erkennen, dass die Zwei auf die Zahl 7 wirkt und danach auf die 3. Dabei wird die Zehn der Rechnung $2 \cdot 7 = 14$ mit zur nächsten Ziffer von rechts gezählt. Das Ergebnis wird so notiert, dass die am weitest stehende *Ziffer* direkt unter der betrachten Zahl steht (im Beispiel unter der 2). Anschließend wird dies mit der nächsten *Ziffer*, hier die Drei, wiederholt. Die untereinander geschriebenen Zahlen werden dann *addiert*, sodass sich das Ergebnis, das sogenannte *Produkt*, dann ergibt. Die Zahlen die *multipliziert* werden heißen dabei *Faktoren*.

- *Division*: Die *Division* stellt die umkehrende Frage der *Multiplikation*: „Wie oft passt die Zahl in die andere Zahl?“. Da es sich um die Umkehrung der *Multiplikation* handelt sollten auch wiederum alle Zahlen von 0 bis 81 beherrscht werden.

$$
\begin{array}{l}
\ \ 2\ \ 43\ 69 : 3 = 08123 \\
-0 \\
\underline{\qquad} \\
\ \ 2\ \ 4 \\
-2\ \ 4 \\
\underline{\qquad\quad} \\
\qquad 03 \\
\quad -\ \ 3 \\
\quad \underline{\qquad\quad} \\
\qquad\quad 0\,6 \\
\qquad -\ \ 6 \\
\qquad \underline{\qquad} \\
\qquad\qquad 09 \\
\qquad\quad -\ 9 \\
\qquad\quad \underline{\qquad} \\
\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}
$$

Bei der schriftlichen *Division* wird zunächst gefragt „Wie oft passt der *Divisor* (3) in die erste *Ziffer* des *Dividenden* (2)?“ Die Antwort wäre „Null mal“ und somit ist die Null die erste *Ziffer* des Ergebnisses, dem sogenannten *Quotienten*. Anschließend wir die gefundene Ziffer des *Quotienten* mit dem *Divisor multipliziert* und das Ergebnis dieser Rechnung von der ersten *Ziffer subtrahiert*. Dann wird die nächste *Ziffer* zur Betrachtung mit nach unten gezogen (im Beispiel die Zahl 4) und nun die sich danach immer wiederholende Frage „Wie oft passt der *Divisor* in diese Zahl?“ gestellt. Die Antwort wird beim Ergebnis notiert (im Beispiel 8) und diese *Ziffer* des *Quotienten* dann wieder *multipliziert* mit dem *Divisor* von der besagten Zahl *subtrahiert* und anschließend die nächste *Ziffer* des *Dividenden* zur Betrachtung nach unten gezogen. Dieses Prozedur wiederholt sich solange bis alle Zahlen betrachtet wurden.
Bei höheren Zahlen im *Divisor* lohnt es sich diesen in zwei Zahlen zu zerlegen. So kann zum Beispiel der *Divisor* 72 in zwei *Divisoren* 8 und 9 zerlegt werden. Dann muss zu erst durch eine Zahl *dividiert* werden und anschließend der *Quotient* aus der ersten *Division* durch die zweite Zahl dividiert werden. Da die *Division* mit am zeitaufwendigsten ist, wird später die Bruchrechnung eingeführt, welche eine *Division* bis zum Ergebnis hin herauszögern kann.

Die mathematischen Vokabeln der Grundrechenarten sind in der folgenden Tabelle noch einmal zusammen gefasst.

Rechenart	1. Teil	Rechenoperator	2.Teil	Ergebnis
Addition	Summand	+	Summand	= Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	= Differenz
Multiplikation	Faktor	$\cdot$	Faktor	= Produkt
Division	Dividend	:	Divisor	= Quotient
Division (als Bruch)	Zähler	/	Nenner	= Quotient

Generell gilt, dass die Rechnungen der *Multiplikation* und die der *Division* immer vor jeglicher *Addition* oder *Subtraktion* durchgeführt werden müssen (Punkt- vor Strichrechnung)!
Durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ werden die Begriffe der *Subtraktion* nicht länger benötigt, da ein *Summand* oder sogar beide *Summanden* negativ sein können, sodass die *Addition* mit *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ die Verallgemeinerung von Addition und *Subtraktion* der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist. Auch die Divisionsbegriffe werden nur noch im Sinne der Bruchrechnung verwendet.

2.1.1 Übungsaufgaben zu Grundrechenarten

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $3821 + 1347$	$b)$ $5962 + 8912$
$c)$ $2512 + 3246$	$d)$ $2353 + 4636$
$e)$ $4462 + 9543$	$f)$ $4156 + 3737$
$g)$ $9948 + 5499$	$h)$ $4784 + 8377$
$i)$ $9745 + 3726$	$j)$ $3269 + 9289$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $3821 - 1347$	$b)$ $5962 - 1912$
$c)$ $4512 - 3246$	$d)$ $9353 - 4636$
$e)$ $4462 - 2543$	$f)$ $4156 - 3737$
$g)$ $9948 - 5499$	$h)$ $4784 - 3377$
$i)$ $9745 - 3726$	$j)$ $7269 - 3289$

Aufgabe 3: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $3821 \cdot 1347$	$b)$ $5962 \cdot 1912$
$c)$ $4512 \cdot 3246$	$d)$ $9353 \cdot 4636$
$e)$ $4462 \cdot 2543$	$f)$ $4156 \cdot 3737$
$g)$ $9948 \cdot 5499$	$h)$ $4784 \cdot 3377$
$i)$ $9745 \cdot 3726$	$j)$ $7269 \cdot 3289$

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $7095 : 3$	$b)$ $2568 : 6$
$c)$ $4512 : 2$	$d)$ $5033 : 7$
$e)$ $7389 : 9$	$f)$ $9475 : 5$
$g)$ $9872 : 8$	$h)$ $6024 : 8$
$i)$ $9416 : 4$	$j)$ $7273 : 7$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

a) $3821 + 1347 \cdot 43$
b) $4525 - 2070 : 6$
c) $8124 + 1347 - 4371$
d) $7124 - 2070 + 1392$
e) $4284 : 2 + 1347 \cdot 43$
f) $8285 : 5 - 5256 : 8$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.2) Lösungen zur Bruchrechnen.

2.2 Bruchrechnung

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt stellen alle Zahlen, die durch einen *Bruch* dargestellt werden, die *Zahlenmenge* der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ dar. Mit jeder *Zahlenmenge* sind alle Rechenoperationen zulässig.

Ein *Bruch* setzt sich aus seinem *Nenner*, der definiert in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes unterteilt wird, und den *Zähler*, der beschreibt wie viele Teile vom *Nenner* tatsächlich vorzufinden sind
(Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$). Mittels *Brüchen* kann man die gleiche Zahl auf verschiedene Arten darstellen, so ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $\frac{2}{4}$. Wenn der *Nenner* erhöht wird spricht man vom *Erweitern*. Bei einer Verkleinerung des *Nenners* wird vom *Kürzen* gesprochen.
Beim *Erweitern* werden *Zähler* und *Nenner* mit der Zahl *multipliziert* mit der man den *Bruch* erweitern möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit vier *erweitert*.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \tag{2.6}$$

Beim *Kürzen* werden *Zähler* und *Nenner* durch die Zahl *dividiert* mit der man den *Bruch kürzen* möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit acht erweitert.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \tag{2.7}$$

Bei der *Addition* beziehungsweise der *Subtraktion* von *Brüchen* müssen die *Nenner* der beteiligten *Brüche* so *erweitert* oder *gekürzt* werden, dass sie gleich sind. Dann können die *Zähler* verrechnet werden. Um immer einen gemeinsamen *Nenner* zu finden, kann man den ersten *Bruch* mit dem *Nenner* des zweiten *Bruch* und den zweiten *Bruch* mit dem Nenner des ersten *Bruchs* erweitern (wie im Subtraktionsbeispiel gezeigt).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \\ &\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{18-4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bei der *Multiplikation* von *Brüchen*, werden die *Nenner* miteinander *multipliziert* und bilden so den neuen *Nenner*. Auch die *Zähler* werden miteinander *multipliziert*.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \tag{2.9}$$

Bei der *Division* muss man mit dem *Kehrwert*, also der Vertauschung von *Nenner* und *Zähler* des *Divisors*, *multiplizieren*.

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

Ferner gilt bei Berücksichtigung von *Parametern* oder *Variablen*:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n} && \text{Erweitern}\\
\frac{a\cdot n}{b\cdot n} &= \frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n} = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b} && \text{Kürzen}\\
\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d + c\cdot b}{d\cdot b} && \text{Addition}\\
\frac{a}{b}-\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{a\cdot d - c\cdot b}{d\cdot b} && \text{Subtraktion}\\
\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot c}{d\cdot b} && \text{Multiplikation}\\
\frac{a}{b}:\frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c\cdot b} && \text{Division}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Im den folgenden Abschnitten wird der Malpunkt zwischen einer Zahl und einem *Parameter* beziehungsweise einer *Variablen* oder zwischen *Parametern* beziehungsweise *Variablen* selbst nicht mehr notiert, es sei denn dieser ist zum Verständnis von besonderer Bedeutung. Aus diesem Grund soll auch auf die Schreibweise für *gemischte Brüche* vollständig verzichtet werden, da in dieser Schreibweise $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ das *Additionszeichen* eingespart wird. Sobald das *Multiplikationszeichen* durch eine Konvention im Unterricht fallen gelassen wird, würde es zu Verwirrungen und Missverständnissen kommen, sodass entweder $2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ oder $2\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}$ gilt. Dieses *Buch* orientiert sich an der Konvention, welche in der höheren Mathematik verwendet wird. Deswegen sollte auf die Schreibweise von gemischten *Brüchen* vollständig verzichtet werden und ausschließlich nur eine einzige Konvention - die des Weglassens des *Multiplikationsoperators* - verwendet werden.

Zur Bruchrechnung ist anzumerken, dass es nicht möglich ist durch die Zahl Null zu *dividieren*. Diese Rechenoperation würde jeder Logik widersprechen und ist damit in der Mathematik nicht vorgesehen. Es existieren Beschreibungen, welche sich damit beschäftigen was in der unmittelbaren Umgebung dieser nicht definierten Rechenoperation geschieht und welche im Abschnitt „Grenzwerte“ und „Komplexe Zahlen“ vorgestellt werden.

2.2.1 Übungsaufgaben zur Bruchrechnung

Aufgabe 1: *Welcher Bruch ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Brüchen ein.*

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$	*b)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{4}$	*c)* $\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{2}$	*e)* $\frac{5}{6} \quad \frac{3}{4}$	*f)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} \quad \frac{1}{4}$	*h)* $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{15}$	*i)* $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} \quad \frac{7}{8}$	*k)* $\frac{6}{7} \quad \frac{3}{4}$	*l)* $\frac{4}{5} \quad \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{3}$	*n)* $\frac{5}{9} \quad \frac{3}{7}$	*o)* $\frac{5}{25} \quad \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{8}$	*q)* $\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3}$	*r)* $\frac{14}{8} \quad \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} \quad \frac{24}{64}$	*t)* $\frac{81}{9} \quad \frac{36}{4}$	*u)* $\frac{55}{5} \quad \frac{131}{11}$

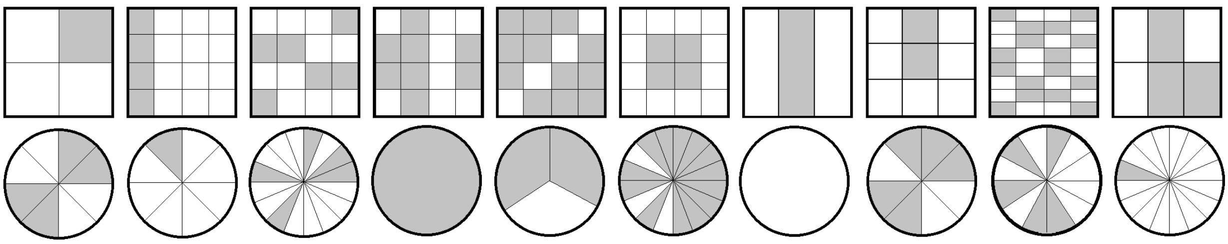
Aufgabe 2: *Kürze die Brüche bis man sie nicht weiter kürzen kann.*

a) $\frac{8}{16} =$	*b)* $\frac{6}{14} =$	*c)* $\frac{9}{15} =$
d) $\frac{6}{24} =$	*e)* $\frac{48}{64} =$	*f)* $\frac{12}{144} =$
g) $\frac{75}{125} =$	*h)* $\frac{30}{75} =$	*i)* $\frac{72}{108} =$
j) $\frac{16}{48} =$	*k)* $\frac{6}{18} =$	*l)* $\frac{24}{8} =$
m) $\frac{12}{96} =$	*n)* $\frac{16}{64} =$	*o)* $\frac{48}{144} =$
p) $\frac{33}{3} =$	*q)* $\frac{54}{72} =$	*r)* $\frac{5000}{10000} =$
s) $\frac{24}{72} =$	*t)* $\frac{36}{66} =$	*u)* $\frac{63}{108} =$

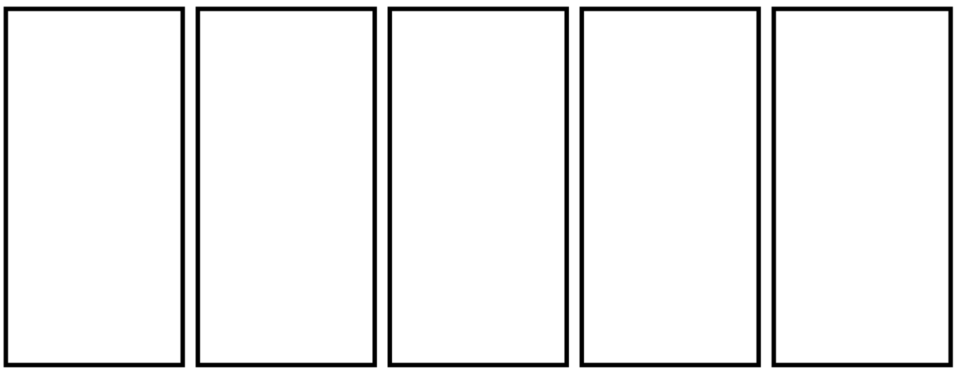
Aufgabe 3: *Erweitere die Brüche mit der angegebenen Zahl.*

a) $\frac{3}{4}$ mit: 9	*b)* $\frac{5}{7}$ mit: 7	*c)* $\frac{1}{12}$ mit: 8
d) $\frac{1}{2}$ mit: 24	*e)* $\frac{7}{8}$ mit: 6	*f)* $\frac{4}{6}$ mit: 11
g) $\frac{5}{7}$ mit: 8	*h)* $\frac{5}{13}$ mit: 9	*i)* $\frac{4}{11}$ mit: 7
j) $\frac{7}{4}$ mit: 9	*k)* $\frac{6}{11}$ mit: 5	*l)* $\frac{3}{12}$ mit: 4
m) $\frac{2}{3}$ mit: 21	*n)* $\frac{7}{8}$ mit: 3	*o)* $\frac{4}{6}$ mit: 13
p) $\frac{3}{9}$ mit: 8	*q)* $\frac{5}{12}$ mit: 6	*r)* $\frac{7}{12}$ mit: 7
s) $\frac{3}{4}$ mit: 17	*t)* $\frac{5}{6}$ mit: 4	*u)* $\frac{13}{6}$ mit: 1000

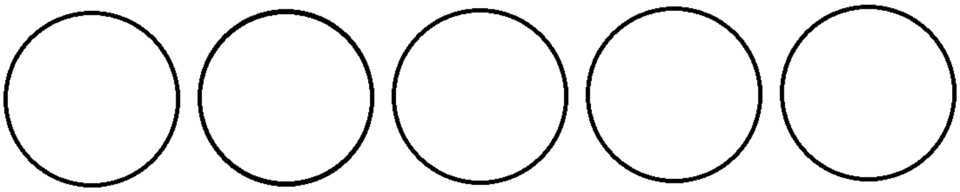
Aufgabe 4: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 7: *Addiere die folgenden Brüche!*

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} =$ *b)* $\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{14} =$ *c)* $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} =$

d) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} =$ *e)* $\dfrac{5}{16} + \dfrac{3}{8} =$ *f)* $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} =$

g) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{32} =$ *h)* $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{15} =$ *i)* $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} =$

Aufgabe 8: *Subtrahiere die folgenden Brüche!*

a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} =$ *b)* $\dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{14} =$ *c)* $\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10} =$

d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} =$ *e)* $\dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{16} =$ *f)* $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} =$

g) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{32} =$ *h)* $\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{15} =$ *i)* $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} =$

Aufgabe 9: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=$ *b)* $\frac{13}{7}-\frac{15}{14}=$ *c)* $\frac{9}{5}+\frac{13}{10}=$

d) $\frac{21}{2}-\frac{31}{8}=$ *e)* $\frac{9}{8}+\frac{19}{16}=$ *f)* $\frac{5}{3}-\frac{11}{9}=$

g) $\frac{7}{4}+\frac{67}{32}=$ *h)* $\frac{13}{5}-\frac{25}{15}=$ *i)* $\frac{13}{3}+\frac{11}{6}=$

j) $\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=$ *k)* $\frac{13}{4}-\frac{9}{6}=$ *l)* $\frac{9}{5}+\frac{3}{4}=$

m) $\frac{21}{4}-\frac{11}{8}=$ *n)* $\frac{3}{8}+\frac{9}{32}=$ *o)* $\frac{4}{3}-\frac{10}{9}=$

p) $\frac{7}{8}-\frac{11}{32}=$ *q)* $\frac{13}{5}-2=$ *r)* $14+\frac{11}{6}=$

s) $\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=$ *t)* $\frac{15}{6}-\frac{7}{3}=$ *u)* $\frac{9}{5}-\frac{3}{4}=$

v) $\frac{23}{4}+\frac{17}{8}=$ *w)* $\frac{7}{9}-\frac{11}{18}=$ *x)* $\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=$

y) $\frac{5}{20}-\frac{1}{1000}=$ *z)* $\frac{13}{15}+6=$

Aufgabe 10: *Multipliziere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=$

d) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=$ *e)* $\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=$ *f)* $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=$

Aufgabe 11: *Dividiere die folgenden Brüche!*

a) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}:\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}:\frac{3}{10}=$

d) $\frac{1}{2}:\frac{3}{8}=$ *e)* $\frac{3}{8}:\frac{5}{16}=$ *f)* $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}:\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}:\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=$

Aufgabe 12: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche!*

$a)\ \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} =$ $b)\ \frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} =$ $c)\ \frac{9}{5} : \frac{13}{10} =$

$d)\ \frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} =$ $e)\ \frac{9}{8} : \frac{19}{16} =$ $f)\ \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} =$

$g)\ \frac{7}{4} : \frac{67}{32} =$ $h)\ \frac{13}{5} : \frac{25}{15} =$ $i)\ \frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} =$

$j)\ \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} =$ $k)\ \frac{13}{4} : \frac{9}{6} =$ $l)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

$m)\ \frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} =$ $n)\ \frac{3}{8} : \frac{9}{32} =$ $o)\ \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} =$

$p)\ \frac{7}{8} : \frac{11}{32} =$ $q)\ \frac{13}{5} : 2 =$ $r)\ 14 \cdot \frac{11}{6} =$

$s)\ \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} =$ $t)\ \frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} =$ $u)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

$v)\ \frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} =$ $w)\ \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} =$ $x)\ \frac{1}{10} : \frac{1}{1000} =$

$y)\ \frac{5}{20} : \frac{1}{1000} =$ $z)\ \frac{13}{15} \cdot 6 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.3) Lösungen zur Bruchrechnen.

2.3 Brüche als Dezimalzahlen

Um Brüche in *Dezimalzahlen* umzuwandeln bedarf es der schriftlichen *Division* oder eines guten Zahlengefühls. Anhand eines Beispiels soll ersteres verdeutlicht werden.

$$\begin{array}{rl} \frac{2}{7} = & 2 : 7 = 0,285... \\ & -0 \\ \hline & 20 \\ & -14 \\ \hline & 60 \\ & -\ \ 56 \\ \hline & 40 \\ & -\ \ \ 35 \\ \hline & \vdots \end{array} \tag{2.12}$$

An Gleichung (2.12) ist zu erkennen, wie jeder *Bruch* in eine *Dezimalzahl* umgewandelt werden kann. Dabei wird bei der schriftlichen Divisionsrechnung nach jeder *Subtraktion* eine Nachkommastellennull nach unten gezogen, sodass die Rechnung fortgesetzt werden kann bis kein *Rest* mehr existiert, eine *Periodizität* wie bei $\frac{1}{3} = 0,3333333333... = 0,\overline{3}$ festgestellt wird oder eine genauere *Dezimalzahl* nicht mehr erforderlich ist. Da im Allgemeinen bekannt ist, dass $\frac{3}{3} = 1$ ist, gilt folgende Definition zur *Periodizität*: $3 \cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{9} := 1$.

Im Allgemeinen sollte auf eine Umwandlung in *Dezimalzahlen* verzichtet werden, da die *Darstellung* durch einen *Bruch* meistens, das weitere Vorgehen vereinfacht. Die *Darstellung* einer Zahl als *Bruch* ist dabei eine Schreibweise, welche eine Rechnung fordert aber sie nicht ausführt. So kann zum Beispiel durch das Erhalten von *Bruchdarstellungen* folgende Rechnung leichter durchgeführt werden als in der *Dezimalzahlendarstellung*, welche im direkten Vergleich darunter zu finden ist. (Bei dieser Rechnung werden Klammern verwendet, deren Bedeutung genaustens im Abschnitt „Klammersetzung“ besprochen werden. Für diese Rechnung gilt, dass die Rechnung in der Klammer zu erst ausgeführt werden soll.)

$$\begin{gathered} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 3}{6 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ (0,\overline{6} + 0,1\overline{6}) \cdot 0,6 = 0,8\overline{3} \cdot 0,6 = 0,5 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Die Gleichung (2.13) zeigt, dass die Rechnung mit den *Brüchen* zwar länger erscheint, aber vollständig im Kopf durchgeführt werden kann. Während die Rechnungen mit den *Dezimalzahlen* vielen nur mit Taschenrechner gelingen und dabei noch die Problematik der *Periodizität* bei der Eingabe in den Taschenrechner besteht, sodass als Ergebnis $0,499999999$ auf dem Taschenrechnerdisplay angezeigt wird. Dieses Ergebnis wäre nicht richtig und durch das *Runden* des Ergebnisses bekommt der Schüler oftmals den Eindruck, dass solche Rechnungen nicht ohne Taschenrechner schaffbar seien.

Dabei unterliegt das Prinzip *Runden* klaren Regeln. So gilt, wenn die Stelle hinter der *gerundet* werden soll größer als vier ist, dann wird aufgerundet. Beim Aufrunden wird die *Ziffer* an der gerundet wird um eins erhöht. Andernfalls wird abgerundet und die *Ziffer* bleibt unangetastet.

$$\begin{aligned} 0,485 &\approx 0,49 \qquad \text{aufrunden} \\ 0,322 &\approx 0,32 \qquad \text{abrunden} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Das Prinzip des *Rundens* ist wichtig, da bei vielen Rechnungen im Ergebnis viele Nachkommastellen auftreten. Aus diesem Grund gilt stillschweigend die Konvention, dass immer auf zwei Nachkommastellen gerundet wird, außer es ist anders angegeben.

Dieses Verfahren zur Umwandlung von *Brüchen* in *Dezimalzahlen* ist in erster Linie nützlich um *Prozentwerte* auszurechnen, was detaillierter im Abschnitt „Prozentrechnung“ beschrieben wird.

2.3.1 Übungsaufgaben zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1: *Wandle folgende Brüche in Dezimalzahlen um.*

$a)\ \frac{1}{2} =$	$b)\ \frac{1}{3} =$	$c)\ \frac{1}{5} =$
$d)\ \frac{1}{8} =$	$e)\ \frac{1}{4} =$	$f)\ \frac{1}{16} =$
$g)\ \frac{3}{4} =$	$h)\ \frac{4}{5} =$	$i)\ \frac{2}{3} =$
$j)\ \frac{6}{7} =$	$k)\ \frac{1}{12} =$	$l)\ \frac{19}{5} =$
$m)\ \frac{5}{9} =$	$n)\ \frac{11}{6} =$	$o)\ \frac{5}{3} =$
$p)\ \frac{43}{5} =$	$q)\ \frac{55}{2} =$	$r)\ \frac{17}{8} =$
$s)\ \frac{67}{7} =$	$t)\ \frac{81}{3} =$	$u)\ \frac{55}{7} =$
$v)\ \frac{1}{10} =$	$w)\ \frac{1}{100} =$	$x)\ \frac{1}{1000} =$

Aufgabe 2: *Berechne folgende Aufgaben.*

$a)\ 4 \cdot 0,1 =$	$b)\ 1 + 0,75 =$	$c)\ 9 \cdot 1,001 =$
$d)\ 2,125 - 1 =$	$e)\ 6,\overline{6} + 3,\overline{3} =$	$f)\ 1 + 0,0004 =$
$g)\ 3,003 : 3 =$	$h)\ 100 \cdot 1,001 =$	$i)\ 1000 \cdot 0,001 =$
$j)\ 5,\overline{5} : 5 =$	$k)\ 5 \cdot 0,1 + 0,\overline{3} =$	$l)\ 14 + 0,\overline{7} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.4) Lösungen zu Dezimalzahlen.

2.4 Einsetzungsverfahren

Das *Einsetzungsverfahren* wird oftmals mit Gleichungssystemen in Verbindung gebracht, allerdings ist das dahinter liegende Prinzip von fundamentalerer Bedeutung für den Umgang mit mathematischem und naturwissenschaftlichem Wissen. Bei diesem Verfahren wird entweder für einen *Parameter*, einer *Variable* oder einen *Term* eine Zahl oder einem weiterführender *Term* eingesetzt, sodass es generell zu einer Vereinfachung, einer Beispielrechnung oder der Reduzierung von unbekannten Größen kommt. Dabei ist ein *Parameter* ein Platzhalter für eine Zahl (oftmals werden a, b, c, d als *Parameter* verwendet), während die *Variable* der Platzhalter für eine veränderliche Zahl (oftmals werden x, y, z als *Variable* verwendet) ist und ein *Term* ein ganzer Abschnitt einer Rechenanweisung (zum Beispiel $5 \cdot x \cdot a$ wäre ein Term).

Als Beispiel für das Einsetzen von Zahlen soll das *Erweitern* bei der Bruchrechnung aus Gleichung (2.11) dienen. Hierbei soll gelten, dass für a der Wert 2, für b der Wert 3 und für den *Erweiterungsparameter* n die Zahl 4 eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } a = 2 \\
\Rightarrow \frac{2}{b} &= \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } b = 3 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n} \quad \text{mit: } n = 4 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Wie bereits oben schon erwähnt wurde, ist dieses Verfahren auch mit *Termen* möglich.

$$\begin{aligned}
a + b &= c \qquad \text{mit: } a = d - e + f \\
\Rightarrow d - e - f + b &= c \qquad \text{mit: } c = e - f - d \\
\Rightarrow d - e - f + b &= e - f - d
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.4.1 Übungsaufgaben zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: *Löse folgende Rechnungen, indem du für $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ einsetzt. Beachte, dass in einigen Rechnungen ein Term eingesetzt werden muss, welcher hinter der Gleichung definiert niedergeschrieben ist.*

a) $a + b - c =$

b) $3a - 4b + c =$

c) $ab - bc =$

d) $ab - ba =$

e) $4ab + 2cc - 3bc =$

f) $4\frac{a}{b} + \frac{c}{a} =$

g) $2ab + 2ac + 2bc =$

h) $a + d =$ mit: $d = abc$

i) $ad =$ mit: $d = ab - cb$

j) $\frac{a}{bd} =$ mit: $d = 4aa$

k) $\frac{d}{a} - \frac{b}{d} =$ mit: $d = abc$

l) $\frac{1}{d} =$ mit: $d = \frac{1}{a}$

m) $a + b\frac{d}{c} =$ mit: $d = \frac{2ac - c}{d}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.5) Lösungen zum Einsetzungsverfahren.

2.5 Prozentrechnung

Die *Prozentrechnung* ist von besonderer Bedeutung in der heutigen Gesellschaft, dabei versteckt sich hinter ihr nur der Bruch $\frac{1}{100}$. Denn pro cent bedeutet übersetzt nicht viel mehr als pro hundert. Aus diesem Bruch heraus hat sich historisch dann das *Prozentzeichen* % entwickelt. Der rechnerische Umgang ist durch das Ersetzen von % durch $\frac{1}{100}$ gegeben.

$$4\% = 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0,04 \tag{2.17}$$

Auch andere Rechnungen sind auf diesen Fakt reduzierbar: Sei ein Kapital von 1000€ mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt, wie hoch wären die Zinsen nach einem Jahr? Diese Frage kann leicht dargestellt werden als:

$$1000€ \cdot 4\% = 1000€ \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 4000€ \cdot \frac{1}{100} = \frac{4000€}{100} = 40€ \quad , \tag{2.18}$$

wobei genauere Ausführungen zu dieser Art von Rechnungen weiter unten im Kapitel „Ökonomische Anwendungen“ folgen werden.

Der Dreisatz zur Frage „Wieviel sind 4% von 300?“ gestaltet sich als:

$$\begin{aligned} 300 \ \text{entsprechen:} \ & 100\% \\ 3 \ \text{entsprechen:} \ & 1\% \\ 12 \ \text{entsprechen:} \ & 4\% \end{aligned} \tag{2.19}$$

Allerdings ist der Dreisatz durch das Wissen, dass $\% = \frac{1}{100}$ ist, wie folgt verkürzt durchzuführen:

$$300 \cdot 4\% = \frac{4 \cdot 300}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \quad , \tag{2.20}$$

wobei in Gleichung (2.20) die Zwischenschritte weggelassen werden könnten, da $\frac{300}{100}$ und $3 \cdot 4$ nicht von besonderer Schwierigkeit sind.

2.5.1 Übungsaufgaben zu Prozentrechnung

Aufgabe 1: *Wandele folgende Zahlen in Prozentwerte um.*

$a)\ 0,01 =$	$b)\ 100 =$	$c)\ 0,5 =$
$d)\ 0,125 =$	$e)\ 0,0024 =$	$f)\ 289 =$
$g)\ 0,9315 =$	$h)\ 0,0341 =$	$i)\ 0,891 =$

Aufgabe 2: *Wandele folgende Prozentwerte in Zahlen um.*

$a)\ 1\% =$	$b)\ 100\% =$	$c)\ 54\% =$
$d)\ 1626\% =$	$e)\ 2,374\% =$	$f)\ 2,01\% =$
$g)\ 99\% =$	$h)\ 5\% =$	$i)\ 81,063\% =$

Aufgabe 3: *Wandele folgende Brüche in eine Dezimalzahl um und schreibe sie dann als Prozentwert auf. Bei dieser Aufgabe brauchen nur drei Nachkommastellen beachtet werden.*

$a)\ \frac{1}{4} =$	$b)\ \frac{1}{3} =$	$c)\ \frac{5}{6} =$
$d)\ \frac{9}{14} =$	$e)\ \frac{8}{25} =$	$f)\ \frac{1}{8} =$
$g)\ \frac{7}{9} =$	$h)\ \frac{9}{4} =$	$i)\ \frac{43}{83} =$

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ 700 \cdot 1\% =$	$b)\ 45 \cdot 100\% =$	$c)\ 200 \cdot 4\% =$
$d)\ 80 \cdot 25\% =$	$e)\ 1500 \cdot 2\% =$	$f)\ 50000 \cdot 3\% =$
$g)\ 9000 \cdot 99\% =$	$h)\ 3141 \cdot 0,1\% =$	$i)\ 120 \cdot 5\% =$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis.*

a) 4% von 1000€ sind:
b) 2% von 5550€ sind:
c) 10% von 862434€ sind:
d) 19% von 299€ sind:
e) 12% von 1200€ sind:
f) 11% von 65300€ sind:

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.5) Lösungen zur Prozentrechnung.

2.6 Assoziativ und Kommutativ

Das *Assoziativ*- und das *Kommutativgesetz* helfen beim Rechnen den Überblick selbst über sehr komplex wirkende Sachverhalte zu behalten und sollten deswegen bekannt sein. In diesem Abschnitt werden diese beiden Gesetz und ihre Auswirkungen auf die Mathematik besprochen. Auch wird nochmals motiviert, warum es lohnend sein kann mit *Brüchen* und negativen Zahlen zu arbeiten.

2.6.1 Kommutator

Das *Kommutativgesetz* besagt, dass die Vertauschung von Zahlen, *Parametern* oder *Variablen* bei einer Rechenoperation keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Zur Überprüfung des *Kommutativgesetzes* dient der *Kommutator*, welcher folgende definierte Rechenanweisung ist:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \tag{2.21}$$

Ist der *Kommutator* gleich Null, so gilt, dass $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Wenn man nun Zahlen für die *Parameter* a und b einsetzt, so ist die Gültigkeit des *Kommutativgesetzes* intuitiv zu erkennen:

$$[2, 3] = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \tag{2.22}$$

Der allgemeine *Kommutator* ist für die *Multiplikation* definiert - wenn nun das *Kommutativgesetz* zum Beispiel für die *Addition* überprüft werden soll, wird am Komma des *Kommutator* gekennzeichnet welcher *Operator* untersucht wird.

$$\begin{aligned} [a,_+ b] &= a + b - b + a \\ [2,_+ 3] &= 2 + 3 - 3 + 2 = 5 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Es wird deutlich, dass ohne die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung und somit die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie der *Multiplikation* mit der *Division*, dass *Kommutativgesetz* nicht für die *Subtraktion* und *Division* gelten würde.

$$\begin{aligned} [a,_- b] &= a - b - b - a \neq 0 \\ [2,_- 3] &= 2 - 3 - 3 - 2 \neq 0 \\ [a,_: b] &= a : b - b : a \neq 0 \\ [2,_: 3] &= 2 : 3 - 3 : 2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Durch die Einführung *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung verändert sich Gleichung (2.24) zu:

$$\begin{aligned} [a,_+ -b] &= (a + (-b)) - (-b + a) = 0 \\ [3,_+ -2] &= (3 + (-2)) - (-2 + 3) = 1 - 1 = 0 \\ \left[a, \frac{1}{b}\right] &= a \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\ \left[2, \frac{1}{3}\right] &= 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die besondere Bedeutung und die Konsequenzen des *Kommutators* werden im Kapitel „Differentiation und Integration“ weiter ausgeführt. Während die Klammern im nächsten Unterabschnitt genaustens erklärt werden

2.6.2 Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* besagt, dass die Reihenfolge bei einer Rechnung keine Relevanz besitzen darf. So macht es zum Beispiel keinen Unterschied bei der *Addition* oder *Multiplikation* von drei Zahlen, welche zuerst verrechnet werden.

$$\begin{aligned} a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=b+(a+c) \\ a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=b\cdot(a\cdot c) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Die Reihenfolge in Gleichung 2.26 wird beschrieben durch die Klammern, welche angeben welche Rechnung zu erst vollzogen werden soll. Das jeweils letzte Gleichheitszeichen konnte nur durch die Vertauschung der geschriebenen Reihenfolge der *Parameter* a, b und c, also dem *Kommutativgesetz*, geschrieben werden. Erneut zeigt sich, dass die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie *Multiplikation* mit *Division* seine Vorteile hat, denn die *Rechenoperatoren* der *Subtraktion* und der *Division* sind nicht *assoziativ*:

$$\begin{aligned} (a-b)-c\neq a-(b-c) \\ (a:b):c\neq a:(b:c) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Allerdings gilt durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und des Bruchrechnens, dass der *Subtraktionsoperator* umgeschrieben werden kann in $- = +(-1)$ sowie der *Divisionsoperator* mit nur seltenen Ausnahmen aus dem mathematischen Gebrauch verschwindet.

2.6.3 Klammersetzung

Wenn eine Rechnung mehr als nur einen *Rechenoperator* beinhaltet, dann lohnt es sich Klammern zu verwenden, um den Überblick zu behalten oder auf bestimmte Sachverhalte aufmerksam zu machen. Im engeren Sinne ist die Rechnung mit Klammern auf die *Multiplikation* reduzierbar. Dabei wirkt der außenstehende Faktor auf jeden *Summanden* innerhalb der Klammer:

$$\begin{aligned} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ 16=2\cdot 8=2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5=6+10=16 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Das Beispiel aus Gleichung (2.28) zeigt, wie der *Faktor* auf die *Summanden* innerhalb der Klammern wirkt und somit das gleiche Ergebnis produziert, wie die *Multiplikation* des *Faktors* mit der *Summe* der Klammer.

Bei der Verrechnung von *Subtraktionsoperatoren* mit einer Klammer gilt, dass das vorgestellte Minus lediglich eine verkürzte Schreibweise von $(-1)\cdot$ ist:

$$-(b+c)=(-1)\cdot(b+c)=(-1)\cdot b+(-1)\cdot c=-b-c \tag{2.29}$$

Auch *Terme* von *Summen* können miteinander *multipliziert* werden:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d \tag{2.30}$$

In Gleichung (2.30) wirken zu erst die *Summanden* der ersten Klammer auf die zweite Klammer, sodass dann die zweite Klammer wie in Gleichung (2.28) *ausmultipliziert* werden kann.

Es wird auch ersichtlich, dass die Schreibweise mit den Klammern wesentlich kürzer ist. Das *Ausmultiplizieren* ist trotz der verkürzten Klammerschreibweise oftmals von Vorteil.

Die Klammersetzung ist nicht nur ein Bestandteil einer verkürzten Schreibweise, sondern auch von fundamentaler Bedeutung bei komplexeren *Einsetzungsverfahren*. So sei zum Beispiel $a = g + h$ und soll in die folgende Gleichung eingesetzt werden.

$$a \cdot d = (g + h) \cdot d = g \cdot d + h \cdot d \tag{2.31}$$

Wie Gleichung (2.31) zeigt, sollte bei einer Ersetzung der eingesetzte Term am besten prophylaktisch umklammert werden, um Fehler zu vermeiden. Erst nach einer Reflexion der Gleichung sollten dann die Klammern, wenn möglich, fallen gelassen werden.

Allerdings sollte auch die Umkehrung des *Ausmultiplizierens*, das Ausklammern, beherrscht werden, da es oftmals die Übersicht verbessert, wie in diesem Beispiel:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f + g = a \cdot (b + c + d + e + f) + g \tag{2.32}$$

Die Gleichung (2.32) zeigt, dass der *Faktor* a, welcher sich in vielen *Summanden* befindet, *ausgeklammert* wurde um die Übersicht zu verbessern. Generell gilt, dass man gleiche *Vorfaktoren* bei *Summen ausklammern* kann.

2.6.4 Übungsaufgaben zur Klammersetzung

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\frac{1}{2}(9+7) =$

b) $\frac{25+65}{10} =$

c) $4(3+2) - 2(1+3) =$

d) $\frac{16+48}{2} =$

Aufgabe 2: *Multipliziere die Klammern aus.*

a) $4(a+b) =$

b) $c(a-5b) =$

c) $\frac{2}{5}(9a-5) =$

d) $(a+b)(a+b) =$

e) $\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b} - \frac{5c}{d}\right) =$

f) $(a-b)(a-b) =$

g) $(a+b)(c+d) =$

h) $(a-b)(a+b) =$

i) $\frac{a+b}{c} =$

j) $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) =$

Aufgabe 3: *Klammere so viel wie möglich aus.*

a) $9a + 9b =$

b) $2a + 6 - 8b =$

c) $ab - acd + aa =$

d) $2ab + 4ab + 8ab =$

e) $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} =$

f) $abcdefghijkl - bcdefghijk =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.6) Lösungen zur Klammersetzung.

2.7 Potenzen

Wie schon zuvor wurden viele Rechenmethoden und neue Eigenschaften eingeführt, um die Übersicht oder Handhabung von rechnerischen Ausdrücken zu vereinfachen. Aus dem selben Grund wird die Potenz eingeführt, welche als verkürzte Schreibweise der wiederholten *Multiplikation* einer Zahl dient.

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^5 \\ 2^6 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Für *Potenzen* gelten Rechenregeln, welche schnell erklärt werden können, wenn der abkürzende Charakter wie in Gleichung (2.33) verinnerlicht wurde. Im Folgenden soll eine Regel gezeigt und dann begründet werden, dass diese gilt (außer die Regel ist intuitiv).

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= a^{2+3} = a^5 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ \Rightarrow a^3 : a^2 &= a^{3-2} = a^1 = a \end{aligned} \tag{2.34}$$

Aus der Bedingung, dass $\frac{a}{a} = 1$ sein muss und mit der Regel aus Gleichung (2.34) ergibt sich daraus, dass $a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^0 = 1$ sein muss. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Des Weiteren kann aus Gleichung (2.34) abgleitet werden, dass Rechnungen mit *Potenzen* nicht *assoziativ* sind:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 &= \left(a^3\right)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \\ a^{\left(3^2\right)} &= a^{3 \cdot 3} = a^9 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Außerdem lässt sich aus Gleichung (2.34) mit Gleichung (2.36) ersehen, dass

$$\begin{aligned} (a^2)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} &:= \sqrt{a} \end{aligned} \tag{2.37}$$

gilt, wobei $\sqrt{a}$ die *Wurzel* von a genannt wird. Die *Wurzel* habt die Potenz ^{2} auf, wie in Gleichung (2.37) zu sehen ist.

Somit gelten zusammengefasst folgende Regeln für die Potenzrechnung:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ (a^n)^m &\neq a^{(n^m)} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass bei dem Ausdruck a^n es sich bei a um die *Basis* und bei n um den *Exponenten* handelt.

2.7.1 Wurzeln

Wurzeln sind die Umkehroperationen zum *Potenzieren*. Somit steht hinter der sogenannten Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z}$) die Frage: „Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die Zahl z?“ Hierzu lohnt es sich einige Zahlen zum Quadrat (zum Beispiel: $8^2 = 64$) zu kennen, um direkt ein Ergebnis einer *Wurzel* zu erkennen. Da es nicht nur die Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$) gibt, sondern auch noch höhere Werte des *Nenners* im *Exponenten*, lohnt es sich stets die jeweilige Wurzel als *Potenz* zu schreiben.

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{z} \\ \sqrt[4]{z} &= z^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Es gibt ein schriftliches Verfahren eine *Wurzel* zu ziehen, allerdings bedarf es einer aufwendigeren Erklärung, welche in einer späteren Version dieses Buches folgen wird, da die Schüler heutzutage oftmals bei der Einführung der *Wurzel* mit dem Taschenrechner arbeiten, wird vorerst das schriftliche Wurzelziehverfahren ausgespart.

Außerdem bleibt anzumerken, dass *Wurzeln* aus negativen Zahlen erst im Kapitel „Komplexe Zahlen“ eingeführt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt sind Berechnungen von *Wurzeln* aus negativen Zahlen nicht vorgesehen. Folglich sind Rechnungen in denen *Wurzeln* aus negativen Zahlen vorkommen ein Hinweis darauf, dass Rechenfehler aufgetreten sind.

2.7.2 10er Potenzen

Von allen *Potenzen* haben 2er *Potenzen* 2^n in der Informatik und die 10er *Potenzen* 10^n eine besonders wichtige Funktion inne. Grade in der Physik werden besonders große Größen mit besonders kleinen verrechnet. Die daraus resultierenden Ergebnisse sollen dann wieder in einer Größe angegeben werden, die dem Menschen zur Vorstellung genügen. Deswegen werden viele Größen mit Hilfe der 10er *Potenzen* umgerechnet. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Jede Einheit ist meistens mit einer sprachlichen Abkürzung verbunden, so steht bei 1cm das „centi“ für $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Eine Tabelle mit der Auflistung vieler dieser Abkürzungen und ihre Bedeutung als 10er *Potenz* befinden sich im Anhang (13.3).
Während für alle Einheiten k für Kilo also Tausend steht, steht dies sprachlich bei der Einheit Byte B auch für Tausend. Allerdings versteckt sich hier durch den Fakt, dass Computer nur die 0 (Nein) und die 1 (Ja) kennen, eine andere Zahl:

$$\begin{aligned} 10^3 m &= 1km \\ 10^6 m &= 1Mm \\ 2^{10} B &= 1kB = 1024B \\ 2^{20} B &= 1MB = 1048576B \end{aligned} \tag{2.41}$$

Bei der Einheitenumrechnung ist das Verständnis von 10er *Potenz* von elementarer Bedeutung, da

$$\begin{aligned} 1dm &= 10cm = 10^1 cm \\ 1dm^2 &= 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm = 100cm^2 = 10^2 cm^2 \\ 1dm^3 &= 1dm \cdot 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000cm^3 = 10^3 cm^3 := 1l \end{aligned} \tag{2.42}$$

gilt. Dahinter verstecken sich sprachliche Abkürzungen, die mit *potenziert* werden $100cm^2 = 100(cm)^2 = 100c^2m^2 = 10^2\frac{1}{10^2}m^2 = 1m^2$. Die Schreibweise für $1cm^2$ ist wieder nichts weiter als eine Konvention zur Abkürzung für $1(cm)^2$. Wie Gleichung (2.42) gibt der *Exponent* der Einheit an, mit welcher Zahl die Anzahl der Null der Standardumrechnung multipliziert wird:

$$\begin{aligned} 1km &= 1000m = 10^3m \\ 1km^2 &= \left(10^3m\right)^2 = \left(10^3\right)^2 m^2 = 10^{3\cdot 2}m^2 = 1000000m^2 = 10^6m^2 \\ 1km^3 &= \left(10^3m\right)^3 = \left(10^3\right)^3 m^3 = 10^{3\cdot 6}m^3 = 1000000000m^3 = 10^9m^3 \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.7.3 Binomische Formeln

Mit Hilfe der *Potenzen* können auch die *Summen potenziert* werden:

$$\begin{aligned} (x+d)\cdot(x+d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d + d\cdot x + d^2 = x^2 + 2\cdot d\cdot x + d^2 \\ (x+d)\cdot(x-d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - d^2 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die beiden Gleichungen aus Gleichung (2.44) werden *Binomische Gleichungen* genannt und werden in der Beschreibung der Natur immer wieder vorgefunden und nicht zu Letzt deswegen im Mathematik und naturwissenschaftlichen Unterricht in Klausur- und Übungsaufgaben verwendet.
Generell kann man diese *Binomischen Formel* noch für jede *Potenz* verallgemeinern, dazu dient das sogenannt *Pascal'sche Dreieck*, welches die *Vorfaktoren* wiedergibt.

$(x+d)^0$	1
$(x+d)^1$	$x+d$
$(x+d)^2$	$x^2+2\cdot d\cdot x+d^2$
$(x+d)^3$	$x^3+3\cdot d\cdot x^2+3\cdot d^2\cdot x+d^3$
$(x+d)^4$	$x^4+4\cdot d\cdot x^3+6\cdot d^2\cdot x^2+4\cdot d^3\cdot x+d^4$
$(x+d)^5$	$x^5+5\cdot d\cdot x^4+10\cdot d^2\cdot x^3+10\cdot d^3\cdot x^2+5\cdot d^4\cdot x+d^5$

Dabei pflanzen sich die *Vorfaktoren* (sogenannte *Koeffizienten*) so weiter fort in dem die benachbarten *aufaddiert* werden. Die *Potenzen* des ersten *Parameters* oder *Variable* startet stets mit der höchsten Zahl und nimmt bei jedem weiteren *Summanden* ab, während die *Potenz* des zweiten *Parameters* zunimmt. Die *Vorfaktoren*, welche sich im *Pascal'schen Dreieck* befinden, werden im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch die sogenannten *Binomialkoeffizienten* erneut auftauchen und nochmals erläutert. Weitere Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck können im Anhang (13.2) gefunden werden.

2.7.4 Übungsaufgaben zu Potenzen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ 2^3 =$	$b)\ 3^4 =$	$c)\ 2^6 =$
$d)\ 2^{-1} =$	$e)\ 10^3 =$	$f)\ 8^3 =$
$g)\ 4^{-3} =$	$h)\ 10^{-6} =$	$i)\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$
$j)\ \left(5^3\right)^2 =$	$k)\ 4^{\left(3^2\right)} =$	$l)\ 2^6 \cdot 2^2 =$
$m)\ \left(2^3 + 2^3\right)^3 =$	$n)\ \left(10^2\right)^{-1} =$	$o)\ \left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} =$
$p)\ \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$	$q)\ \left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} =$	$r)\ \left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 =$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \sqrt{16} =$	$b)\ \sqrt{81} =$	$c)\ \sqrt[3]{8} =$
$d)\ \sqrt[3]{27} =$	$e)\ \sqrt{144} =$	$f)\ \sqrt[5]{100000} =$
$g)\ \sqrt{289} =$	$h)\ \sqrt[4]{81} =$	$i)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} =$

Aufgabe 3: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

$a)\ 1m^2 = \qquad cm^2$	$b)\ 2,718km = \qquad mm$	$c)\ 1mm^3 = \qquad dm^3$
$d)\ 3m^3 = \qquad dm^3$	$e)\ 0,5cm^2 = \qquad m^2$	$f)\ 13,3cm^3 = \qquad m^3$
$g)\ 10^3km^2 = \qquad dm^2$	$h)\ 1,234dm = \qquad mm$	$i)\ \frac{15}{4}\mu m^2 = \qquad mm^2$
$j)\ \frac{1}{3}Mm^3 = \qquad km^3$	$k)\ 0,01km^2 = \qquad cm^2$	$l)\ 125mm^5 = \qquad cm^5$
$m)\ 6,\bar{6}m^4 = \qquad cm^4$	$n)\ 0,025km^7 = \qquad mm^7$	$o)\ 3,141Tm^2 = \qquad nm^2$

Aufgabe 4: *Rechne in die Klammer aus.*

$a)$ $(a+4)^2 =$	$b)$ $\left(a-\sqrt{2}\right)^2 =$
$c)$ $\left(\sqrt{2}a+2\right)^4 =$	$d)$ $\left(3a+\dfrac{2}{3}\right)^3 =$
$e)$ $(a-b)^4 =$	$f)$ $(a+b+c)^2 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.7) Lösungen zu Potenzen.

2.8 Logarithmen

Da die *Potenzen* eingeführt wurden, sollte auch eine Rechenvorschrift eingeführt werden um den *Exponenten* zu bestimmen. Diese wird *Logarithmus* genannt, welche folgende Frage in mathematischer Art und Weise stellt: „Die Basis und das Ergebnis seien bekannt, welche Größe muss der Exponent haben?“

$$a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b \tag{2.45}$$

Gelesen wird $\log_a c$ als „der *Logarithmus* von b zur Basis a“. Wie für die *Potenzen* gelten auch für die *Logarithmen* Regeln, welche sich aus den *Potenzgesetzen* ableiten lassen.

$$\begin{aligned} a^{n \cdot m} = a^n \cdot a^m \Leftrightarrow \log_a(n \cdot m) &= \log_a n + \log_a m \\ \Rightarrow \log_a \frac{n}{m} &= \log_a n - \log_a m \\ \log_a n^m &= m \cdot \log_a n \\ a^{\log_a n} &= n \\ \log_a n &= \frac{\log_b a}{\log_b n} \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen für bestimme Werte der *Basis* verwendet:

$$\begin{aligned} \log_{10} n &= \lg n \\ \log_2 n &= \mathrm{lb}\ n \\ \log_e n &= \ln n \quad , \end{aligned} \tag{2.47}$$

wobei $e = 2,718281...$ die *Euler'sche Zahl* ist, deren Bedeutung im Kapitel der *Funktionen* im Abschnitt der *Exponentialfunktionen* und bei der *Differentiation* noch gerecht wird.

2.8.1 Übungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $\log_2 16 =$	$b)$ $\lg 1000 =$	$c)$ $\log_8 64 =$
$d)$ $\text{lb } 512 =$	$e)$ $\ln e^9 =$	$f)$ $\log_5 125 =$
$g)$ $\log_{25} 125 =$	$h)$ $\lg 11 \cdot 10^6 =$	$i)$ $\log_{17} 1 =$
$j)$ $\log_3 81 =$	$k)$ $\log_4 64 =$	$l)$ $\log_{15} 225 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.8) Lösungen zu Logarithmen.

2.9 Äquivalenzumformung

Die *Äquivalenzumformung* stellt die Basis für den Erkenntniserwerb und steht als selbstverständliches Vorwissen aller Schüler im Zentrum des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Wort nur die Bedingung, dass auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichens* „=“ immer die gleichen *Operationen* durchgeführt werden müssen. Dabei wird hinter dem *Kommandostrich* „|“ hinter der umzuformenden Gleichung die nachfolgende *Operation* angegeben.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad |+2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Die Gleichung (2.48) zeigt, wie auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *addiert* wurde. Dabei steht der Pfeil $\Rightarrow$ für „daraus folgt“, und ist nicht zwingend erforderlich bei einer *Äquivalenzumformung*.

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \qquad |-2 \\ 6 &= 6 \qquad |\cdot 3 \\ 18 &= 18 \qquad |:2 \\ 9 &= 9 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Gleichung (2.49) zeigt, wie im ersten Schritt auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *subtrahiert* wurde. Im zweiten Schritt werden beide Seiten mit drei *multipliziert* und im dritten Schritt durch zwei *dividiert*. In diesen beiden Beispielen sind die vier Grundrechenarten gezeigt, was nicht bedeutet, dass andere Rechenoperationen ausgeschlossen sind.

Äquivalenzumformungen dienen dazu um Gleichung umzustellen und so unbekannte *Parameter* zu bestimmen. *Parameter* sind Platzhalter für *Zahlen* und werden in der Regel mit Buchstaben am Anfang des Alphabets beschrieben. Wenn keine genaue Beschreibung für die *Parameter* angegeben sind, gilt $a, b, ... \in \mathbb{R}$. Im folgenden Beispiel soll nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{d} \cdot x + b - c \qquad |+c \\ c &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |-b \\ c - b &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |\cdot d \\ d \cdot (c-b) &= a \cdot x \qquad |:a \\ \frac{d \cdot (c-b)}{a} &= x \end{aligned} \tag{2.50}$$

Jede *Rechenoperation*, die den Wert nicht verändert ist zulässig! Die *Addition* der 0 und die *Multiplikation* der 1 sind solche *Operationen*. Dabei ist 0 das so genannte *neutrale Element* der *Addition* und 1 das *neutrale Element* der *Multiplikation*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8} &\qquad \text{Multiplikation der 1} \\ 4 = 4 + 0 = 4 + 6 - 6 = 10 - 6 &\qquad \text{Addition der 0} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Die Beispiele aus Gleichung (2.51) zeigen, dass die *Multiplikation* des *neutralen Elements* mit dem *Erweitern* von *Brüchen* unmittelbar in Verbindung steht.

2.9.1 Quadratische Ergänzung

Das Ziel bei einer *quadratischen Ergänzung* ist es, eine Gleichung so umzuformen, dass man die *binomischen Formeln* ausnutzen kann um die *Potenz* der Unbekannten zu reduzieren. Als erklärendes Beispiel soll diese allgemeine Gleichung, welche auch allgemeines Polynom zweiter Ordnung oder quadratische Gleichung genannt wird, dienen (Auf die Eigenschaften von Polynome und explizit quadratische Termen wird im Kapitel „Funktionen“ genauer eingegangen.):

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.52}$$

Diese Form erinnert an die so genannte erste *binomische Formel* $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Aus diesem Grund wird der *Vorfaktor* (*Koeffizient*) a des quadratischen *Terms* ax^2 über *Äquivalenzumformung* entfernt.

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \qquad |: a \\ &x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{a}{c} = 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Durch direktes gegenüberstellen der *Terme* können bestimmte Bedingungen an die *Vorfaktoren* geknüpft werden, sodass die künstliche Generierung einer *Binomischen Formel* möglich wird, dies wird *Koeffizientenvergleich* genannt. Generell wird der *Koeffizientenvergleich* immer angewendet, wenn eine Gleichheit von *Vorfaktoren* zu einer erheblichen Vereinfachung eines Problems dienen könnte.

$$\begin{aligned} &x^2 + \color{red}{\frac{a}{b}}\color{black}x + \frac{a}{c} = 0 \\ &x^2 + \color{red}{2d}\color{black}x + d^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Durch den *Koeffizientenvergleich* der rot markierten *Vorfaktoren*, kann folgende Bedingung aufgestellt werden: $\frac{a}{b} = 2d)$ und so der *Parameter* d als $\frac{a}{2b}$ bestimmt werden. Da die zu lösende Gleichung noch kein d^2 beherbergt, muss dieses durch eine *Addition* hinzugefügt werden. Anschließend werden alle Terme die nicht zu einer *Binomischen Formel* gehören auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{a}{b}x+\frac{a}{c}&=0 \qquad \Big|+\left(\frac{a}{2b}\right)^2\\
x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a}{c}&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2 \qquad \Big|-\frac{a}{c}\\
x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Nach genauerer Betrachtung ist festzustellen, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichen die erste *binomische Formel* vorzufinden ist. Nach der Ersetzung fällt auf, dass die quadratische *Potenz* und die lineare *Potenz* in der *Variablen x* verschmolzen sind. Um nun nach der *Variable* restlos aufzulösen, muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die *Wurzel* gezogen werden, da dies die *Umkehrfunktion* zum Quadrieren ist. Dabei ist zu beachten, dass es eine negative und eine positive Lösung gibt, da zum Beispiel $2^2=(-2)^2$ ist.

$$\begin{aligned}
\underbrace{x^2+\frac{a}{b}x+\left(\frac{a}{2b}\right)^2}_{=(x+\frac{a}{2b})^2}&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}\\
(x+\frac{a}{2b})^2&=\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c} \qquad \Big|\sqrt{}\\
x_{1,2}+\frac{a}{2b}&=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}} \qquad \Big|-\frac{a}{2b}\\
x_{1,2}&=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a}{c}}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Nach einer Umbenennung der *Parameter* $p=\frac{a}{b}$ und $q=\frac{c}{a}$ erkennt man, dass die so genannte *p-q-Formel* hergeleitet wurde:

$$\begin{aligned}
&x^2+px+q=0\\
&\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Um Zeit in bestimmten Klausur- oder Unterrichtssituationen zu sparen empfiehlt es sich die *p-q-Formel* aus Gleichung (2.57) zu verwenden, dennoch sollte von ihrer Benutzung abgeraten werden, denn in der höheren Mathematik (siehe Kapitel „Differentiation und Integration“) sind viele Aufgaben nur noch mittels der *quadratischen Ergänzung* effektiv zu lösen.

Die Zahl unten recht von zum Beispiel x_1 wird Index genannt. Ein Index hat keine genauere mathematische Funktion, allerdings kann darüber eine zusätzliche Information mitgegeben werden. So bedeutet $x_{1,2}$, dass zwei spezielle Werte für x vorliegen, die die Gleichung lösen würden. Oftmals wird auch x_0 vorgefunden und steht für einen speziellen konstanten Wert. Folglich gibt der Index nur genauer an welche Bedeutung genau dieser Wert der Variable oder des Parameters besitzt.

Wenn bei einer Gleichung in offensichtliches *Produkt* mit einer quadratischen Gleichung vorliegt, lohnt es sich diese auszuklammern

$$\begin{aligned} &ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ \Rightarrow &x \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.58}$$

sodass das die *Faktoren* des *Produkts* separiert betrachtet werden können, denn es gilt nach wie vor: Wenn einer der *Faktoren* gleich Null ist, dann ist das gesamte *Produkt* gleich Null.

$$\begin{aligned} &\underbrace{x}_{\overset{!}{=}0} \cdot \underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\overset{!}{=}0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow &ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Ab diesem Zeitpunkt kann die restliche Gleichung mit der *quadratischen Ergänzung* gelöst werden. Das *Ausklammerungsverfahren* funktioniert nicht nur bei höheren *Polynomen*, sondern immer, wenn aus allen Bestandteilen der Gleichung *ausgeklammert* werden kann. So ist es möglich bei einigen Gleichungen die Lösungen direkt abzulesen.

$$x^2 - 6x = x(x-6) \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6 \tag{2.60}$$

Aus diesem Grund lohnt es sich nicht immer Klammern aus zu *multiplizieren*.

2.9.2 Übungsaufgaben zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ 3 \cdot x + 4 = 0$	$b)\ 2 \cdot x - 9 = 0$
$c)\ 9 \cdot x + 55 = 0$	$d)\ 5 \cdot x - 25 = 0$
$e)\ 3 \cdot x + 9 = 6$	$f)\ x - 66 = 9$
$g)\ 4 \cdot x + 4 = 11$	$h)\ 9 \cdot x - 5 = 4$
$i)\ 32 \cdot x + 3 = 5$	$j)\ 1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23$
$k)\ 7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x$	$l)\ 98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10$

Aufgabe 2: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ -16x^2 + 64 = 0$	$b)\ \sqrt{2x-6} - 144 = 0$
$c)\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0$	$d)\ \ln 5x = 2$
$e)\ \ln \dfrac{13}{x} = \sqrt{2}$	$f)\ \dfrac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1$
$g)\ \left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49$	$h)\ e^{2x-6} = 2$

Aufgabe 3: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf.*

$a)\ x^2 + 2x + 1 = 0$
$b)\ 4x^2 - 16x + 16 = 0$
$c)\ 3x^2 + 24x - 3 = 0$
$d)\ 5x^2 - 20x = 50$
$e)\ 2x^2 - 20x = 6 - 10x$
$f)\ 7x = 8 - 3x^2$
$g)\ 3x^2 - 6x = 0$
$h)\ x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8} = 0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.9) Lösungen zur Äquivalenzumformung.

2.10 Substitution

Bei jeder Rechnung ist es dem Rechnenden freigestellt Abkürzungen einzuführen. Dieser Prozess wird *Substitution* genannt. Im folgenden Beispiel wird die *Summe* innerhalb der Klammer *substituiert*:

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \qquad \text{mit: } y := x+a \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass bei der *Substitution* ersetzten *Variablen* vollständig eliminiert werden.

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \cdot x \qquad \text{mit: } y := x+a \;\Rightarrow\; x = y-a \\ &= y^2 \cdot (y-a) = y^3 - a \cdot y^2 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Jede *Substitution* ist zulässig. Wichtig wird dieser Prozess besonders wenn komplexere Aufgaben dadurch wesentlich vereinfacht werden können. Aus diesem Grund wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ nochmal besonders auf die Substitution eingegangen.

2.10.1 Übungsaufgaben zur Substitution

Aufgabe 1: *Schreibe die Gleichung mit der angegebenen Substitution auf.*

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8$ mit: $y=x^2+x+1$

b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c$ mit: $y^2=4x+a$

c) $(18x-4ab)^2=c$ mit: $\sqrt{y}=18x-4ab$

d) $2^{2a-c}=32$ mit: $b=2a-c$

e) $x=4a$ mit: $y=x+4a$

f) $x^2+8x+16=0$ mit: $(y+4)^2=x^2+8x+16$

g) $(3a+2x)(2x-3a)=0$ mit: $y=2x+3a$

h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2$ mit: $y=x^2+4x$

Aufgabe 2: *Finde die Substitution heraus und schreibe sie auf.*

a) $x^3+4x^2-x-8=0 \Rightarrow y-8=0$

b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}=0 \Rightarrow y-\dfrac{1}{y}=0$

c) $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{5}{ab}-3=0 \Rightarrow dx^2+5d-3=0$

d) $\dfrac{ax^2+bx-c}{5}=0 \Rightarrow \dfrac{y}{5a}=0$

e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0 \Rightarrow gx-f=0$

f) $x^2+4x-8=0 \Rightarrow \left(\dfrac{y}{4}+2\right)^2=0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.10) Lösungen zur Substitution.

2.11 Fakultäten und Binominalkoeffizienten

Einige Abkürzungen werden oft bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie bei Reihendarstellungen verwendet. Zu diesen zählen *Fakultäten* und *Binominalkoeffizienten*. So kann zum Beispiel die Rechnung

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \tag{2.63}$$

abgekürzt werden, durch den sogenannten *Fakultätsoperator* !:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\ \Rightarrow n! &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Dabei ist die *Fakultät* so definiert, dass $0! := 1$ gilt. Einige Konstellationen mit der *Fakultät* kommen besonders häufig vor. Die am häufigsten vorkommende Anordnung von *Fakultäten* wird *Binomialkoeffizient* genannt und ist definiert durch:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.65}$$

Generell sollte der Umgang mit neuen Abkürzungen, die neu eingeführt wurden, geübt werden, da in der Mathematik noch viele weitere Abkürzungen warten. So werden zum Beispiel im Kapitel „Reihen“ weitere oft vorkommende Abkürzungen eingeführt.

2.11.1 Übungsaufgaben zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $5!$	*b)* $3!$	*c)* $\frac{7!}{5!}$
d) $\frac{3!}{4!} \cdot 0!$	*e)* $\frac{(4b)!}{b!}$	*f)* $4! \cdot 3! \cdot 2!$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis und vergleiche die ausgerechneten Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck.*

a) $\binom{2}{1}$	*b)* $\binom{8}{4}$	*c)* $\binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0}$
d) $\binom{7}{2}$	*e)* $\binom{3}{1}$	*f)* $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$

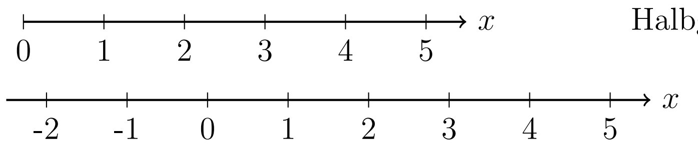
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.10) Lösungen zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten.

3 Geometrie

Eines der zentralen Themen der Mathematik in der Schule ist die *Geometrie*. Dies ist dem Fakt geschuldet, dass geometrischen Formen im menschlichen Alltag überall vorzufinden sind und viele Vorgänge durch sie beeinflusst werden.

3.1 Zahlenstrahl

Der *Zahlenstrahl* ist eine Linie, an der es möglich ist Zahlen in regelmäßigen *Abständen* vorzufinden. Diese Linie ist eine *Halbgerade*, also eine gerade Linie mit einem Anfangspunkt (beim Zahlenstrahl wäre dies die 0) aber keinen Endpunkt. Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$[1] wird aus dieser *Halbgeraden* eine *Gerade*, welche weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt.



Halbgerade (Zahlenstrahl nur mit $\mathbb{N}$)

Gerade (Zahlenstrahl mit $\mathbb{Z}$)

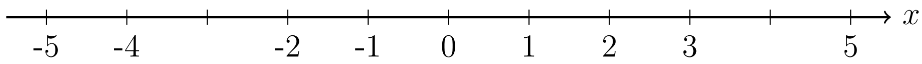
Eine wichtige Eigenschaft des *Zahlenstrahls* ist, dass ein Einheitenschritt (also der *Abstand* von 1 bis nach 2) beliebig groß sein kann. Allerdings müssen alle Einheitenschritte die gleichen *Abstände* haben - es wird von *äquidistanten Abständen* gesprochen. Das x am *Zahlenstrahl* beschreibt den Namen der *Dimension*, auf der sich die Zahlen befinden.
Der *Zahlenstrahl* ist ein *eindimensionales* Objekt, da es nur möglich ist sich nach Vorne oder Hinten auf dem *Zahlenstrahl* zu bewegen. Andere Objekte dieser Art sind *Geraden* und *Halbgeraden* im Allgemeinen. Außerdem existieren noch *Strecken*, welche im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden.

[1] $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

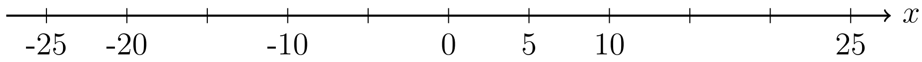
3.1.1 Übungsaufgaben zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1: *Trage die fehlenden Zahlen ein.*

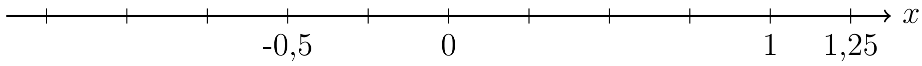
a)



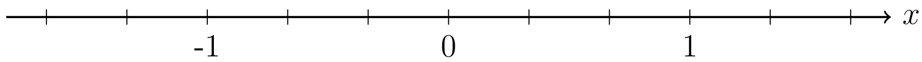
b)



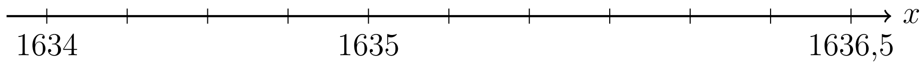
c)



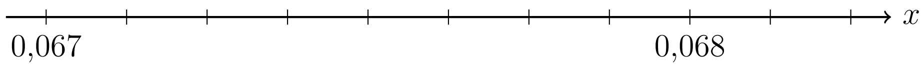
d)



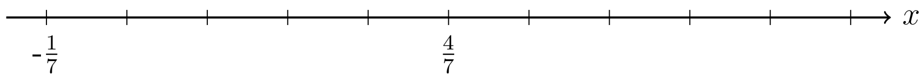
e)



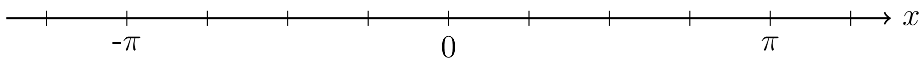
f)



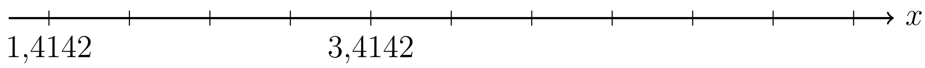
g)



h)



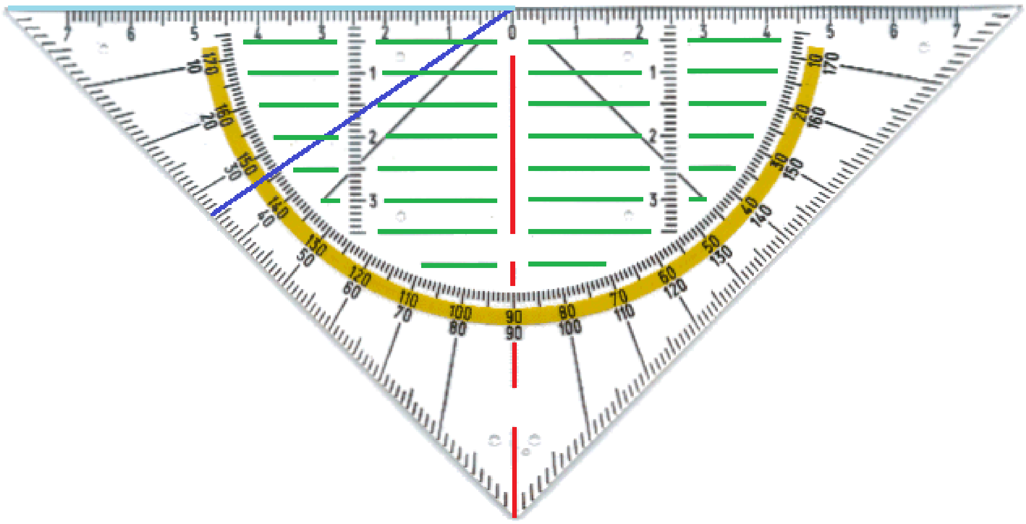
i)



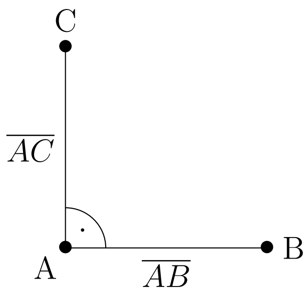
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.11) Lösungen zum Zahlenstrahl.

3.2 Winkel

Als wichtigster Bestandteil der *Geometrie* in der Schule kann das Geodreieck angesehen werden und sollte in keinem naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht fehlen.



In der Abbildung mit dem Geodreieck wurden zusätzliche farbige *Strecken* eingefügt, an denen die Funktionsweise des Geodreiecks erklärt werden kann. *Strecken* sind im Allgemeinen gerade Linien mit einem Anfangs- und einem Endpunkt. Eine *Strecke* zwischen den *Punkten* A und B wird durch $\overline{AB}$ verschriftlicht. Die wohl bedeutendste *Strecke* auf dem Geodreieck ist die Nulllinie, welche auch Mittellinie oder Orthogonalitätslinie genannt wird. Diese *Strecke* ist rot markiert. Wenn das Geodreieck so auf eine gezeichnete Linie gelegt wird, dass die Linie von der Nulllinie verdeckt wird, dann kann ein sogenannter *rechter Winkel* zu dieser Linie eingezeichnet werden. Ein solcher *rechter Winkel* zwischen den zwei *Strecken* $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ würde wie folgt aussehen:

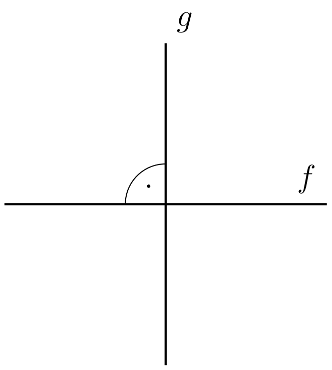


Ein *Winkel* zwischen zwei *Strecken* wird durch einen Bogen beschrieben und der Wert in ihm eingetragen. Dabei stellt der *rechte Winkel* aufgrund seiner Relevanz für die Mathematik und Naturwissenschaften eine Besonderheit da, denn statt den Wert 90°, wie auf auf dem Geodreieck abzulesen ist, einzutragen, wird stattdessen als abkürzende Schreibweise ein *Punkt* in den *Kreisbogen* gesetzt. *Winkel* werden in der *Geometrie* nahezu immer in der *Einheit Grad* ° gemessen, wobei die Zahl für einen *rechten Winkel* in der Geschichte irgendwann willkürlich festgelegt wurde. Es gibt noch andere *Einheiten* für die Winkelmessung, die sich bis heute nicht in der *Geometrie* durchgesetzt haben. Im Kapitel „Funktionen“ wird noch eine Umrechnung zu einer anderen *Einheit* vorgenommen, da es sich im dortigen Zusammenhang lohnt eine neue

Einheit für die *Winkel* einzuführen. Die mathematische Schreibweise eines *Winkels* am oben gezeigten Beispiels ist wie folgt definiert:

$$\measuredangle\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)=90^\circ \tag{3.1}$$

und wird gelesen als „Der *Winkel* zwischen der *Strecke* $\overline{AB}$ und der *Strecke* $\overline{AC}$ ist gleich 90°.“ *Winkel* können nicht nur zwischen *Strecken* zu finden sein sondern auch zwischen *Geraden*. *Geraden* sind Linien ohne Anfangs- und Endpunkt. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ werden auch *Schenkel* des *Winkels* genannt.



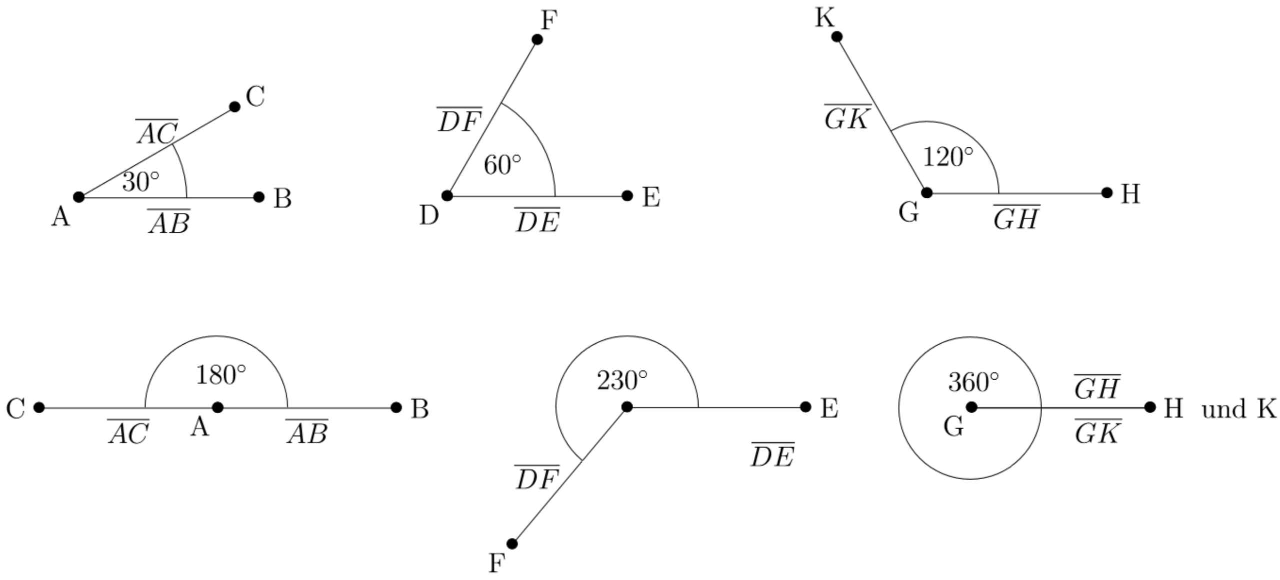
Die Abbildung zeigt einen *rechten Winkel* zwischen der *Gerade* f und g: $\measuredangle(f,g)=90^\circ$. Die Eigenschaft, dass *Strecken* und/oder *Geraden* einen *rechten Winkel* zu einander haben, wird *Orthogonalität* genannt. Es wird davon gesprochen, dass zum Beispiel zwei *Geraden orthogonal* zu einander sind (oft wird auch der Begriff „*senkrecht*“ verwendet). Abkürzend wird die *Orthogonalität* der *Strecken* und *Geraden* in den Beispielen so ausgedrückt:

$$\begin{gathered}\overline{AB}\perp\overline{AC}\\ f\perp g\end{gathered} \tag{3.2}$$

Wie das Geodreieck schon vermuten lässt, gibt es nicht nur *rechte Winkel* sondern sechs andere Einordnungen in Gruppen von *Winkeln*. Dazu ist es unerlässlich *Winkel* messen zu können. Hierfür wird das Geodreieck so positioniert, dass sich der *Schnittpunkt* der Linien direkt auf der Null befindet. Dann muss die erste Linie so ausgerichtet werden, dass sie genau auf der hellblauen Linie liegen würde und die zweite Linie sich unter dem Geodreieck befindet. Diese zweite Linie trifft dann auf eine Gradzahlmarkierung, welche dann den Wert der Winkelgröße angibt. In der Abbildung mit dem Geodreieck sei die dunkelblaue Linie die zweite Linie. Sie trifft die Winkelmarkung (beim gelben Bogen) bei 34° und somit hat der *Winkel* zwischen den blauen Linien auch genau diese Größe. Wenn der *Winkel* allerdings größer als 90° ist, dann müssen die anderen Zahlen (in diesem Fall die gelb unterlegten) verwendet werden.

Winkel werden in verschiedene Gruppen eingeordnet. Die ersten drei Arten von *Winkel* können anhand der folgenden drei Beispiele dargestellt werden:
Dabei wird bei einem *Winkel* zwischen 0° und 45° von einem *überspitzen Winkel* gesprochen ($0^\circ<\measuredangle(\left(\overline{AB},\overline{AC}\right))<45^\circ$). Bei *Winkeln* ab 45° bis 90° ist die Rede von einem *spitzen Winkel* ($45^\circ\leq\measuredangle(\left(\overline{DE},\overline{DF}\right))<90^\circ$). Während ein *Winkel* zwischen 90° und 180° *stumpfer Winkel* genannt wird ($90^\circ<\measuredangle(\left(\overline{GH},\overline{GK}\right))<180^\circ$).

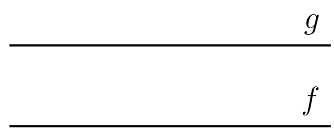
Auch die *Winkel* ab 180° können in drei Gruppen einsortiert werden.



Wobei ein *Winkel* von 180° *gestreckter Winkel* genannt wird ($\measuredangle(\big(\overline{AB}, \overline{AC}\big)) = 180°$). Bei *Winkeln* zwischen 180° und 360° ist die Rede von einem *überstumpfen Winkel* ($180° < \measuredangle(\big(\overline{DE}, \overline{DF}\big)) < 360°$). Abschließend existiert noch ein *Winkel* von 360°, welcher als *voller Winkel* bezeichnet wird ($\measuredangle(\big(\overline{GH}, \overline{GK}\big)) = 360°$).

Überstumpfe Winkel können mit einem Geodreieck nicht direkt gemessen werden, allerdings kann der andere nicht gesucht *Winkel* abgelesen werden. Danach bedarf ein nur einer kleinen Rechnung, um den Wert für den *überstumpfen Winkel* zu erhalten. Dabei wird der abgelesene Wert des nicht gesuchten *Winkels* von einem *vollen Winkel* 360° *subtrahiert.*

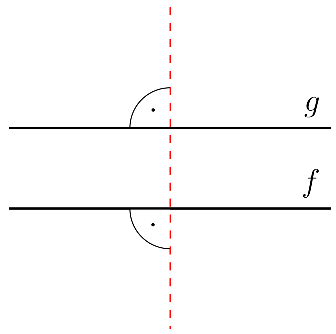
Allerdings gibt es auch *Strecken* und *Geraden*, welche sich nicht schneiden, sodass eine Winkelbestimmung entweder schwer oder gar unmöglich wird. Wenn zwei Linien immer den gleichen *Abstand* zu einander haben, dann wird dies *Parallelität* der Linien genannt. Mit den grünen Linien des Geodreiecks kann dies getestet werden.



Die beiden *Geraden* f und g sind *parallel* zu einander, da sie immer den gleichen *Abstand* zu einander haben. Mathematische wird dies ausgedrückt durch:

$$f \,||\, g \tag{3.3}$$

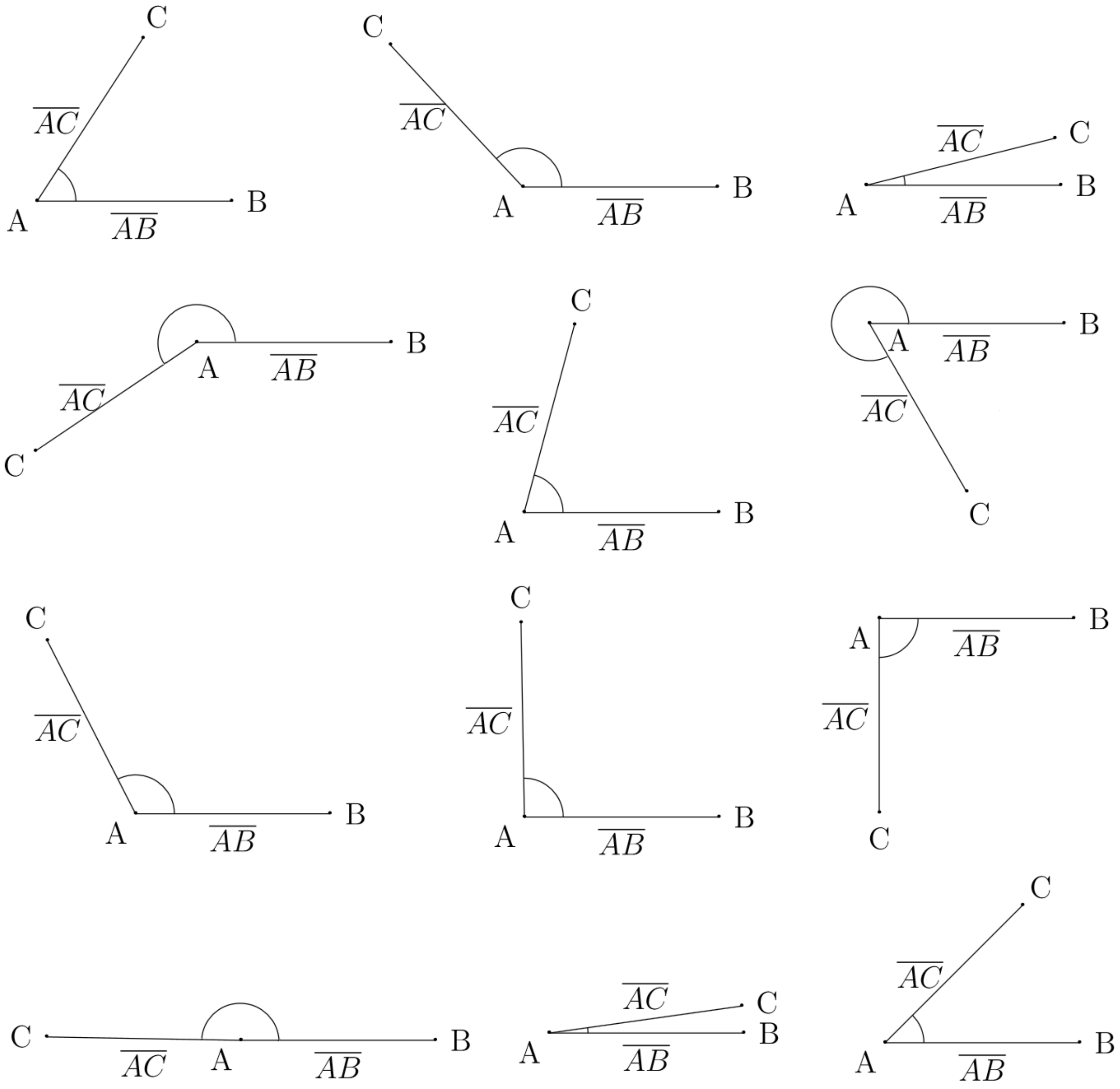
Die *Parallelität* zwischen zwei Linien kann auch überprüft werden, in dem eine *orthogonale* Linie zur ersten Linie gezogen wird. Wenn diese auch wieder *orthogonal* zur zweiten Linie ist, ist dies ebenso ein Anzeichen für die *Parallelität.*



Im Großen und Ganzen können viele wichtige Eigenschaften der geometrischen Körper durch *Winkel* und durch *Parallelität* sowie *Orthogonalität* beschrieben werden, sodass diese Begriffe von jedem Schüler verinnerlicht sein sollten.

3.2.1 Übungsaufgaben zu Winkeln

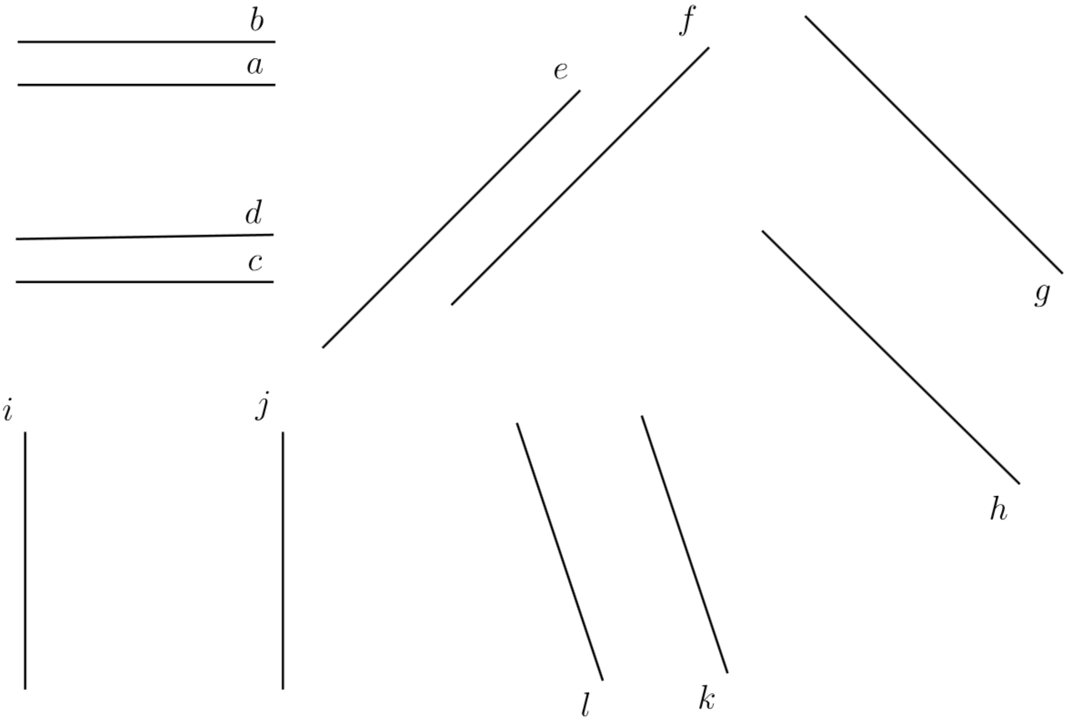
Aufgabe 1: *Bestimme die Winkel und ordne sie den Kategorien zu.*



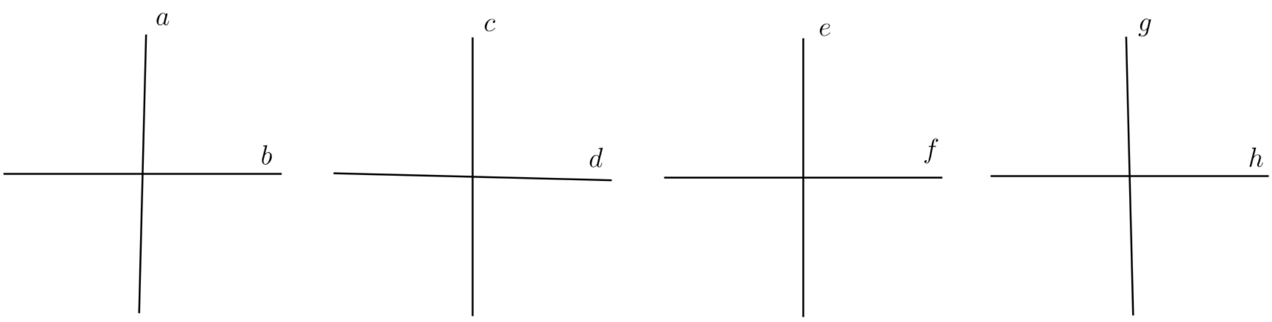
Aufgabe 2: *Zeichne die folgenden Winkel.*

148°	27°	59°	90°	210°	180°	11°	70°
30°	60°	120°	330°	267°	240°	94°	5°

Aufgabe 3: *Teste auf Parallelität.*



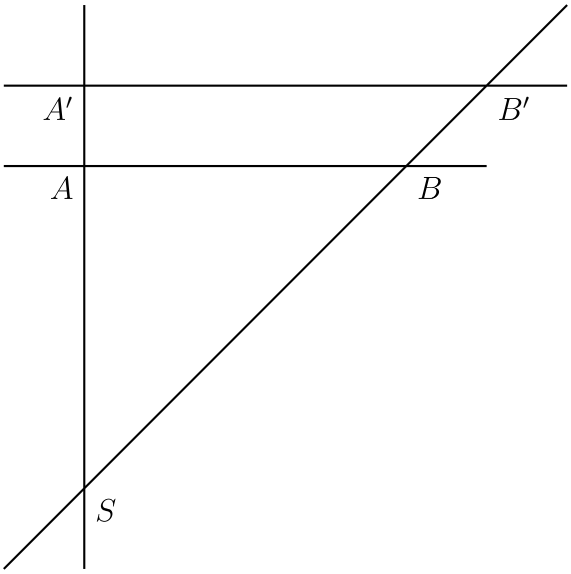
Aufgabe 4: *Teste auf Orthogonalität.*

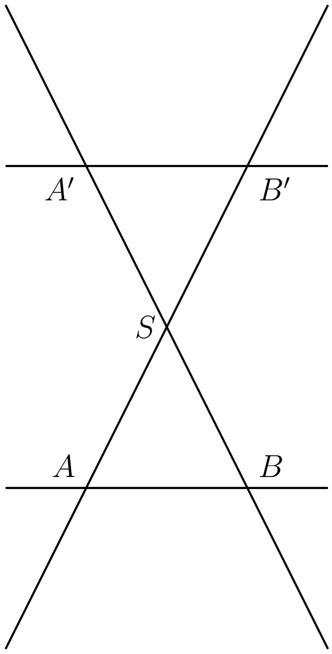


Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.12) Lösungen zu Winkeln.

3.3 Strahlensatz

Der *Strahlensatz* wird gerne verwendet um *Streckenlängen* zu bestimmen. Dazu müssen zwei *Geraden parallel* zu einander sein und zwei weitere *Geraden* sich in einem *Punkt* schneiden.





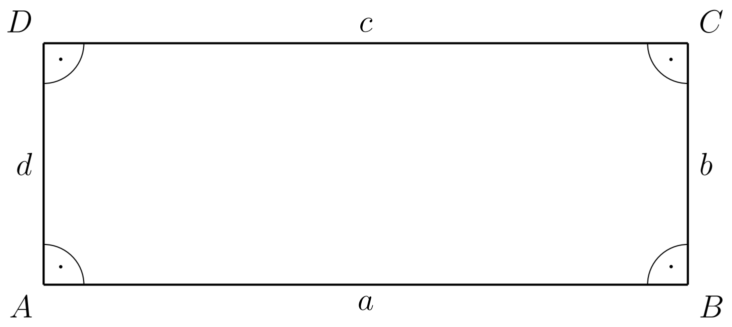
Die Abbildung veranschaulicht diese Bedingung auf die zwei möglichen Arten. Deutlich zu erkennen ist, dass dabei die *parallelen Geraden* auf einer Seite des *Schnittpunktes* oder auf unterschiedlichen Seiten befinden dürfen. Hierbei können Verhältnisse zwischen den jeweiligen *Strecken* aufgestellt werden. So verhält sich $\overline{AB}$ zu $\overline{A'B'}$ wie $\overline{AS}$ zu $\overline{A'S}$. Es gibt noch weitere solche Beziehungen, darunter auch diese:

$$\begin{gathered} \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{B'S}} \\ \frac{\overline{BS}}{\overline{B'S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}} \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}} \quad . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Der *Strahlensatz* wird nach der Behandlung des *Dreiecks* deutlich an Bedeutung verlieren, deswegen soll er auch nur eine Randnotiz dieses Buches sein.

3.4 Rechteck

Nachdem *Winkel* anhand von *Strecken* und *Geraden* eingeführt wurden und somit der erste Kontakt mit einer *Ebene*, also einer Ausdehnung in zwei *Dimensionen*, werden nun weitere wichtige Größen für zweidimensionale Körper am *Rechteck* eingeführt. Ein *Rechteck* ist eine *geometrisches* Objekt, welches aus vier *rechten Winkel* besteht. Somit hat ein *Rechteck* insgesamt eine *Winkelsumme* von 360°. Außerdem besitzt jedes *Rechteck* vier *Seiten*. Dabei sind die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander.



Die Abbildung zeigt, wie die *Seiten* und die *Eckpunkte* eines *Rechtecks* benannt werden. Es gilt, wie bereits erwähnt, dass $\overline{AB} = a = c = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = b = d = \overline{DA}$. Die *Strecken* $\overline{DB}$ und $\overline{AC}$ werden *Diagonalen* genannt.

Die bedeutendste *zweidimensionale Größe* von zweidimensionalen *geometrischen* Objekten ist der sogenannte *Flächeninhalt* A. Dieser gibt an wie groß die *Fläche* ist, welche durch die *Seiten* eingerahmt wurde. Dabei ist eine *Fläche* immer vorhanden, wenn zwei Richtungen, also *Dimensionen*, betrachtet werden. Ein Blatt Papier, ein Tisch und auch die Tafel bilden jeweils eine *Fläche*. Die *Fläche* wird in Quadratmeter $1m^2$ gemessen. Dabei ist ein Quadratmeter eine *Fläche* die von einem *Rechteck* eingeschlossen wird von einem Meter $a = 1m$ mal einem Meter $b = 1m$: $1m \cdot 1m = 1m^2$. Somit ist der *Flächeninhalt* A gegeben durch das *Produkt* der beiden *Seiten* a und b.

$$A = a \cdot b \tag{3.5}$$

Die zweite wichtige *Größe* ist der *Umfang* U, welcher den *Rand* der *Fläche* markiert und selbst eine *eindimensionale Größe* ist. Der *Umfang* U ist die *Summe* aller *Strecken*, somit ergibt sich für ein *Rechteck*:

$$U = 2a + 2b \tag{3.6}$$

3.4.1 Übungsaufgaben zu Rechtecken

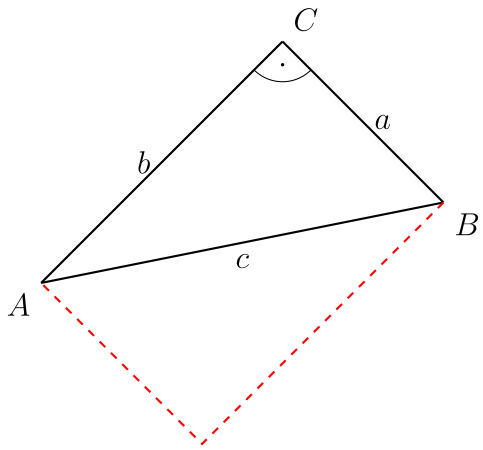
Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken.*
a) $a = 3cm$ und $b = 6cm$
b) $a = 2cm$ und $b = 7cm$
c) $a = 9cm$ und $b = 12cm$
d) $a = 4cm$ und $b = 17cm$
e) $a = 27cm$ und $b = 3cm$
f) $a = 1,5cm$ und $b = 60cm$
g) $a = 0,5cm$ und $b = 2cm$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken. Gib das Ergebnis in der Einheit der längeren Seite an. Runde dabei das Ergebnis bis auf drei Nachkommastellen.*
a) $a = 3dm$ und $b = 6cm$
b) $a = \frac{1}{2}dm$ und $b = 90mm$
c) $a = 4,2m$ und $b = 430cm$
d) $a = 2mm$ und $b = 2cm$
e) $a = \frac{1}{9}cm$ und $b = 27dm$
f) $a = 1,125km$ und $b = 8000m$
g) $a = \sqrt{111}cm$ und $b = 120mm$

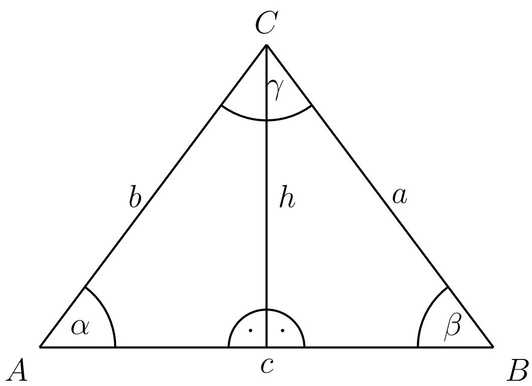
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.13) Lösungen zu Rechtecken.

3.5 Dreieck

Wenn ein *Rechteck* entlang einer *Diagonalen* in zwei Objekte zerschnitten wird, so ergeben sich daraus zwei *Dreiecke* mit jeweils einem *rechten Winkel* - *rechtwinklige Dreiecke*. *Dreiecke* sind mit *Abstand* die wichtigste *geometrische* Konstruktion der Mathematik, denn nicht zu Letzt lässt sich jede eckige *geometrische* Form in *Dreiecke* unterteilen und sogar die Eigenschaften des *Kreises* an ihnen erklären. Das *rechtwinklige Dreieck* ist hierbei das bedeutendste *Dreieck*.



Die Abbildung zeigt die Benennung der *Größen* eines *rechtwinkligen Dreieckes*. Da das *Dreieck* aus dem Zerschneiden eines *Rechtecks* in zwei Teile gewonnen wurde, ist die *Winkelsumme* eines *Dreieckes* gegeben als 180°. Allerdings müssen nicht alle *Dreiecke* einen *rechten Winkel* besitzen, sodass auch die *Winkel* benannt werden müssen.

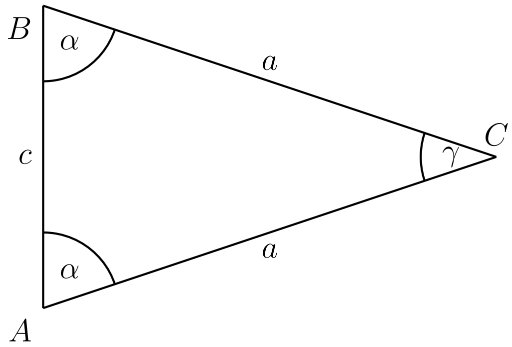


Die Abbildung zeigt, dass die Winkel mit griechischen Buchstaben benannt werden - das vollständige griechische Alphabet sowie andere können im Anhang gefunden werden (13.1). Außerdem ist zu erkennen, dass ein beliebiges *Dreieck* immer in zwei *rechtwinklige Dreiecke* unterteilt werden können. Dazu bedarf es der Konstruktion der sogenannten *Höhe* h des *Dreiecks*, wobei dann in diesem Fall die *Seite* c die *Grundseite* g wäre. Die *Höhe* h muss immer *orthogonal* zur *Grundseite* g sein und im *Punkt* enden, welcher der *Grundseite* g gegenüber liegt (in der Abbildung wäre dies der Punkt C).
Aus der Zerlegung des *Rechtecks* in zwei *Dreiecke* ergibt sich, dass der *Flächeninhalt* A eines *Dreiecks* halb so groß sein muss wie ein *Rechteck* mit gleichen Maßen. Die Bedingung zur Berechnung des *Flächeninhalts* A beim *Rechteck* waren dessen Eigenschaften, dass die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und alle *Winkel rechte Winkel* sein müssen. Somit muss die Hälfte

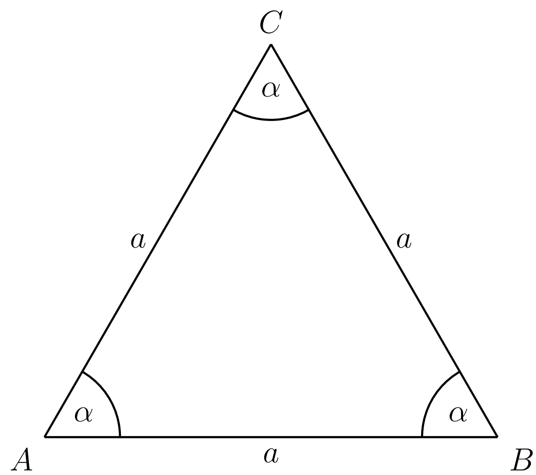
des *Produkts* der *Grundseite* g mit der Höhe h den *Flächeninhalt* A des *Dreiecks* widerspiegeln, da die *Grundseite* g und die *Höhe* h ein *Rechteck* aufspannen. Der *Umfang* U ist wieder gegeben durch die *Summe* aller *Strecken*, die die *Fläche* umranden.

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} \\ U &= a + b + c \end{aligned} \tag{3.7}$$

Neben dem *rechtwinkligen Dreieck* gibt es noch weitere spezielle *Dreiecke*. Darunter fällt das sogenannte *gleichschenklige Dreieck*, bei dem zwei *Seiten* gleich lang sind. Nicht nur die *Schenkellängen* zum *Winkel* γ sind gleich groß, sondern auch die anderen beiden *Winkel*.

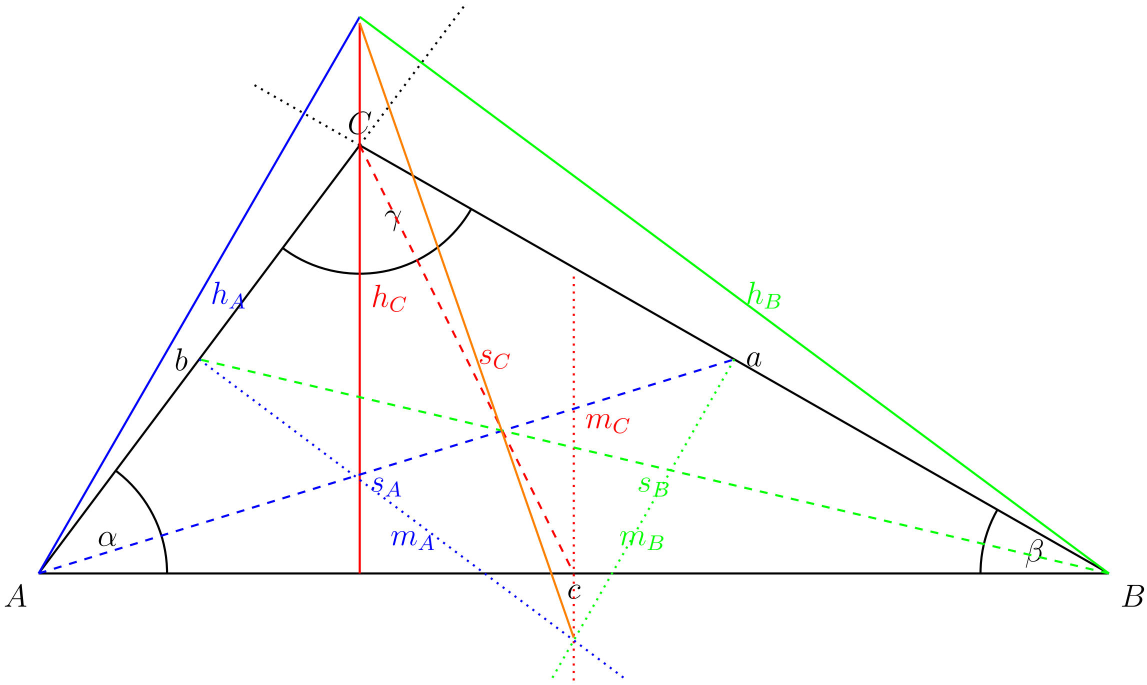


Das Geodreieck ist ein solches *gleichschenkliges Dreieck*. Durch die Bestimmung eines *Winkels* sind alle *Winkel* bekannt - Diese Eigenschaft kann in vielen Aufgaben ausgenutzt werden.
Des Weiteren gibt es noch den Spezialfall, dass alle *Seiten* des *Dreiecks* gleich lang und alle *Winkel* gleich groß sind - das *gleichseitige Dreieck*. Damit ergibt sich automatisch, dass jeder *Winkel* exakt 60° messen muss.



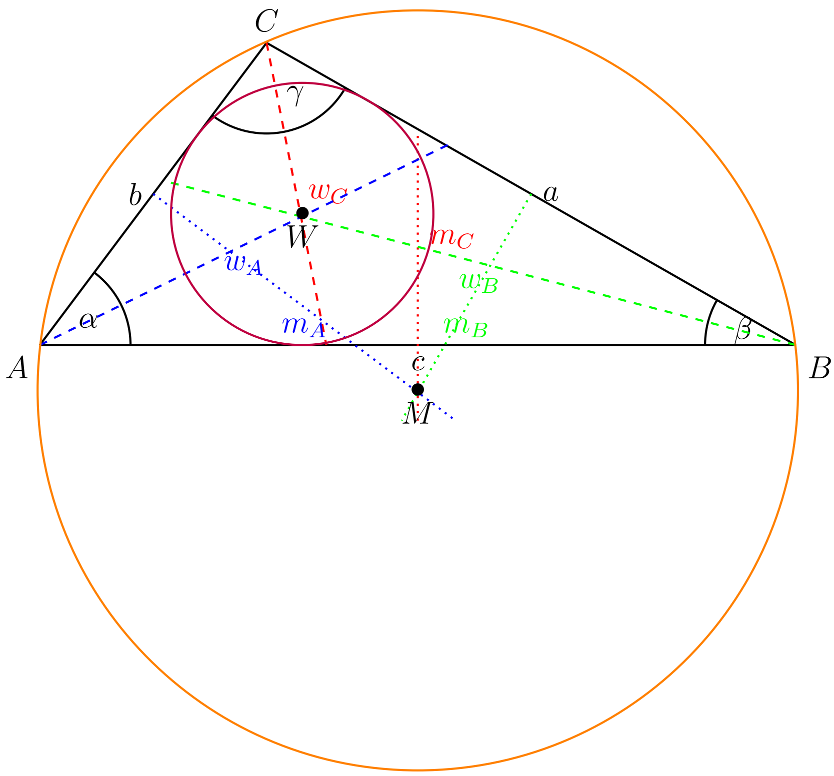
Nachdem das *Dreieck* und dessen spezielle Formen eingeführt wurden, werden im Folgenden weitere *Größen* eingeführt, welche manchmal Aufgaben vereinfachen oder gar erst lösbar machen.

Eine solche *Größe* ist der *Schwerpunkt*. Dieser kann zeichnerisch ermittelt werden, indem die *Seitenhalbierenden* gefunden werden. Dabei wird die Mitte einer *Seite* mit dem gegenüberliegenden *Punkt* verbunden. Der *Schnittpunkt* der *Seitenhalbierenden* ist der *Schwerpunkt* S.
Durch die Konstruktion einer *Orthogonalen* in der Mitte einer jeden Seite ergeben sich die sogenannten `Mittelsenkrechten`. Auch sie haben einen *Schnittpunkt*, welcher auch *Mittelpunkt* des *Umkreises* M genannt wird. An diesem Punkt wäre es möglich einen *Kreis* zu ziehen, sodass alle *Eckpunkte* des *Dreiecks* auf dem *Kreis* liegen würden.
Eine sogenannte *Winkelhalbierende* kann, wie der Name es schon erahnen lässt, durch die Halbierung des *Winkels* konstruiert werden. Der *Schnittpunkt* der *Winkelhalbierenden* wird *Mittelpunkt* des *Innenkreises* W genannt und dient zur Konstruktion eines *Kreis*, der jede *Seite* berührt aber nicht schneidet.



In der Abbildung wurden alle *Höhen* h als solide, alle *Seitenhalbierenden* s als gestrichelte und alle *Mittelsenkrechten* m als gepunktete Linien eingezeichnet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt* A ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt* B ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt* C ausgehen rot gehalten. Es fällt auf, dass der *Schnittpunkt* der *Höhen* sowie der *Schnittpunkt Mittelsenkrechten* außerhalb des *Dreiecks* liegen. Dies rührt daher, dass ein *Winkel* größer als 90° ist.
Die *Schnittpunkte* der *Winkelhalbierenden*, der *Seitenhalbierenden* und der *Höhen* liegen auf einer *Geraden*, der sogenannten *Euler'schen Gerade*, welche in der Abbildung orange eingezeichnet ist. Dabei ist das Streckenverhältnis immer das gleiche. Die *Strecke* $\overline{HS}$ ist dabei immer doppelt so lang wie die *Strecke* $\overline{SM}$

Zur Veranschaulichung des *Innen-* und *Umkreises* dient folgende Abbildung:

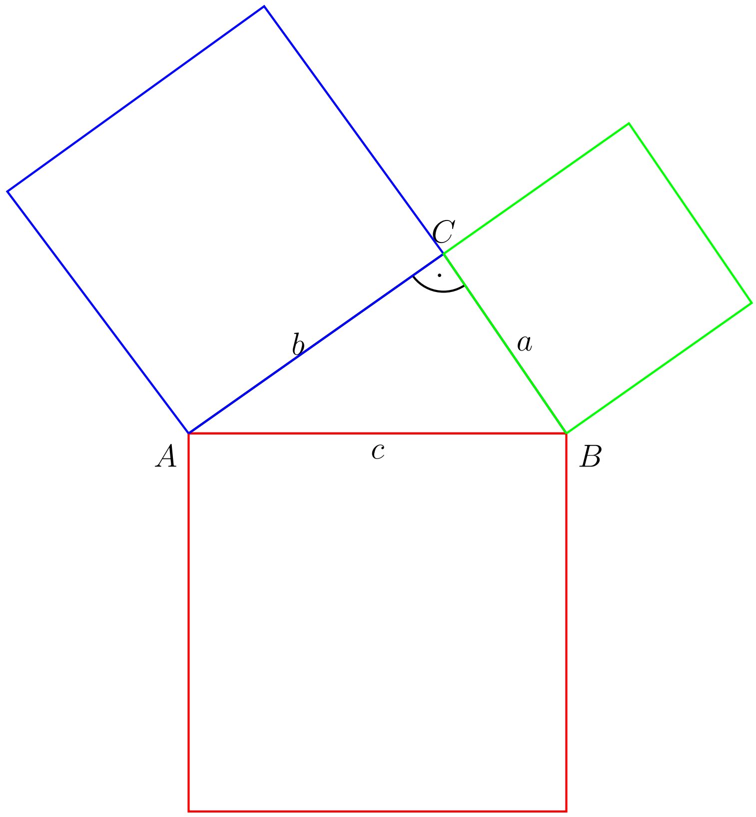


In der Abbildung sind die *Winkelhalbierenden* w gestrichelt und die *Mittelsenkrechten* m gepunktet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt* A ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt* B ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt* C ausgehen rot gehalten. Der *Innenkreis* ist in einem dunklen violett gehalten und hat seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* W, während der *Umkreis* ist in orange gezeichnet wurde und seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* M hat.

Nachdem nun die Konstruktion von verschiedenen wichtigen *Punkten* und *Strecken* beziehungsweise *Geraden* erläutert wurde, soll das *rechtwinklige Dreieck* genauer betrachtet werden. Zu nächst soll der *Satz des Pythagoras* betrachtet werden, welcher wohl der berühmteste *Satz* der Mathematik ist. Ein *Satz* in der Mathematik ist eine bewiesene *Gleichung*, die bis auf in sehr speziellen Ausnahmefällen immer ihre Gültigkeit besitzt.

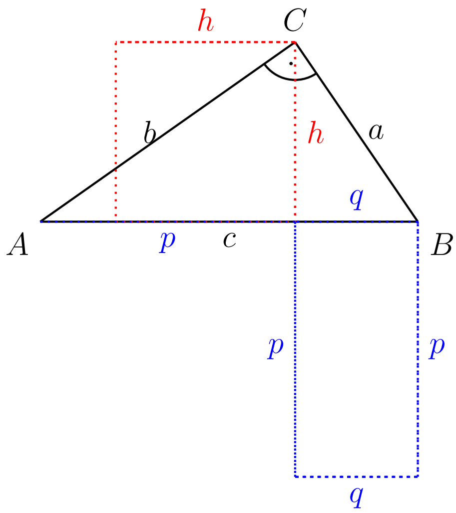
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3.8}$$

Wie das a^2, b^2 und c^2 schon suggerieren, werden hierbei *Flächeninhalte* von *Rechtecken* mit den gleichen *Seitenlängen* (sogenannte *Quadrate*), die von den jeweiligen *Seiten* des *Dreiecks* aufgespannt werden, ins Verhältnis gebracht.



Die Abbildung zeigt deutlich die verschieden *Flächen* der *Quadrate*. Dabei gilt, dass der *Flächeninhalt*, der am größten ist und von der längsten *Seite* c aufgespannt wird, genau so groß ist wie die *Summe* der beiden anderen *Flächen*. Die längste *Seite* eines *rechtwinkligen Dreiecks* wird *Hypotenuse* genannt und befindet sich immer gegenüber vom *rechten Winkel*. Die beiden anderen *Seiten* heißen *Katheten* und werden vom Kapitel „Trigonometrie“ detaillierter unterschieden und untersucht.

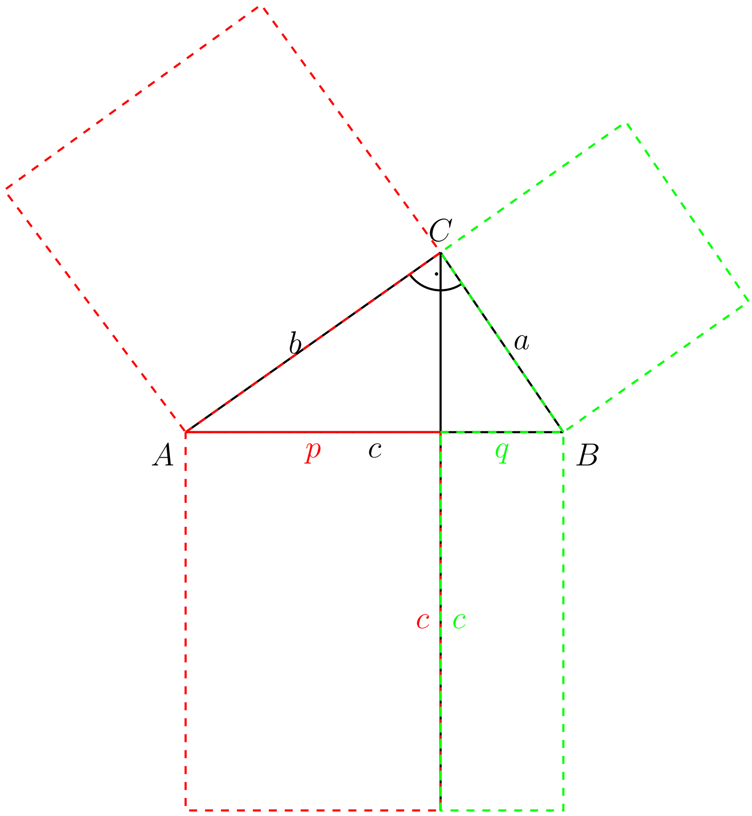
Neben dem *Satz das Pythagoras* existieren noch weitere *Sätze*. Einer von ihnen ist der sogenannte *Höhensatz von Euklid*.



Die Abbildung zeigt, dass die *Flächeninhalte* aus dem *Quadrat*, welches durch die *Höhe* h mit sich selbst aufgespannt wird, mit dem *Rechteck* aus der unterteilten *Hypotenuse* aus p und q in Verbindung gebracht werden. Es gilt:

$$h^2 = pq \tag{3.9}$$

Zu guter Letzt wird noch auf den *Kathetensatz* hingewiesen, welcher die *Rechtecke* aus den Teilstücken der *Hypotenuse* mit der *Hypotenuse* und jeweiligen *Kathetenquadraten* in Verbindung setzt.



Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= cq \\ b^2 &= cp \end{aligned} \tag{3.10}$$

Es soll nochmals betont werden, dass das *Dreieck* eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Und auch grade in den Naturwissenschaften sind *Dreiecke* von fundamentaler Wichtigkeit. Im Kapitel „Trigonometrie“ werden die Eigenschaften des *Dreiecks* und Beziehungen von *Größen* des *Dreiecks* untereinander weiter beleuchtet bis sich daraus resultierendes Wissen nochmals vertieft wird im Kapitel „Funktionen“.

3.5.1 Übungsaufgaben zu Dreiecken

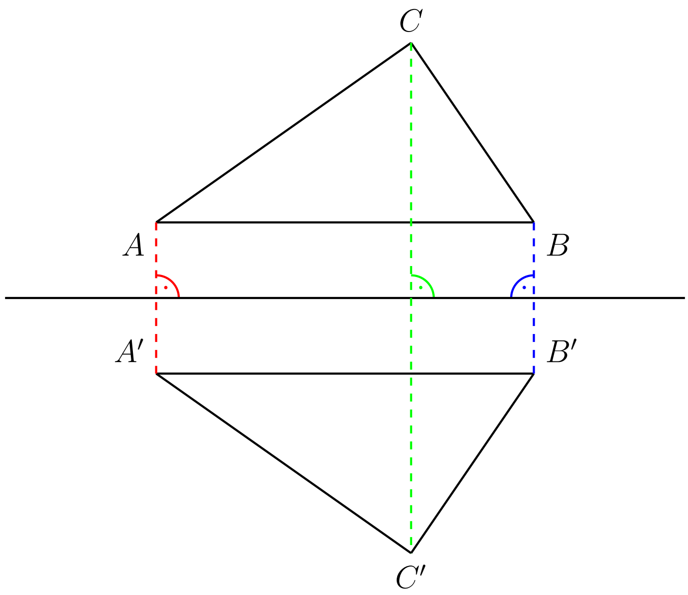
Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Dreiecken. (Benutze die vorgestellten Sätze!)*
a) $g = 9cm$, $a = 4cm$ und $h_g = 3cm$
b) $g = 11cm$, $a = 5cm$ und $h_g = 2cm$
c) $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $h_c = 2cm$
d) $g = 7cm$, $b = 6cm$ und $h_g = 1cm$
e) $p = 2,5cm$, $q = 2cm$ mit einem rechten Winkel
f) $c = 12cm$, $q = 3cm$ und $a = 5cm$

Aufgabe 2: *Du befindest dich mit deinem Geodreieck $20m$ weit weg von einem Turm und hältst das Geodreieck auf $1,5m$ Höhe vom Boden. Du schaust entlang der längsten Kante, sodass die Kante und die Spitze des Turms eine Linie bilden. Dabei ist die Kante die noch unten zeigt nun parallel zum Boden. Wie hoch ist der Turm?*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.14) Lösungen zu Dreiecken.

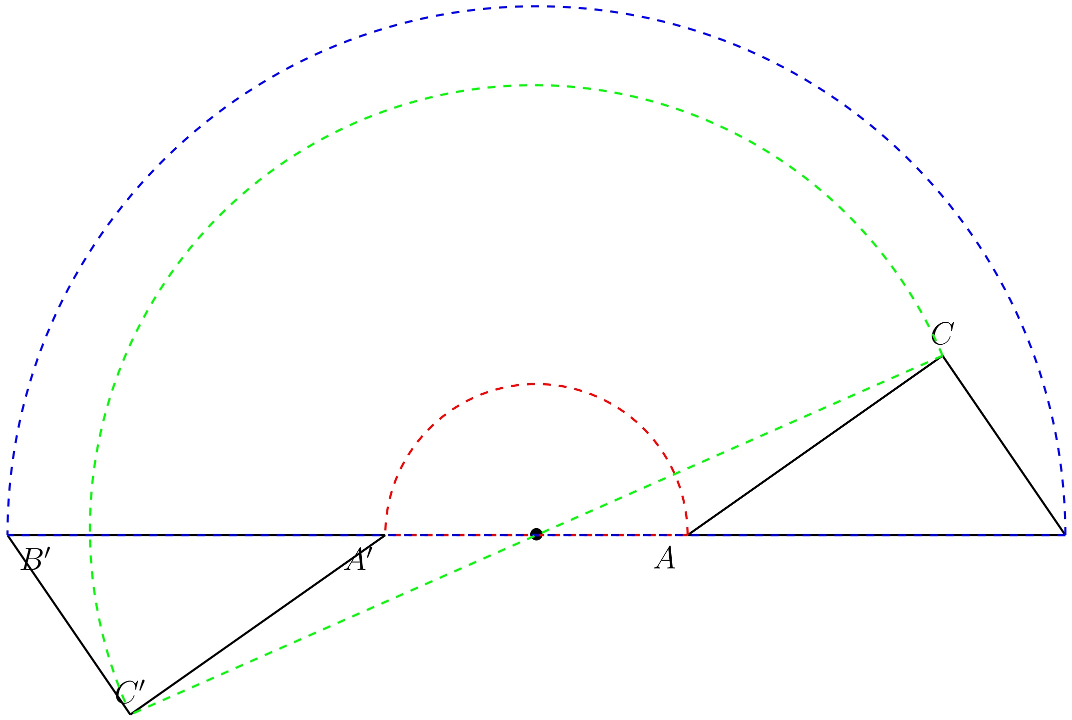
3.6 Symmetrien und Spiegelungen

Symmetrien sind wichtige Eigenschaften von Objekten und *Funktionen*. Die bis jetzt erfolgreichste Beschreibung der Natur beruht ausschließlich auf *Symmetrien*. Aus diesem Grund sollen in diesem Abschnitt zwei spezielle Formen von *Symmetrien* vorgestellt werden. Um eine *Symmetrie* verstehen zu können müssen *Spiegelungen* eingeführt werden. Dabei wird im Wesentlichen zwischen zwei Arten von *Spiegelungen* unterschieden. Die erste Art ist eine *Achsenspiegelung* mit den Eigenschaften, dass alle *Punkte*, die einen *Abstand* zu einer beliebigen *Achse* haben, mit dem gleichen *Abstand* auf die andere *Seite* der *Achse* eingezeichnet - *gespiegelt* - werden.



In der Abbildung ist zu erkennen wie eine solche *Achsenspiegelung* aussieht. Hierbei zeigen die gestrichelten Linien, dass die *Abstände* zwischen den *Eckpunkten* (A, B und C) und der *Achse* genauso lang sind wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkt* (A', B' und C') zur *Spiegelachse*. Dabei meint *Abstand* immer die kürzeste *Strecke* zwischen *Punkt* und *Achse*, was immer die *orthogonale Strecke* zur *Achse* ist.

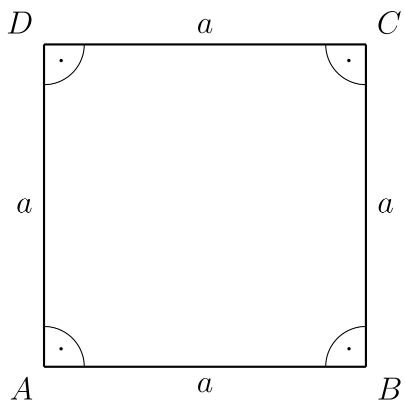
Die zweite Art der *Spiegelungen* ist die *Punktspiegelung*, dabei wird ein Objekt in einem *Punkt* um 180° gedreht. Dabei sind die *Abstände* der *Eckpunkte* (A, B und C) zum *Spiegelpunkt* genauso groß wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkte* (A', B' und C') zum *Spiegelpunkt*, wie an der folgenden Abbildung zu erkennen ist.



Im Allgemeinen wird bei diesen beiden *Spiegelungen* von einer *Achsen*- oder *Punktsymmetrie* gesprochen, wenn nach einer solchen *Spiegelung* das Ergebnisbild identisch zum Ausgangsbild ist. Die wohl bedeutendste *Symmetrie* in der Beschreibung der Natur ist die *radiale Symmetrie*[2], welche angibt, dass es keine Relevanz hat in welche Richtung ausgehend von einem *Punkt* das Problem betrachtet wird. Folglich ist die *radiale Symmetrie* eine noch speziellere *Punktsymmetrie*.

3.7 Spezielle Vierecke

Wie bereits schon im vorigen Abschnitt beschrieben, gibt es spezielle Vierecke. So wird ein *Rechteck*, bei dem alle Seiten die gleiche Länge vorweisen können, *Quadrat* genannt.

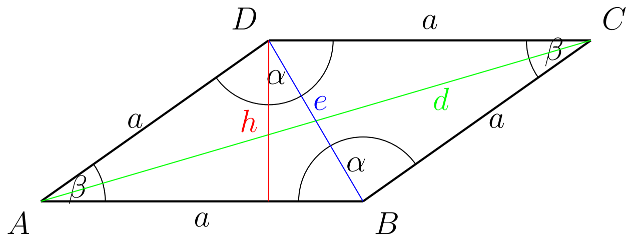


Die Berechnung des *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U sind beim *Quadrat* trivialer Natur und ergeben sich als:

[2]heißt soviel wie Kreissymmetrie

$$A = a^2$$
$$U = 4a \tag{3.11}$$

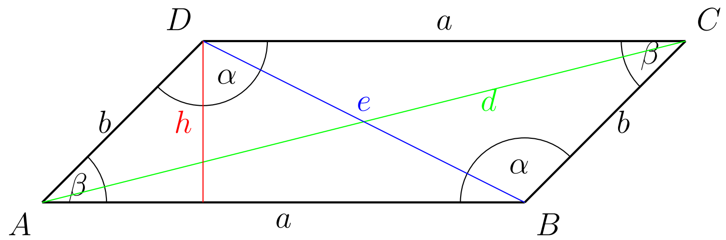
Ein Viereck mit vier gleich langen *Seiten*, deren gegenüber liegende *Winkel* gleich groß sind, wird *Raute* genannt (selten auch *Rhombus*).



Die Berechnung des *Flächeninhalts* A ist ähnlich wie bei einem *Dreieck* mit dem Unterschied, dass durch die Einzeichnung der *Diagonale* e zwei *Dreiecke* vorliegen. Somit muss der *Flächeninhalt* A_Δ eines der *Dreiecke* verdoppelt werden, sodass sich daraus wiederum der *Flächeninhalt* der *Raute* $A = 2A_\Delta$ ergibt. Somit gilt für den *Umfang* U und dem *Flächeninhalt* A (wobei in der Abbildung die *Grundseite* g gleich a ist):

$$A = gh$$
$$U = 4a \tag{3.12}$$

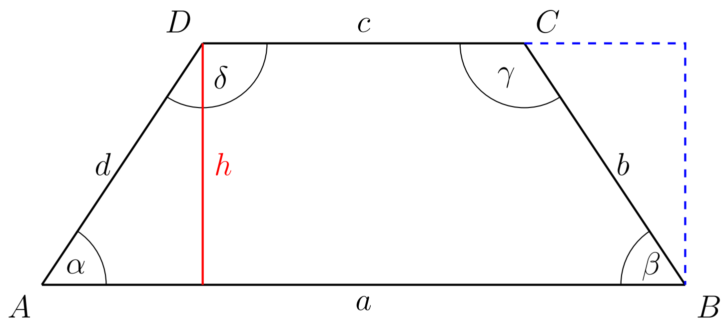
Wenn nun die benachbarten *Seiten* eine unterschiedliche Länge besitzen aber die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander sind, wird von einem *Parallelogramm* gesprochen.



Dabei unterscheidet sich zur *Raute* lediglich der *Umfang* U, welcher nach wie vor durch die Aufsummierung der *Seiten* gegeben ist:

$$A = gh$$
$$U = 2a + 2b \tag{3.13}$$

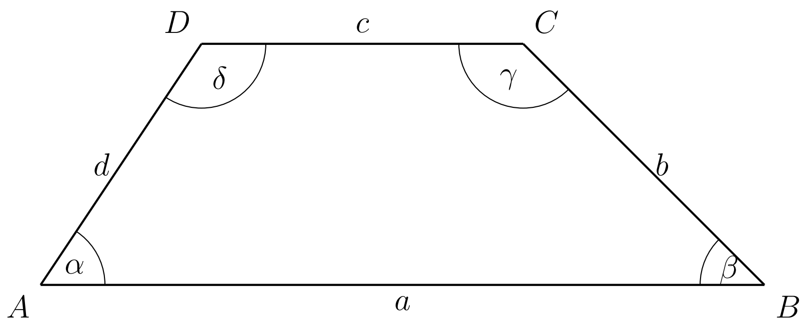
Wenn mindestens zwei *Seiten parallel* zu einander sind, allerdings sonst keine Größen zwingend gleich groß sein müssen, ist die Rede von einem *Trapez*.



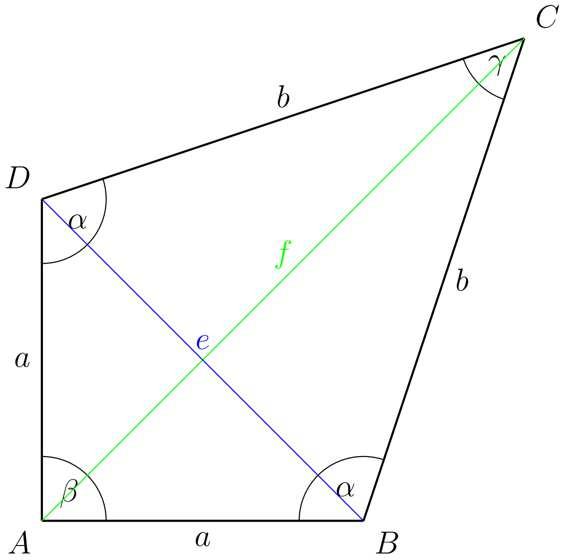
Die Abbildung zeigt ein *Trapez* bei dem die *Winkel* δ und γ sowie α und β gleich groß und aus diesem Grund auch die *Seiten* d und $b$gleich lang sind. Auch zeigt die Abbildung wie aus einem solchen *Trapez* wieder ein *Rechteck* gewonnen werden kann. Dabei wären die Seiten dieses *Rechtecks* gegeben durch die *Höhe* h und dem *Mittelwert* m der *Summe* von a und c. Hierbei gilt $m = \frac{a+c}{2}$ und somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2}h \\ U &= a+b+c+d \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wie bereits erwähnt müssen nur zwei *Seiten parallel* zu einander sein, sodass von einem *Trapez* gesprochen werden kann.



Dabei verändert sich die Berechnungsmethode das *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U nicht und ist genauso durch zu führen wie in Gleichung (3.14)
Als letztes soll der *Drachen* eingeführt werden. Er zeichnet sich dadurch aus, dass zwei *Winkel* gleich groß sind, welche sich gegenüber liegen.



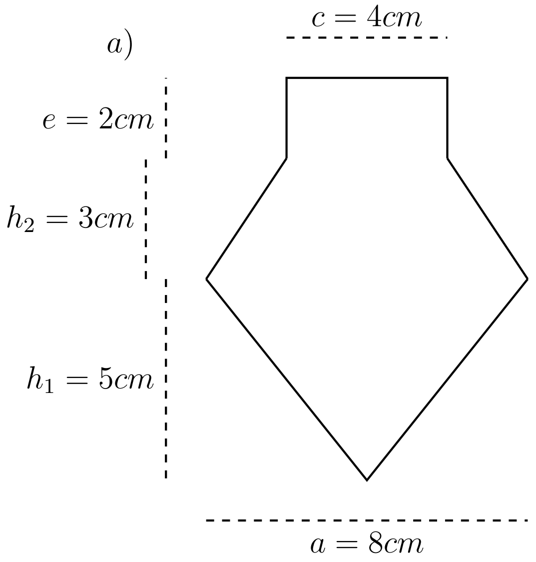
Wie die Abbildung zeigt sind die *Schenkel* des *Winkels* β und die *Schenkel* des *Winkels* γ jeweils gleichlang, was auch ein Merkmal eines *Drachens* ist. Dabei ist ein *Drachen* aus zwei *Dreiecken* aufgebaut, deren *Flächeninhalte addiert* werden können. Die *Höhen* dieser *Dreiecke* sind gegeben durch die Einzeichnung der *Diagonalen* e und f. Somit gilt:

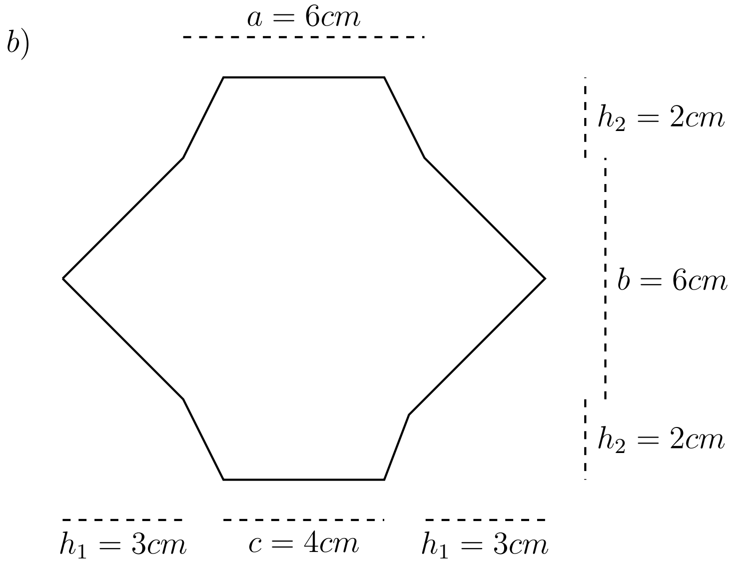
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{fe}{2} \\
U &= 2a + 2b
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

3.7.1 Übungsaufgaben zu Vierecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von jeweiligen angegeben Viereck.*
a) Quadrat: $a = 2cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm$, $b = 3cm$ und $h_a = 2cm$
d) Trapez: $a = 4cm$, $c = 11cm$, $b = d$ und $h = 4cm$
e) Drachen: $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $e = 6cm$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und Flächeninhalt A für die jeweiligen Vielecke.*

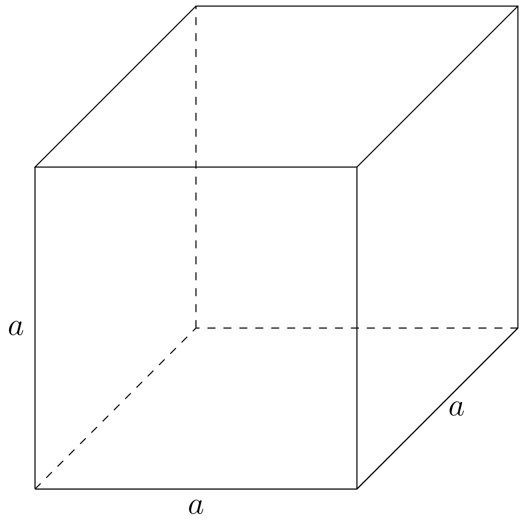




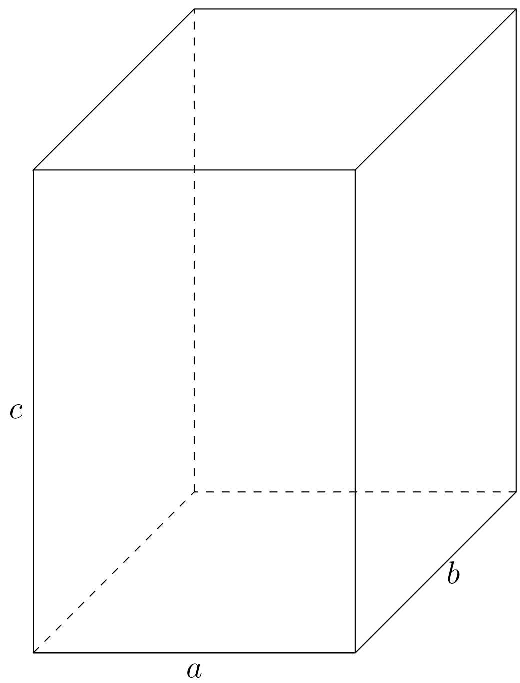
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.15) Lösungen zu Vierecken.

3.8 Mehrdimensionale Vielecke

Nachdem die wichtigsten Objekte in zwei *Dimensionen* besprochen wurden, wird eine weitere *Dimension* eingeführt. So kommt nach der x-Richtung und der y-Richtung die z-Richtung hinzu, welche auch wieder in einem $90°$-*Winkel* zu den beiden anderen Richtungen steht. Da ein Blatt Papier nur eine zweidimensionale *Fläche* ist, muss die dritte *Dimension* durch eine Konvention hinzugefügt werden. Dazu wird die z-Richtung in einem $45°$ zur x- und y-Richtung eingezeichnet. Dabei wird die Länge in z-Richtung beim Einzeichnen halbiert. *Strecken*, die sich hinter *Flächen* befinden, werden gestrichelt. So würde ein *Quadrat*, welches in z-Richtung ebenso um die gleiche *Seitenlänge* a erweitert wird, *Würfel* genannt werden.



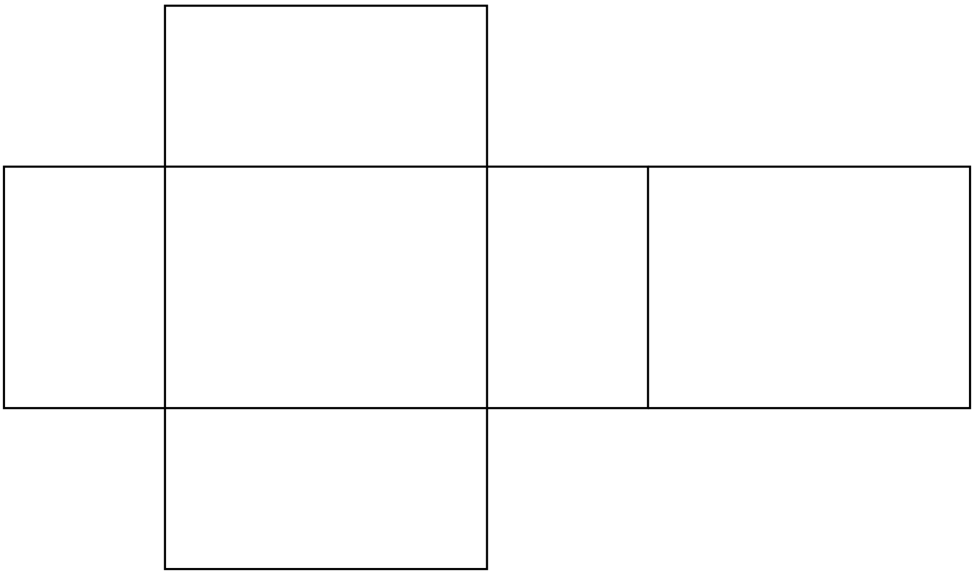
Die Abbildung zeigt genau so einen *Würfel*. Der *Würfel* zeichnet sich dadurch aus, dass alle *Winkel* $90°$ besitzen und alle *Seiten* gleich lang sind. Wie im zweidimensionalen das *Quadrat* ein Spezialfall des *Rechtecks* ist, so ist auch im dreidimensionalen ein *Würfel* ein Spezialfall eines sogenannten *Quaders*.



Wie die Abbildung zeigt, sind nur alle *Strecken*, die *parallel* zu einander sind gleich lang. Das sind die *Strecken*, die jeweils in eine *Dimension* zeigen. Wie auch schon bei der *Flächenberechnung* soll nun das *Volumen* des Körpers bestimmt werden. Das *Volumen* V ist ein *Größe*, die in $1m^3$ gemessen wird. Dabei gilt $1m^3 = 1m \cdot 1m \cdot 1m$ und somit wird das *Volumen* eines *Quaders* durch die *Multiplikation* der jeweiligen unterschiedlichen *Seiten* bestimmt. Folglich Länge mal Breite mal Höhe.

$$V = abc \tag{3.16}$$

Jeder *Quader* zeichnet sich auch dadurch aus, dass er acht *Ecken*, zwölf *Kanten* und sechs *Seiten* besitzt. Jeder dreidimensionale Körper kann aufgeklappt werden. Dazu werden alle *Flächen* so aneinander gezeichnet, sodass dadurch der Körper wieder erschaffen werden kann. So sind die Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* ersichtlicher.

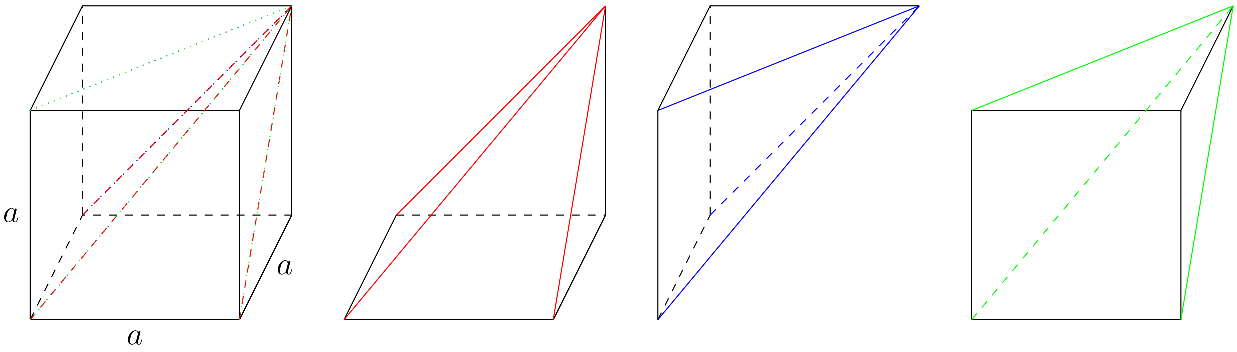


Die Abbildung zeigt so eine *Darstellung*, welche *Netz* genannt wird. Das *Netz* des *Quaders* zeigt, dass die *Oberfläche* O über die *Summe* der jeweiligen *Rechteckflächeninhalte* berechnet werden kann. Dabei ist die *Oberfläche*, die *Fläche*, die das *Volumen* umrandet und wird wie jede *Fläche* in $1m^2$ gemessen.

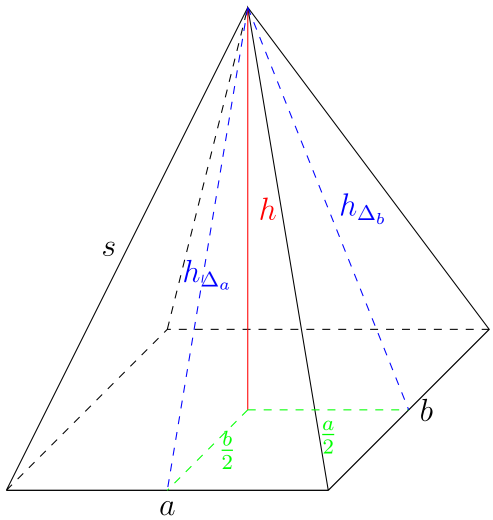
$$O = 2ab + 2ac + 2bc \tag{3.17}$$

Aus der *Flächenberechnung*, wo eine *Fläche* stets durch einen *Umfang* umrandet und nun aus der *Volumenberechnung*, wo das *Volumen* durch eine *Oberfläche* umrandet wird, kann generell gesagt werden, dass der sogenannte *Rand* immer eine *Dimension* kleiner ist als die Gesamtanzahl der *Dimensionen*.

Bisher wurde der *Quader* und der *Würfel* betrachtet, bei denen jeweils acht *Eckpunkt* vorhanden werden. Wenn nun ein Körper eine viereckiger *Grundfläche* haben soll, aber nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen soll, dann wäre die *Volumenbestimmung* scheinbar schwieriger Natur. Allerdings kann jeder *Quader* der „unten“ wie „oben“ die *Grundfläche* aufweist in drei exakt gleiche Körper verschnitten werden, die nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen und eine viereckiger *Grundfläche* besitzen.



Die Abbildung zeigt, wie so ein *Quader* zerlegt werden könnte. Ein solcher *Körper* heißt *Pyramide*. Dabei ist es nicht wichtig, wo sich der zulaufende *Punkt*, die Spitze, befindet. Im Folgenden soll sich dieser *Punkt* über dem *Schwerpunkt* der *Grundfläche* befinden.

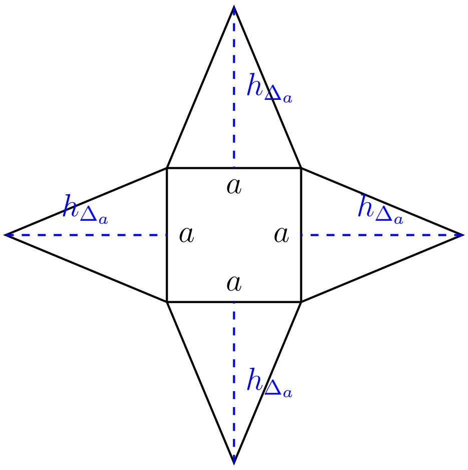


Das *Volumen V* der *Pyramide* mit *rechteckiger Grundseite* aus der Abbildung wäre gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3}abh \quad , \tag{3.18}$$

da die *Pyramide* dreimal in einen *Quader* mit den Maßen a, b und h passen würde.

Die *Oberfläche* O wäre nach Betrachtung des *Netzes* der *Pyramide* auch nichts weiter als die *Flächeninhalt* der *Dreiecke* addiert mit der *Grundfläche*, welche in diesem Beispiel *quadratisch* gewählt sei (b=a).



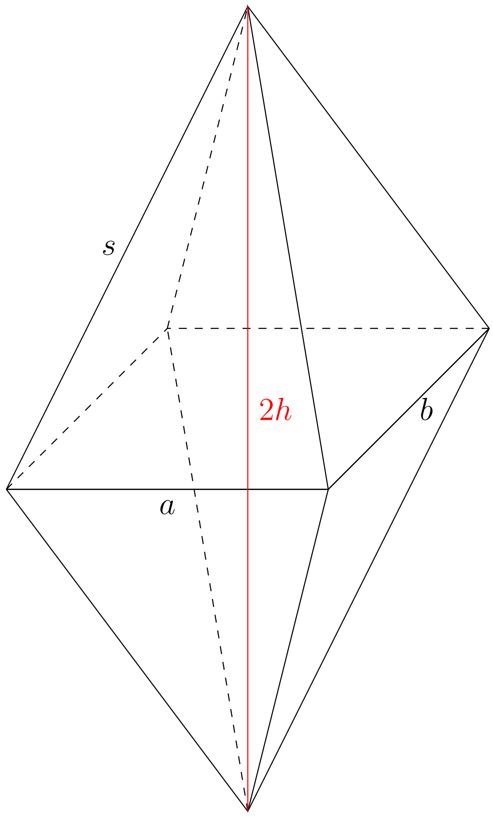
Wie das *Netz* schon vermuten lässt, wird die *Höhe* der *Dreiecke* h_{Δ_a} benötigt. Diese kann über den *Satz des Pythagoras* bestimmt werden (siehe dazu die Abbildung der *Pyramide*):

$$h_{\Delta_a} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \quad . \tag{3.19}$$

Somit ergibt sich für die *Oberfläche* der *Pyramide* O aus:

$$O = ah_{\Delta_a} + bh_{\Delta_b} + ab \quad . \tag{3.20}$$

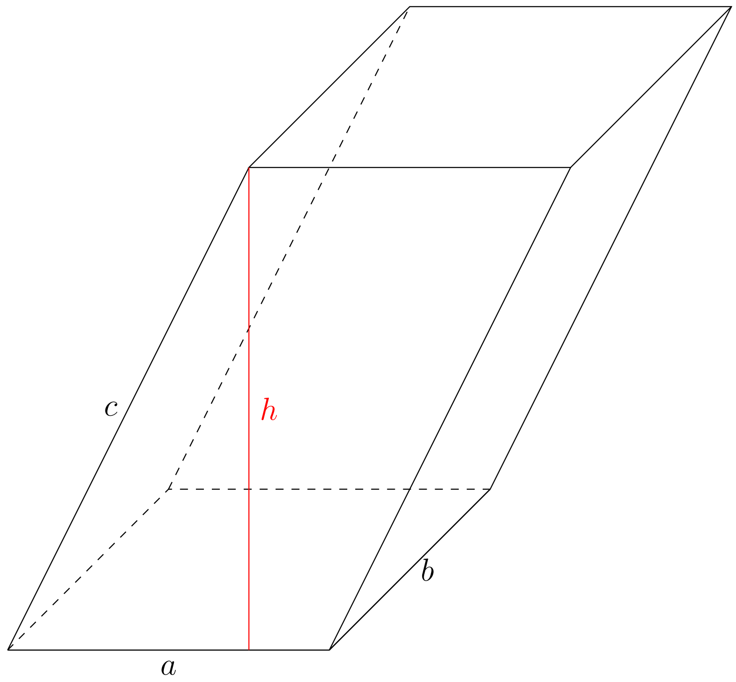
Viele Körper sind aus *Quadern* und *Pyramiden* zusammen gesetzt, wie zum Beispiel das *Oktaeder*:



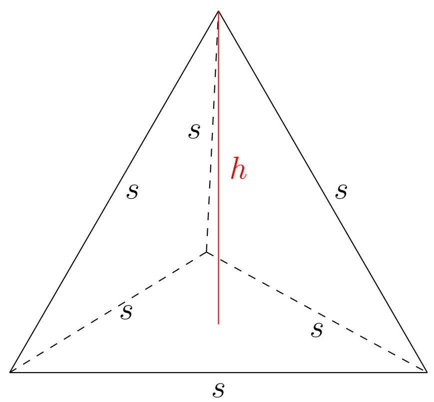
Wie aus der Abbildung des *Oktaeders* zu erkennen ist, ist dieser Körper aus zwei *Pyramiden* zusammengesetzt, sodass das *Volumen V* und die *Oberfläche O* (also zwei *Pyramiden* ohne die *Grundflächen*) gegeben ist als:

$$O = 2ah_{\Delta_a} + 2bh_{\Delta_b}$$
$$V = \frac{2}{3}abh \quad . \tag{3.21}$$

Wie schon bei der *Pyramide*, müssen die Körper nicht nur *rechte Winkel* aufweisen, wie zum Beispiel dieses *schiefe Prisma* mit *rechteckiger Grundfläche*:



Da die *Winkel* im Verhältnis zu einander kleiner und größer geworden sind, wird das *Volumen* durch die *Höhe h* limitiert. Generell gilt für jeden Körper zur Berechnung des *Volumens* immer „*Grundseite* mal *Höhe*“. Somit ist es völlig ausreichend einen Körper zu unterteilen in Teilkörper, die berechnet werden können.
Zu guter Letzt soll noch das *Tetraeder* vorgestellt werden:



Das *Tetraeder* zeichnet sich dadurch aus, dass es auf vier *gleichseitigen Dreiecken* besteht und der einzige Körper mit nur vier *Flächen* ist. Die *Oberfläche O* und das Volumen *V* ist gegeben durch das Prinzip, welches anhand der *Pyramide* erläutert wurde, als:

$$\begin{aligned} O &= s^2\sqrt{3} \\ V &= \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \quad . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Bei einem *Tetraeder* sind die *Winkel* der zwischen den *Kanten* gleich groß und haben den Wert von $109,5°$.
Da nun viele eckige Körper eingeführt wurden soll im folgenden Abschnitt der *Kreis* und danach die *Ellipse* vorgestellt werden, sodass auch *Rundungen* berechnet werden können.

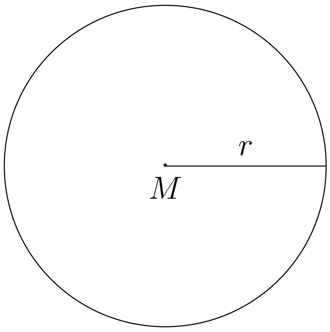
3.8.1 Übungsaufgaben zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1: *Bestimme Oberfläche O und Volumen A für die gegebenen Werte der jeweiligen Körper.*
a) Würfel: $a = 3cm$
b) Quader: $a = 2cm$, $b = 9cm$ und $c = 4cm$
c) Pyramide: $b = a = 4cm$ und $h = 6cm$
d) Pyramide: $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $h = 5cm$
e) Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$: $a = 6cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 4cm$
f) Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf: $a = 2,5cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 2,5cm$

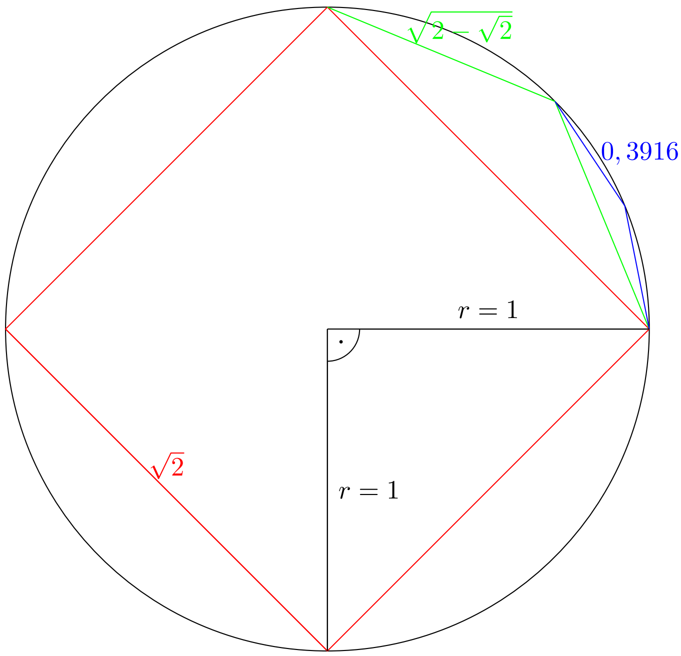
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.16) Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken.

3.9 Kreis

Ein *Kreis* zeichnet sich dadurch aus, dass er rund ist und der *Abstand* vom *Mittelpunkt* zum *Kreis* selbst immer gleich groß ist. Dieser *Abstand* wird *Radius* r genannt. Der doppelte *Radius* wird als *Durchmesser* $d = 2r$ bezeichnet.



Die Abbildung zeigt einen *Kreis* mit *Radius* r mit dem *Mittelpunkt* M. In der *Geometrie* sind grade die *Größen* des *Flächeninhalts* und des *Umfangs* interessant. Beide Werte sollen anhand eines *Kreises* mit *Radius* $r = 1$ ermittelt werden. Da wird zu nächst ein *Quadrat* in den *Kreis* gezeichnet, welches die *Seitenlänge* $a = \sqrt{2}$ besitzt. Dies wird offensichtlich durch die Verwendung des *Satz des Pythagoras*. Anschließend soll in der noch nicht vom roten *Quadrat* ein *gleichschenkliges Dreieck*, welches grün sein soll, eingezeichnet werden, sodass alle *Eckpunkte* sich auf dem schwarzen *Kreisbogen* befinden. Anschließend wird wieder ein *Dreieck*, das blau sein soll, so eingezeichnet, dass es im noch nicht erschlossenen Raum liegt und dazu wieder alle *Eckpunkte* sich auf dem *Kreisbogen* befinden.



Die Abbildung zeigt genau dieses Verfahren. Wenn diese Prozedur oft genug wiederholt wurde, soll der *Umfang* des eckigen Körpers und auch der *Flächeninhalt* bestimmt werden. Dies wird nun im Weiteren schrittweise geschehen.

Um den *Umfang* zu bestimmen, werden jeweils die *Schenkellängen* der *gleichschenkligen Dreiecke* benötigt, welche dann mit der Anzahl der *Ecken* des jeweiligen resultierenden Vielecks *multipliziert* wird. (Die genaue Berechnung der jeweiligen *Schenkellängen* und auch der *Höhen* für den *Flächeninhalt* soll hier nicht genauer erläutert werden, dies kann jeder Schüler nach Bearbeitung des Kapitels „Trigonometrie“ selbst nachrechnen.)

$$\begin{aligned} U_{\text{rot},4} &= 4 \cdot \sqrt{2} = 5,6568 \\ U_{\text{grün},8} &= 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 6,1229 \\ U_{\text{blau},16} &= 16 \cdot 0.3916 = 6,2656 \\ \vdots &= \vdots \\ U_\infty &= 6,2832 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Beim *Flächeninhalt A* müssen noch über den *Satz des Pythagoras* die jeweiligen *Höhen der Dreiecke* bestimmt werden. Sie sind immer gegeben als die *Wurzel* aus der neuen *Seitenlänge* zum *Quadrat subtrahiert* mit der halben alten *Seitenlänge* zum *Quadrat*.

$$\begin{aligned} A_4 &= A_{\text{rot}} = 2 \\ A_8 &= A_{\text{rot}} + 4A_{\text{grün}} = 2,82843 \\ A_{16} &= A_8 + 8A_{\text{blau}} = 3,07216 \\ \vdots &= \vdots \\ A_\infty &= 3,14159 := \pi \end{aligned} \tag{3.24}$$

Der *Flächeninhalt* A_∞ eines regelmäßigen Unendlichecks - einem *Kreis* -, dessen *Eckpunkte* alle auf dem *Kreisbogen* mit dem *Radius* $r = 1$ liegen beträgt genau π. π ist eine *irrationale Zahl*[3] und wird auch *Kreiszahl* genannt. Mittels dieser *Kreiszahl* π lassen sich die *Größen* eines *Kreises* mit beliebigen *Radius* r darstellen.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ U &= 2\pi r \end{aligned} \tag{3.25}$$

Auch noch andere weitere *Größen* des *Kreises* lassen sich über π darstellen, dazu werden im nächsten Unterabschnitt Teile des *Kreises* berechnet und anschließend das *Bogenmaß* eingeführt.

3.9.1 Bogenmaß

Da der *Kreis* mit dem *Radius* $r = 1$, der sogenannte *Einheitskreis*, einen *Umfang* von $U = 2\pi$ besitzt, kann ein Zusammenhang zwischen *Umfang* und einen *vollen Winkel* 360° gesehen werden. Der *Kreis* steht symbolisch für einen *vollen Winkel* und dadurch kann die Beziehung

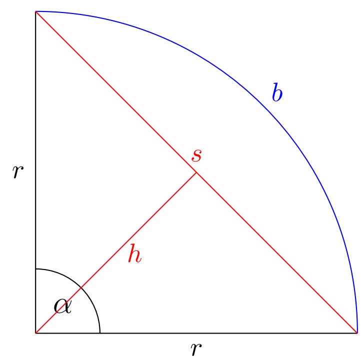
$$\begin{aligned} 2\pi\,\text{rad} &= 360^\circ \\ \Rightarrow 1^\circ &= \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \\ \Leftrightarrow 1\,\text{rad} &= \frac{180^\circ}{\pi} \end{aligned} \tag{3.26}$$

[3] irrationale Zahlen können nicht durch Brüche dargestellt werden: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

aufgestellt werden. Dabei ist rad die *Einheit Radiant*, welche für die Länge des jeweiligen *Kreisbogen* steht. Oftmals empfiehlt es sich in *Radiant* zu rechnen, da dies nicht selten die Gleichungen erheblich vereinfachen würde. Je nach dem, ob *Grad* oder *Radiant* als *Einheit* gewählt wurde, muss diese auch im Taschenrechner verändert werden, da sonst die Ergebnisse nicht der Realität entsprechen.

3.9.2 Kreisteile

Wie schon oben beschrieben, ist der *Umfang* des *Kreises* durch $U = 2\pi r$ und der *Flächeninhalt* durch $A = \pi r^2$ gegeben. Somit ergeben sich auch Teilgrößen wie der *Kreisbogen* b, der *Kreisausschnitt* und der *Kreisabschnitt*.



Die Abbildung zeigt einen *Kreisauschnitt* mit allen Unterteilungen für einen *Kreisabschnitt* sowie den *Kreisbogen*. Dabei ist der *Kreisbogen* b ein *Bruchteil* des *Umfangs*, der durch $2\pi r$ und 360° beschrieben wird. Somit ergibt sich, dass für einen *Winkel* α folgende *Bogenlänge* b ergibt:

$$b = \frac{2\pi r}{360}\alpha \quad . \tag{3.27}$$

Der *Flächeninhalt* des *Kreisausschnittes*, der durch die gesamte umrandete *Fläche* beschrieben wird, der anteilige *Flächeninhalt* eines ganzen *Kreises*:

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 = \frac{br}{2}\alpha \quad . \tag{3.28}$$

Der *Flächeninhalt* dieses *Kreisausschnittes* ohne die des *Dreiecks* mit der *Grundfläche* s und der *Höhe* h, wird *Kreisabschnitt* genannt. Durch die Beschreibung wird klar wie der *Flächeninhalt* eines *Kreisabschnittes* berechnet wird:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2} = \frac{br - sh}{2}\alpha \quad . \tag{3.29}$$

Mit diesen *Teilgrößen* des *Kreises* und dem Wissen über den ganzen *Kreis*, lassen sich nahezu alle Probleme berechnen.

3.9.3 Übungsaufgaben zu Kreisen

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreise.*

a) $r = 3cm$, b) $r = \pi cm$, c) $d = 4cm$,
d) $d = 0,5cm$, e) $r = 2,718cm$, f) $d = \frac{6}{7}cm$.

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisausschnitt.*

a) $\alpha = 60°$ und $r = 5cm$
b) $\alpha = 230°$ und $r = 2cm$
c) $\alpha = 177°$ und $r = \sqrt{17}cm$
d) $\alpha = 55°$ und $r = 3cm$
e) $\alpha = 145°$ und $r = 7cm$
f) $\alpha = 310°$ und $r = 2,5cm$

Aufgabe 3: *Zeichne die angegebenen Kreismuster.*

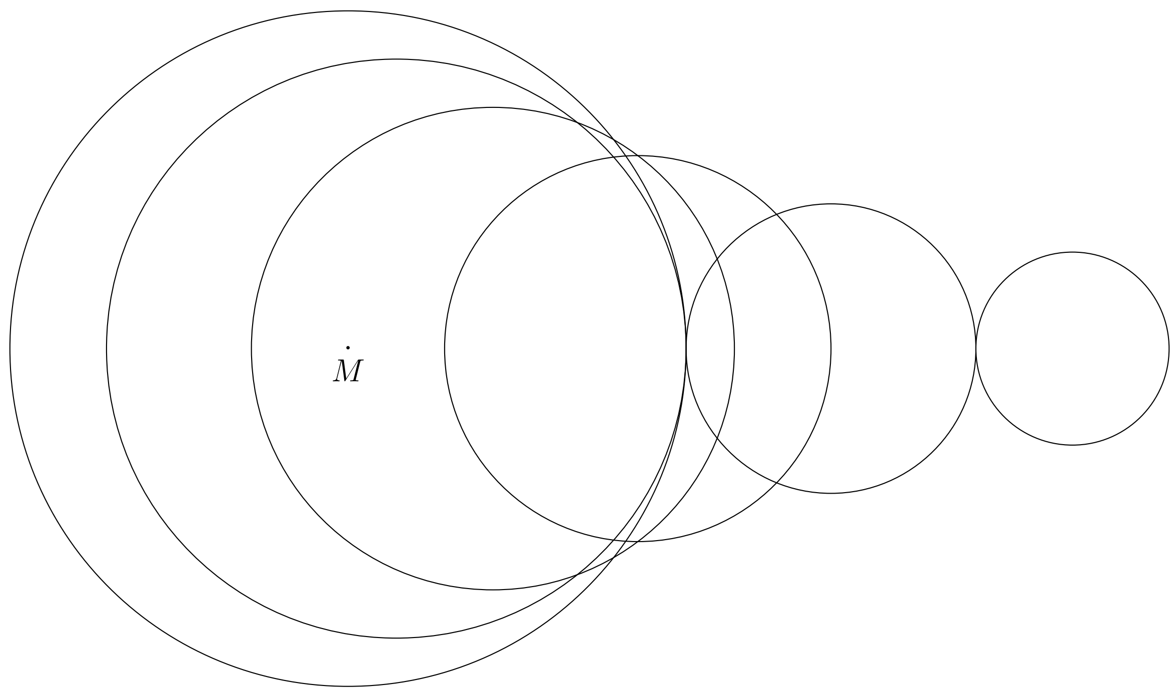
a) Alle Kreise mit geradem Radius sollen im Mittelpunkt M gezeichnet werden und alle mit ungeradem Radius im Mittelpunkt N. Dabei gilt, dass M $1cm$ links von N ist. Zeichne für folgende Radien: $r = \{2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm\}$.

b) Zeichne einen Kreis mit Radius $r = 7cm$ im Mittelpunkt M, zeichne danach einen Kreis der einen Radius von einem Zentimeter weniger hat und sich der Mittelpunkt $1cm$ weiter links befindet. Wiederhole dies bis du einen Kreis mit Radius $r = 2cm$ gezeichnet hast.

c) Wähle einen Punkt P auf deinem Blatt, zeichne dann jeweils einen Kreisbogen mit $116°$, sodass die Strecke vom jeweiligen Kreisbogenmittelpunkt zum Punkt P hin den Kreisbogen halbieren würde, mit Radius $r = 4cm$ mit einem Abstand von $3cm$ nach links, rechts, oben und unten zu P.

d) Wähle einen Punkt P und gehe von ihm aus $\sqrt{50}cm$ diagonal nach links oben, rechts oben, links unten und rechts unten. Zeichne in diesen Punkten einen Viertelkreis, sodass die Linie zum Punkt P den Kreisbogen halbieren würde. Zeichne dann einen Kreis vom Punkt P aus, sodass dieser alle vier Viertelkreise berührt. Welchen Radius hat dieser innere Kreis?

Aufgabe 4: *Beschreibe das Schema der Zeichnung.*

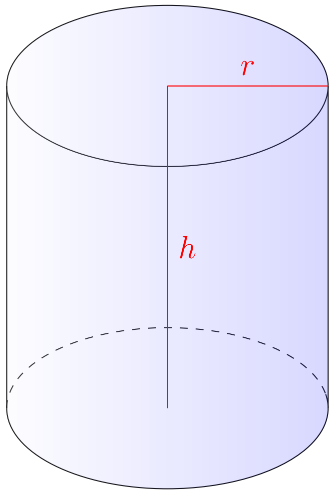


Aufgabe 5: *Zeichne einen Halbkreis und verbinde die Enden des Kreisbogens. Zeichne anschließend vier beliebige Dreiecke in diesen Halbkreis unter der Bedingung, dass die Enden des Halbkreis zwei Eckpunkte der Dreiecke sind und der letzte Eckpunkt des jeweiligen Dreiecks sich auf dem Kreisbogen befindet. Messe anschließend den Winkel der Dreiecke beim jeweiligen Eckpunkt, der auf dem Kreisbogen und nicht an den Enden des Kreisbogens ist. Was auffällt wird „Satz des Thales“ genannt.*

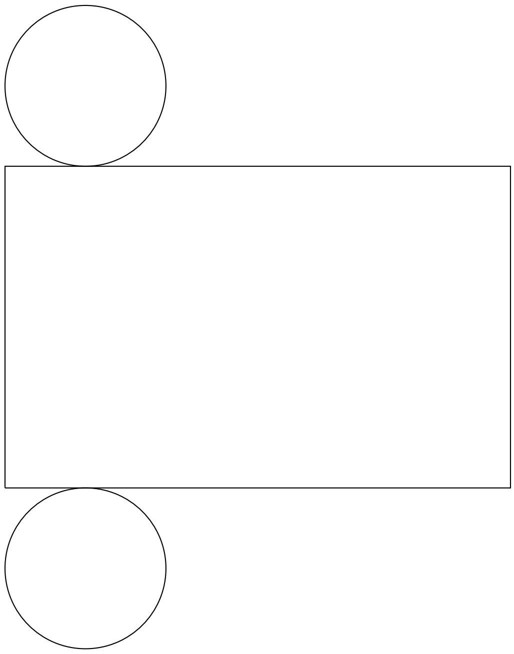
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.17) Lösungen zu Kreisen.

3.10 Zylinder und Kegel

Ein dreidimensionaler Körper, der einen *Kreis* als *Grundfläche* hat, welche gegenüberliegend mit einem *Abstand* einer *Höhe* h wieder vorzufinden ist, wird *Zylinder* genannt.



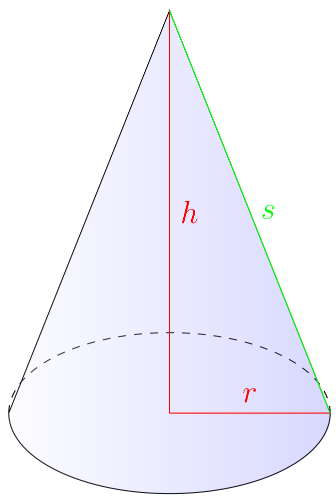
Die Abbildung zeigt, dass sich der *Zylinder* ähnlich wie das das *Prisma* behandeln lässt. Der einzige Unterschied ist dadurch gegeben, dass es sich um runde *Grundflächen* handelt und dass ein *Zylinder* nur zwei *Kanten*, drei *Flächen* und keinen *Eckpunkt* besitzt, wie das *Netz* offenbart:



Das *Volumen* V ist erneut gegeben durch „*Grundfläche* G mal *Höhe* h" und am *Netz* aus der Abbildung ist erkennbar, dass die *Oberfläche* O sich aus zwei gleichen *Kreisen* und einem *Rechteck* mit den *Seitenlängen* $2\pi r$ und h zusammensetzt:

$$\begin{aligned} V &= Gh = \pi r^2 h \\ O &= 2 \cdot \pi r^2 + \pi r h \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

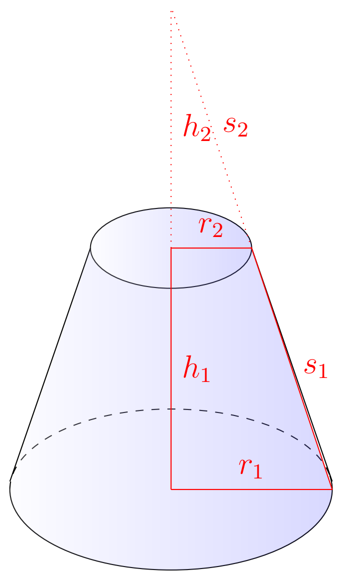
Sobald der Körper in der *Höhe* h wieder zu einem *Punkt* wieder zusammenläuft und dabei als *Grundfläche* einen *Kreis* besitzt, wird dieser Körper als *Kegel* bezeichnet.



Der *Kegel* ist im Vergleich zum *Zylinder* genauso zu handhaben wie die *Pyramide* im Vergleich zum *Quader*. Somit ergibt sich das *Volumen* des *Kegels* V als ein Drittel des *Volumens* eines *Zylinders*. Bei der *Oberfläche* ist dies nicht so trivial, denn ein *Kreis* als *Grundfläche* wird mit einem *Kreisausschnitt addiert*. Dabei hat der *Kreisausschnitt* den *Radius* s und eine *Kreisbogenlänge* $b = 2\pi r$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s) \quad . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Falls ein *Zylinder* mit unterschiedlich großen *Kreisen* vorzufinden ist, wird im allgemeinen von einem *Kegelstumpf* gesprochen. Hierbei wurde lediglich ein Teil eines *Kegels* mit der *Höhe* $h = h_1 + h_2$ abgeschnitten.



Durch umstellen von Gleichungen ergibt sich das *Volumen* und die *Oberfläche* des *Kegelstumpfes* zu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}G_1 h_1 - \frac{1}{3}G_2 h_2 = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) \\ O &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1(r_1 + r_2)\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Generell bleibt noch anzumerken, dass die *Mantelfläche* M immer gegeben ist als die *Oberfläche* ohne *Grundfläche*.

3.10.1 Übungsaufgaben zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Zylinder.*

a) $r = 5cm$ und $h = 11cm$, b) $r = 47cm$ und $h = 85cm$
c) $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm$, d) $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm$
e) $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm$, f) $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm$

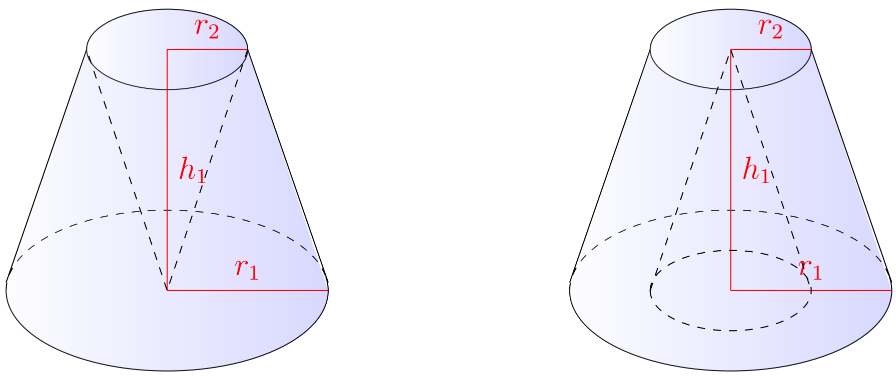
Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegel.*

a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm$, b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm$
c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm$, d) $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm$
e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm$, f) $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm$

Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegelstümpfe.*

a) $r_1 = 4cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm$, b) $r_1 = 3,5cm$, $r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm$,
c) $r_1 = 6cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm$, d) $r_1 = \frac{1}{3}cm$, $r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm$,
e) $r_1 = 1cm$, $r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm$, f) $r_1 = \pi cm$, $r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm$.

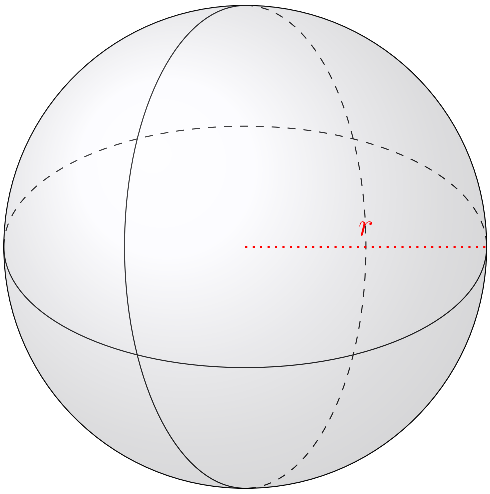
Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O der Körper. (Es handelt sich um einen Kegelstumpf mit $h_1 = h_2 = 4cm$ und $r_1 = 4cm$ aus dem ein Kegel der Höhe h_1 und Radius $r_2 = 2cm$ herausgeschnitten wurde.)*



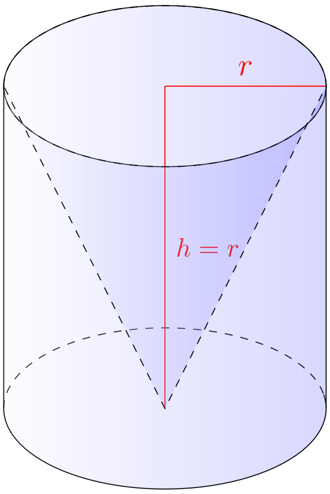
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.18) Lösungen zu Zylindern und Kegeln.

3.11 Kugeln

Ähnlich wie beim zweidimensionalen *Kreis* die *Größen* über ein Näherungsverfahren (ein *iteratives* Verfahren - also schrittweise) bestimmt wurden, kann auch das *Volumen* und die *Oberfläche* einer *Kugel* mit *iterativen* Methoden bestimmt werden. Dabei ist eine *Kugel* ein Objekt, dass von seinem *Mittelpunkt* ausgehend in drei *Raumdimensionen* immer den gleichen *Abstand* zu seiner *Oberfläche* besitzt.



Um das *Volumen* zu berechnen, wird der *Satz von Cavalieri* benutzt, welcher aussagt, dass Körper, die auf jeder *Höhe* den gleichen *Flächeninhalt* besitzen auch das gleiche *Volumen* haben müssen. Somit muss eine *Halbkugel* das gleiche *Volumen* haben wir ein *Zylinder* aus dem ein *Kegel* mit *Radius* r und *Höhe* $h = r$ herausgeschnitten wurde:



Da wie bereits anhand von *Pyramiden* und *Quadern* gezeigt, passen drei der *Kegel* aus der Abbildung in den *Zylinder*. Somit ist das *Volumen* einer *Halbkugel* gegeben als $\frac{2}{3}\pi r^3$ und folglich, dass einer *Kugel* durch:

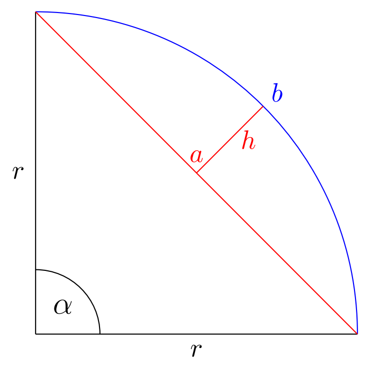
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3.33}$$

Während bei der *Oberfläche* wieder ein *iteratives* Verfahren verwendet werden kann, sodass

$$O = 4\pi r^2 \tag{3.34}$$

gefunden werden kann.

Wie auch schon beim *Kreis* gibt es bei der *Kugel* sogenannte *Kugelabschnitte* und *Kugelausschnitte*. Für den *Kugelausschnitt* gilt erneut, dass es sich um einen *Bruchteil* einer *Kugel* handelt.



Die Abbildung ist auf zwei *Dimensionen* reduziert, zeigt aber die wichtigen *Größen* für die Berechnung. So ergibt sich für den *Kugelausschnitt*:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 \left(2h + a\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Beim *Kugelabschnitt* muss der *Kegel* mit dem *Radius* a vom *Volumen subtrahiert* werden. Ebenso muss dies bei der *Oberfläche* berücksichtigt werden, sodass die *Grundfläche* des *Kegels* hinzu *addiert* werden muss, während die *Mantelfläche*[4] wegfällt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h^2 \left(3r - h\right) \\ O &= \pi \left(2rh + a^2\right) = \pi \left(4rh - h^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Da nun alle wichtigen *geometrischen* Körper und *Größen* eingeführt wurden, können diese nun auch alle vollständig berechnet werden. Um noch den Zusammenhang zwischen den *Winkeln* und den *Seitenlängen* eines Körpers in Verbindung zu bringen, wird im nachfolgenden Kapitel das Verständnis für *geometrische* Probleme weiter vertieft.

[4]Die Mantelfläche ist die Oberfläche ohne Grundfläche.

3.11.1 Übungsaufgaben zu Kugeln

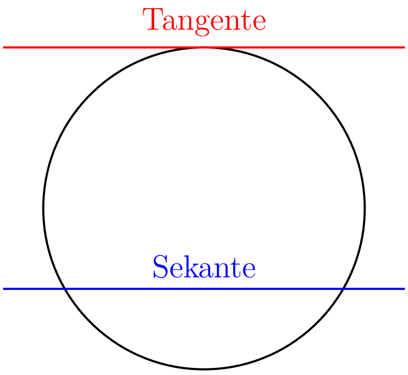
Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugeln.*

a) $r = 3cm$, b) $r = \pi cm$, c) $d = 4cm$,
d) $d = 0,5cm$, e) $r = 2,718cm$, f) $d = \frac{6}{7}cm$.

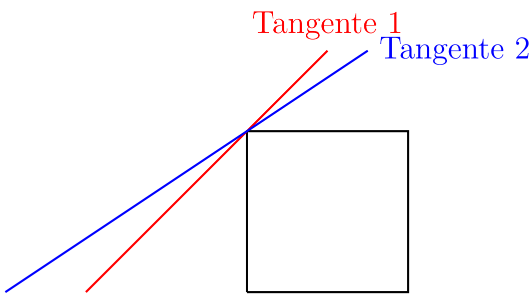
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.19) Lösungen zu Kreisen.

3.12 Tangenten und Sekanten

Am Ende dieses Kapitels werden noch zwei spezielle *Geraden* in Bezug auf andere Körper eingeführt. Die erste spezielle *Gerade* ist die *Sekante*, welche einen Körper schneidet. Dabei hat die *Sekante* oftmals mehr als nur einen *Schnittpunkt*, da ein *geometrisches* Objekt nach allen *Seiten* begrenzt ist. Die zweite spezielle *Geradenart* wird *Tangente* genannt, welche einen Körper nur **berührt** aber **nicht schneidet**. Somit hat eine *Tangente* nur einen *Berührpunkt*.



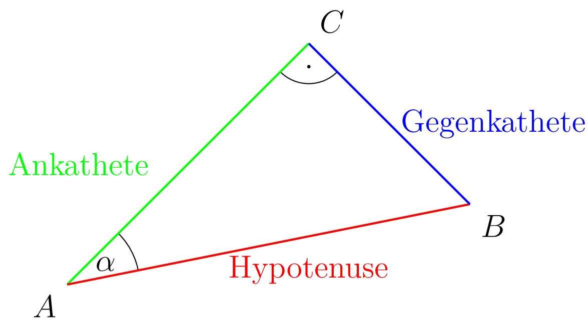
Die Abbildung zeigt anhand eines *Kreises* deutlich die Unterschiede dieser *Geradenarten*. Die *Tangente* ist dabei die wichtigere Art, da über diese in den nachfolgenden Kapiteln weitere mathematische Definitionen und Erkenntnisse gewonnen werden können. Bei Objekten oder Figuren, welche keine *Eckpunkte* verfügen, existiert zu jedem *Punkt* des Objekts oder der Figur nur eine einzige *Tangente*, während an *Eckpunkten* eine unendliche Anzahl an *Tangenten* existiert.



Die Abbildung zeigt, dass an jedem *Eckpunkt* mehrere *Tangenten* existieren. Der Unterschied zwischen *Eckpunkten* und „glatten“ Figuren wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ eine entscheidende Bedeutung zukommen.

4 Trigonometrie

Die *Trigonometrie* beschreibt den Zusammenhang von *Winkeln* mit *Seitenlängen* von *geometrischen* Objekten. Dazu wird sich in erster Linie auf das *rechtwinklige Dreieck* konzentriert, da jede *Fläche* außer kreisartige Objekte durch *rechtwinklige Dreiecke darstellbar* sind. Dabei wird ein *rechtwinkliges Dreieck* betrachtet mit einem *Winkel* α.



Wie die Abbildung zeigt, werden dann die *Seiten* im Bezug auf den *Winkel* α benannt. Dabei ist die *Ankathete* immer die *Kathete* des *rechtwinkligen Dreiecks*, welche sich am zu untersuchenden *Winkel* befindet. Nun wird ein Verhältnis aufgestellt, *definiert* und mit einem Namen versehen:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } \alpha = \sin(\alpha) = \sin\alpha \tag{4.1}$$

Dabei kann auch der *Winkel* β um den Eckpunkt B über dieses Verhältnis bestimmt werden, da wegen der *Winkelsumme* es *Dreiecks* bei einem *rechtwinkligen Dreieck* die *Winkelbeziehung* $90° - \alpha = \beta$ gilt. Somit muss auch die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } 90° + \beta = \sin(90° + \beta) \tag{4.2}$$

Allerdings wäre dann die *Gegenkathete* von α die *Ankathete* von β, sodass eine neue *Definition* getroffen werden kann:

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Kosinus vom Winkel } \alpha = \cos(\alpha) = \cos\alpha \quad , \tag{4.3}$$

wobei $\sin(90° + \delta) = \cos(\delta)$ gilt. Dies bedeutet, dass der *Kosinus* nur eine bequeme abkürzende Schreibweise und nichts weiter als ein *Sinus* ist, der um $90°$ verschoben wurde. Allerdings zeigt sich, dass sich diese Abkürzung lohnt, vor allem wenn der *Sinus* und der *Kosinus* genauer untersucht werden, was im Kapitel „Funktionen“ und auch „Differentation und Integration“ geschieht.

Wenn nun *Sinus* und *Kosinus* in ein Verhältnis gesetzt werden, ergeben sich weitere Abkürzungen, welche sich lohnen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} : \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}\\ &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Ankathete}}\\ &:= \text{Tangens vom Winkel } \alpha = \tan(\alpha) = \tan\alpha \quad ,\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei durch die *Umkehrung* des Verhältnisses der *Kotangens* zu definieren ist:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} := \cot(\alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad . \tag{4.5}$$

Mit diesen *Definitionen* kann mit Hilfe eines *Winkels* und einer *Seitenlänge* alles in einem *rechtwinkligen Dreieck* berechnet werden. Da die *Hypotenuse* immer größer sein muss als die *Ankathete* ist der *Sinus* und somit auch der *Kosinus* bei der Betrachtung des *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen den Zahlen 1 und 0 stets vorzufinden. Das wiederum bedeutet, dass die Werte vom *Tangens* und *Kotangens* bei der *geometrischen* Betrachtung eines *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen 0 und ∞ liegen können.

Um einen *Winkel* mit diesen *trigonometrischen Funktionen* aus zwei *Seitenlängen* bestimmen zu können, muss auch die *Umkehrung* dieser *Funktion* eingeführt werden, welche in diesem Abschnitt gegeben sei als:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)\\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)\\ \alpha &= \cot^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei diese *Funktionen Arcussinus*, *Arcuskosinus*, *Arcustangens* und *Arcuskotangens* genannt werden. Für sie gilt für die *Äquivalenzumformung*:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{a}{c} \qquad |\arcsin\\ \arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \quad .\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mehr Details zu diesen *Umkehrungen* der *trigonometrischen Funktionen* werden im Abschnitt „Umkehrfunktionen“ und „Trigonometrische Funktionen“ zu finden sein. Es genügt zu diesem Zeitpunkt das Wissen, dass *Arcus-Funktionen* die *trigonometrischen Funktionen* aufheben und wo sie auf dem Taschenrechner zu finden sind.

Durch die Anwendung dieser *trigonometrischen* Regeln und dem *Satz des Pythogras* sowie aller bekannten Beziehungen im *rechtwinkligen Dreieck* können noch der *Sinussatz*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} \tag{4.8}$$

und der *Kosinussatz*, welcher ein verallgemeinerter *Satz des Pythagoras* ist, da $\cos 90° = 0$ ist.

$$a^2 = b^2 + c^2 – 2bc\cos\alpha \tag{4.9}$$

hergeleitet werden, welche für jedes beliebige *Dreieck* ihre Gültigkeit besitzen. Hierbei bleibt zu beachten, dass der *Winkel* α der *Seite* a gegenüberliegend ist. In diesem Buch wird nicht weiter auf diese *Sätze* eingegangen, da die Einteilung eines *beliebigen Dreiecks* in zwei rechtwinklige zum Beweis dieser Gleichungen führt. Somit kann der Schüler mit dem Wissen rund um das *rechtwinklige Dreieck* alle Probleme lösen und benötigt hierzu nicht den *Sinus-* und *Kosinussatz*.

4.0.1 Übungsaufgaben zur Trigonometrie

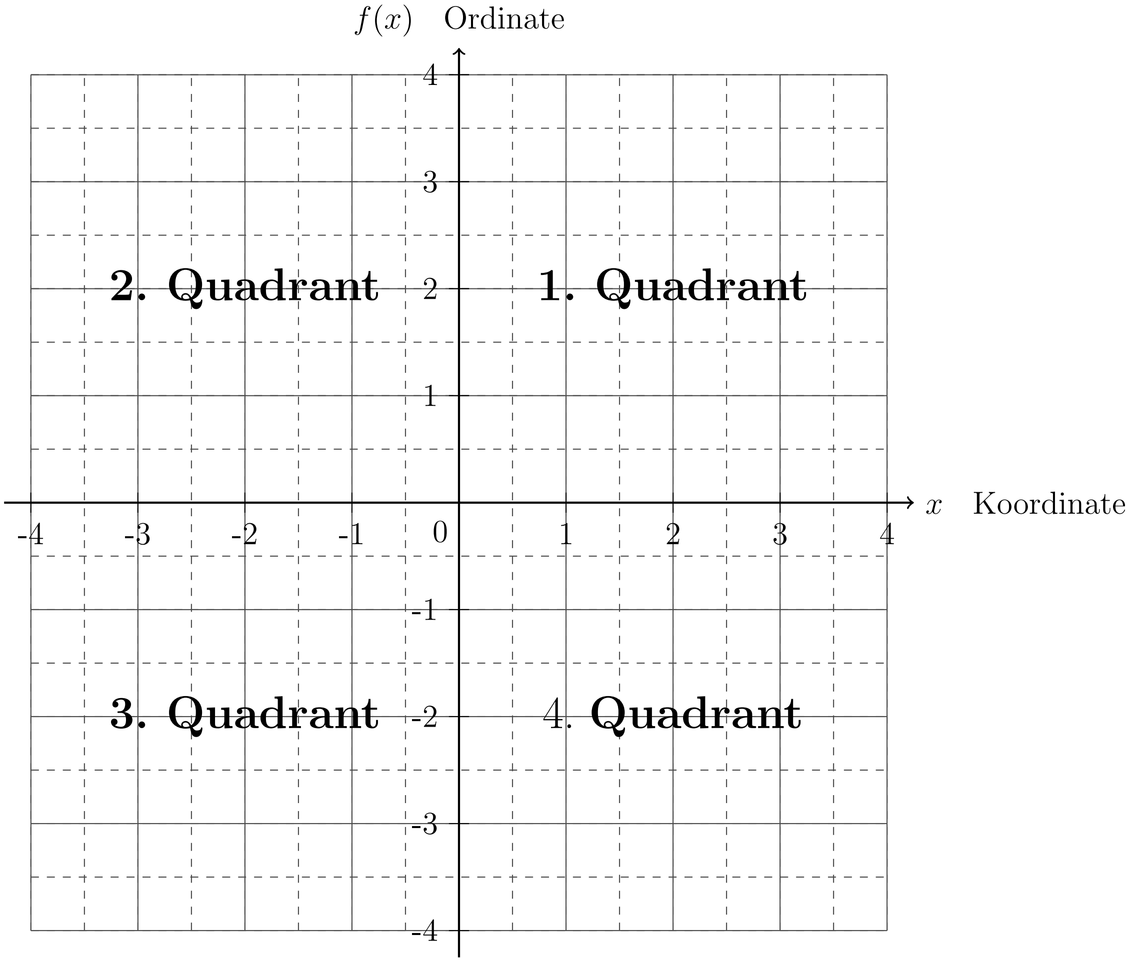
Aufgabe 1: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen rechtwinkligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 7cm$ und $c = 11cm$
b) $a = 4cm$ und $b = 6cm$
c) $\alpha = 55°$ und $c = 9cm$
d) $a = 5,35cm$ und $\beta = 18°$
e) $b = 14cm$ und $\beta = 81°$
f) $a = \pi cm$ und $\alpha = 27,18°$
g) $c = \sqrt{60}cm$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi\text{rad}$
h) $c = \frac{83}{17}cm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\text{rad}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.19) Lösungen zur Trigonometrie.

5 Funktionen

Um *Funktionen* verstehen zu können, müssen zunächst Begrifflichkeiten des sogenannten *Koordinatensystems* besprochen und verinnerlicht werden. Ein *Koordinatensystem* in zwei *Dimensionen* ist ein *Zahlenstrahl* mit den sogenannten *Variablenwerten* x und einem darauf *orthogonalen Zahlenstrahl*, der den Variablenzahlenstrahl bei Null schneidet und auf dem die sogenannten *Funktionswerte* $f(x)$ aufgetragen sind. Dabei wird $f(x)$ gelesen als „f von x“. Der Variablenzahlenstrahl wird *Koordinate* genannt (oftmals auch x-Achse, was zu Verwirrungen führen kann, wenn die Variable einen anderen Namen als x hat), während der darauf *orthogonale Zahlenstrahl Ordinate* genannt wird. Ein *Koordinatensystem* ist somit in vier Bereiche aufgeteilt, welche *Quadranten* genannt werden. Die Reihenfolge der Benennung wird offensichtlicher nach der Besprechung einiger *Funktionen*.



Ein *Koordinatensystem* stellt also eine zweidimensionale *Fläche* dar, welche keine Umrandung besitzt - eine sogenannte *Ebene*.

Eine *Funktion* ist dabei eine Vorschrift, die fordert, dass für eine *Variable* ein Wert in eine Gleichung eingesetzt wird. Der resultierende Wert wird dann *Funktionswert* genannt. Somit entsteht immer ein *Wertepaar*, welches dann im *Koordinatensystem* eingesetzt wird. Mathematisch würde dies so formuliert werden: Eine *Funktion* f bildet Zahlen x einer *Zahlenmenge* auf eine andere *Zahlenmenge* ab. Dabei darf für jeden Wert von x nur ein abgebildeter Wert existieren. Diese Forderung wird *Eindeutigkeit* genannt.

$$f : x \mapsto f(x) \tag{5.1}$$

Ein Beispiel für eine solche *Funktion* wäre:

$$f(x) = 2x \tag{5.2}$$

Dabei wird das Doppelte der in die *Variable* x eingesetzten Zahl auf den *Funktionswert* $f(x)$ *abgebildet*.

Eine *Funktion* kann auch *punkt-* oder *achsensymmetrisch* sein. Dazu werden über das *Einsetzverfahren* folgende Gleichungen überprüft:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \qquad \text{Achsensymmetrie} \\ f(x) &= -f(-x) \qquad \text{Punktsymmetrie} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bei der *Achsensymmetrie* ist die *Funktion* nach einer *Spiegelung* an der *Ordinate*, während bei der *Punktsymmetrie* die *Funktion* nach einer $^{8}0°$ *Drehung* um den *Koordinatenursprung* identisch ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der kann sich auch verschieben, allerdings kann dann das *Koordinatensystem* so verschoben werden, dass diese *Symmetrien* doch wieder mit der Gleichung (5.3) überprüft werden können.

Wie bereits schon aus den vorherigen Kapiteln bekannt ist, sind nicht alle Rechenoperationen zulässig, wie zum Beispiel die *Division* durch Null oder noch nicht zulässig, wie die *Wurzel* einer negativen Zahl. Deswegen besitzt jede *Funktion* einen sogenannten *Definitionsbereich*, welche Zahlen in eine *Funktion* eingesetzt werden können und durch die *Definitionsmenge* $\mathbb{D}$ beschrieben wird. Bei einer *Abbildung* des *Variablenwertes* auf einen *Funktionswert*, sind auch nicht alle Bereiche auf der *Ordinate* betroffen. Alle möglichen Zahlen des *Funktionswertes*, werden in der *Wertemenge* $\mathbb{W}$ beschrieben. Für das Beispiel auf Gleichung (5.2) wäre die *Definitions-* und *Wertemenge* gegeben als:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dabei kann jede *Definitionsmenge* berechnet werden, indem die Region die einen bestimmten Wert nicht erreichen darf mit diesem gleichgesetzt wird. So sei zum Beispiel $f(x) = \frac{1}{2x-2}$ gegeben. Folglich darf für dieses Beispiel der *Nenner* nicht Null werden und somit wird der *Nenner* alleine behandelt und gleich Null gesetzt $0 = 2x - 2$. Anschließend wird diese aufgestellte Gleichung nach x aufgelöst. Das resultierende Ergebnis ist die Zahl, für die die *Funktion* $f(x)$ nicht *definiert* ist.
Anzumerken bleibt, dass nicht jede *Funktion* mit dem Buchstaben f und nicht jede *Variable*

mit x betitelt sein muss, so gilt zum Beispiel in der Physik die Strecke x als *Funktion* der Zeit t, also $x(t)$. Im Allgemeinen können alle Reaktionen auf etwas in *Variablen*- und *Funktionswert* übersetzt werden, sodass bei genügend Informationen daraus die *Funktion* ersichtlich wird. Mit dieser *Funktion* ist es möglich die Zukunft auszurechnen, wie zum Beispiel bei der physikalischen *Funktion* $x(t) = vt$, wobei v eine konstante Geschwindigkeit ist. Somit kann vorherbestimmt werden, welche Strecke x nach einer beliebigen Zeit t für die Geschwindigkeit v zurückgelegt wurde. Dies ist auch bei wesentlich komplexeren Zusammenhängen möglich, sodass gilt, dass alles berechnet werden kann. Jedoch müssen immer Vereinfachungen angenommen werden, da die Gleichungen sonst zu unübersichtlich und nicht mal von Hochleistungscomputern in annehmbarer Zeit berechnet werden können. Wie solche Methoden im Detail funktionieren, wird im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Physikalische Anwendungen“ skizziert.

Nachdem die Grundbegrifflichkeiten einer *Funktion* erläutert wurden, soll das Arbeiten mit *Funktionen* erschlossen werden.

5.1 Wertetabellen und Punkte

Um *Funktionen* zeichnen und dann später ihre Form ausnutzen zu können, bedarf es sogenannter *Wertetabellen*. Dabei werden verschiedene Werte für die *Variable* x eingesetzt und dann verrechnet. Der resultierende *Funktionswert* $f(x)$ wird dann so notiert, dass der Zusammenhang zwischen der eingesetzten Zahl für die *Variable* und dem *Funktionswert* erkennbar wird.

An zwei Beispielen soll das Prinzip der *Wertetabelle* erläutert werden - hierbei kann die Spalte mit „Rechnung“ und „Punkte“ beim Erstellen einer *Wertetabelle* weggelassen werden, welche hier lediglich für die Erklärung dient:

- Die erste Funktion die untersucht wird, sei die folgende:

$$f(x) = 2x + 1 \tag{5.5}$$

Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

Punkte	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
x	-2	-1	0	1	2	3
Rechnung	$2\cdot(-2)+1$	$2\cdot(-1)+1$	$2\cdot 0+1$	$2\cdot 1+1$	$2\cdot 2+1$	$2\cdot 3+1$
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

- Die zweite *Funktion* die untersucht wird, sei die folgende:

$$g(x) = x^2 - 1 \tag{5.6}$$

Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

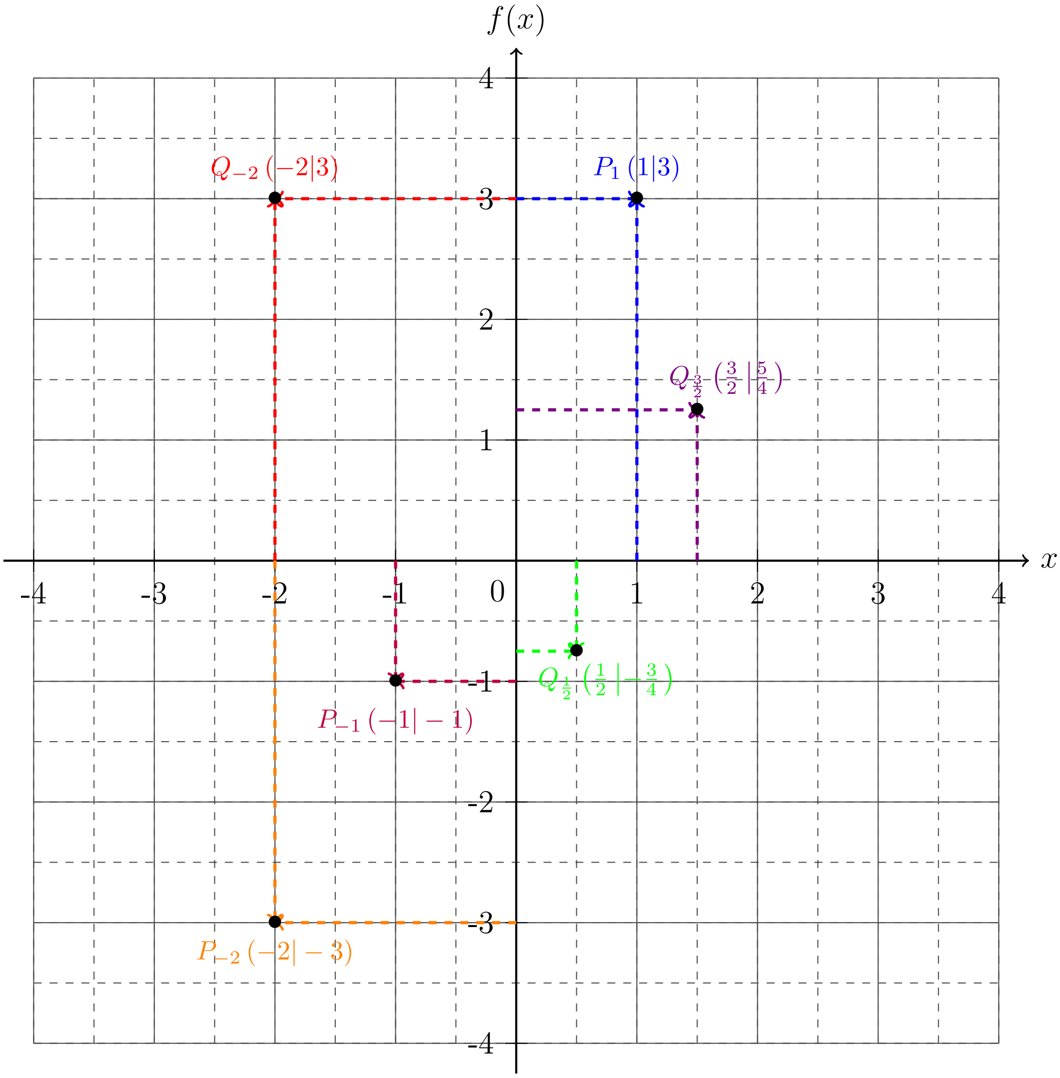
Punkte	Q_{-2}	Q_{-1}	Q_0	$Q_{\frac{1}{2}}$	Q_1	$Q_{\frac{3}{2}}$	Q_2
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Rechnung	$(-2)^2-1$	$(-1)^2-1$	0^2-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$	1^2-1	$\left(\frac{3}{2}\right)^2-1$	2^2-1
$g(x)$	3	0	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Die *Wertetabellen* zeigen, dass immer für die *Variable* x die entsprechende Zahl eingesetzt wurde. Dabei sind diese Zahlen frei zu wählen.

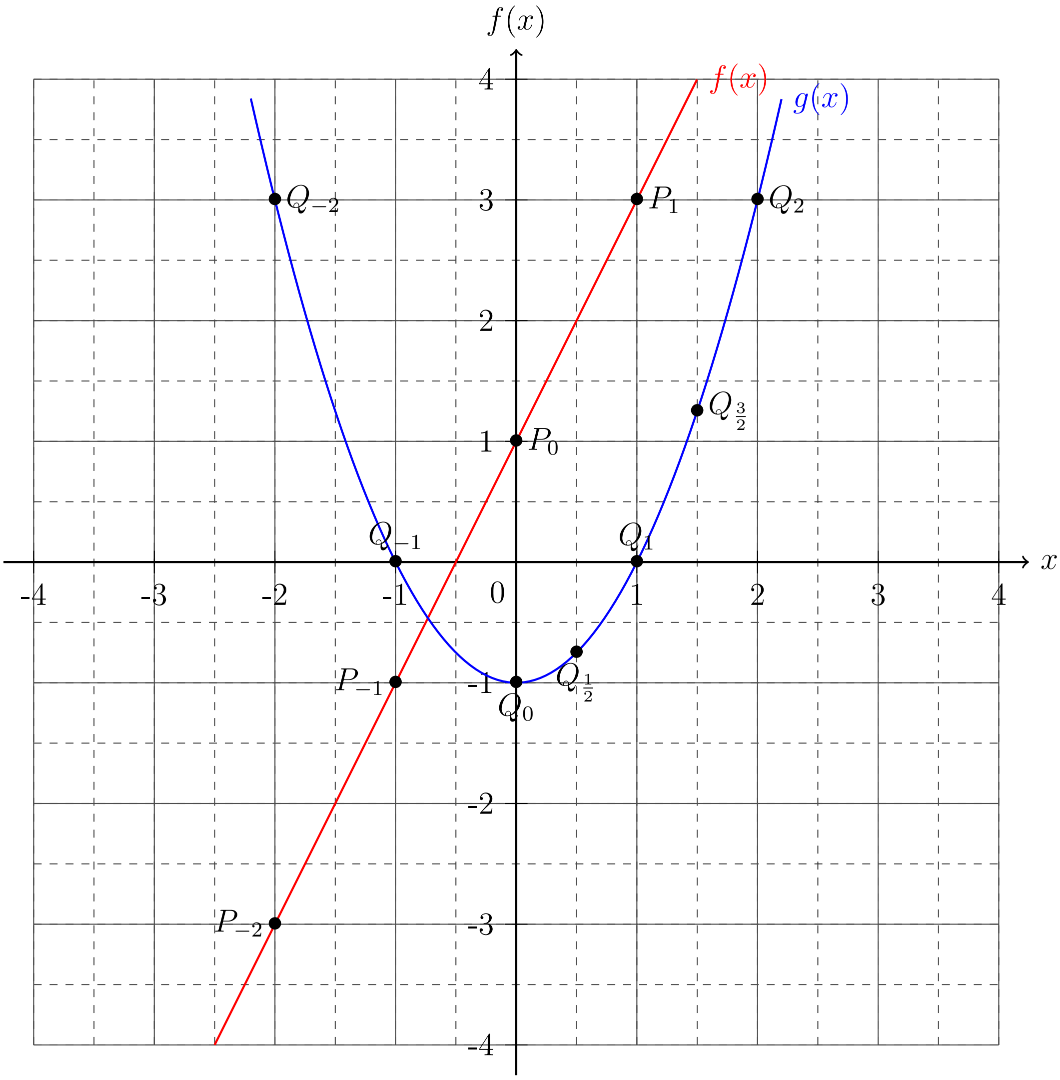
Die jeweiligen *Variablen-* und *Funktionswerte* bilden Paare, welche auch *Wertepaare* genannt werden. Diese symbolisieren einen *Punkt* im *Koordinatensystem*. Dabei wird bei einem *Punkt* P immer zu erst der *Variablenwert* x und anschließend der *Funktionswert* $f(x)$ genannt

$$P\left(x|f(x)\right) \quad . \tag{5.7}$$

Diese *Punkte* geben an, wie viele Schritte (den *Variablenwert*) auf der *Koordinate* zurückgelegt werden müssen, um dann anschließend die Anzahl der Schritte des *Funktionswertes* auf der *Ordinate* zu gehen. Im folgenden *Koordinatensystem* sind einige *Punkte* aus den beiden *Wertetabellenbeispielen* nach diesem Schema eingezeichnet.



Die *Punkte* der jeweiligen *Wertetabellen* können verbunden werden, sodass sich das Muster der *Punkte* zeigt. Dieses Muster wird *Graph* der *Funktion* genannt und bietet Aufschluss zu den Eigenschaften der *Funktion*.



Das Ziel einer *Wertetabelle* ist es den *Graphen* einer *Funktion* zeichnen zu können, um daraus und der Struktur der *Funktion* den *Werte-* und *Definitionsbereich* sowie weitere Eigenschaften bestimmen zu können. Im Kapitel „Differentiation und Integration“ wird auf dieses zeichnerische Element vollständig verzichtet, sodass alle Informationen einer *Funktion* errechnet werden können. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden spezielle Arten von *Funktionen* analysiert.

5.1.1 Übungsaufgaben zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1: *Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.*

$A\,(1\,\vert 6\,)$	$B\,(-2\,\vert 4\,)$	$C\,(6\,\vert 0\,)$	$D\,(-7,5\,\vert -1\,)$
$E\,\left(\frac{1}{2}\,\vert 3\right)$	$F\,\left(-\frac{7}{4}\,\vert -6,25\right)$	$G\,(8\,\vert -8\,)$	$H\,\left(\sqrt{6,25}\,\middle\vert -\frac{3}{4}\right)$
$I\,(7,25\,\vert -6,75\,)$	$J\,\left(-4\,\middle\vert -\frac{33}{4}\right)$	$K\,\left(-5\,\middle\vert \sqrt{2}\right)$	$L\,(2\,\vert -2^3\,)$
$M\,(289^0\,\vert \ln e^{1,5}\,)$	$N\,\left(-3!\,\middle\vert \frac{5!}{4!}\right)$	$O\,\left(-\sqrt[4]{81}\,\middle\vert \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$	$P\,(\pi\,\vert e\,)$

Aufgabe 2: *Berechne die angegebenen Wertetabellen für die jeweiligen Funktionen.*

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$							

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$							

a) $f(x) = -2x + 3$
b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$
c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$
d) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

Aufgabe 3: *Zeichne die Funktionen und bestimme die Definitions- und Wertebereiche.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$
b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$
c) $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$
d) $l(x) = -x^2 + 3x - 2$
e) $k(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$
f) $m(x) = -4x^{-1}$

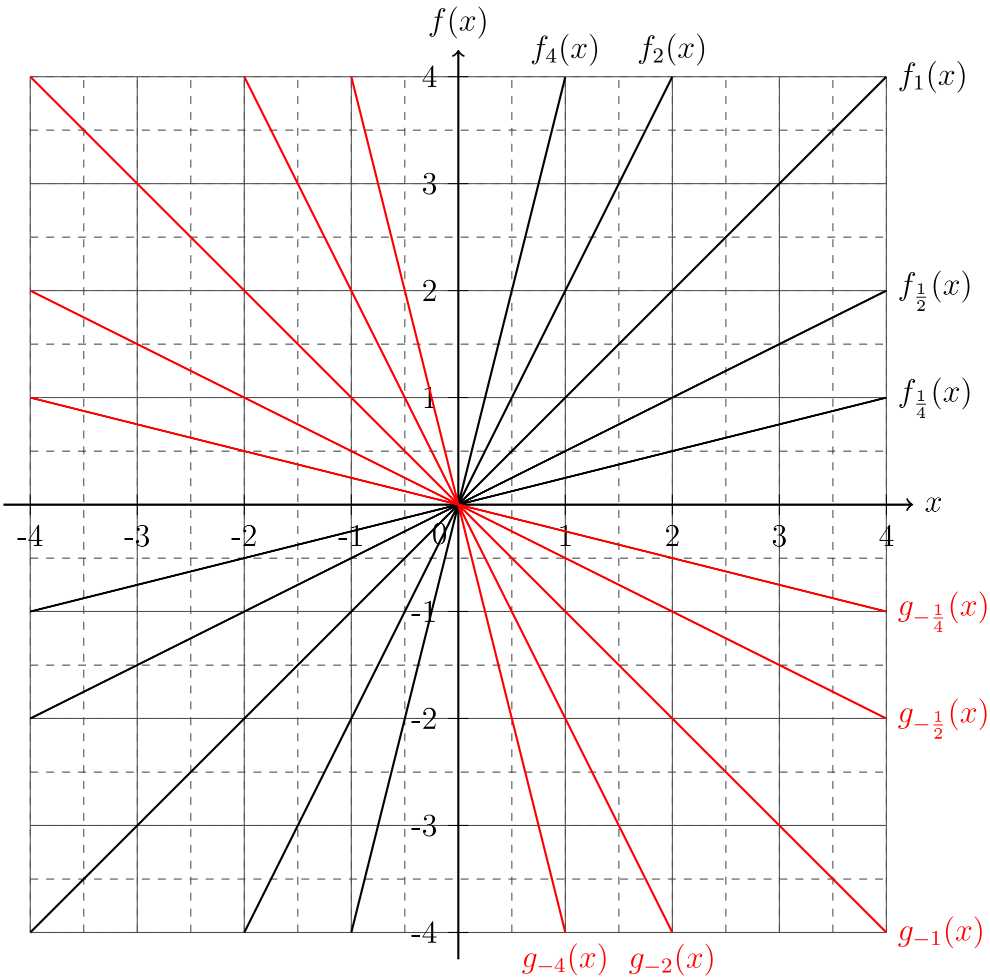
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.20) Lösungen zu Wertetabellen und Punkte.

5.2 Geraden

Geraden sind die simpelsten *Funktionen*. Sie sind *definiert* durch die allgemeine *Geradenfunktionsgleichung*:

$$f(x) = mx + b \quad , \tag{5.8}$$

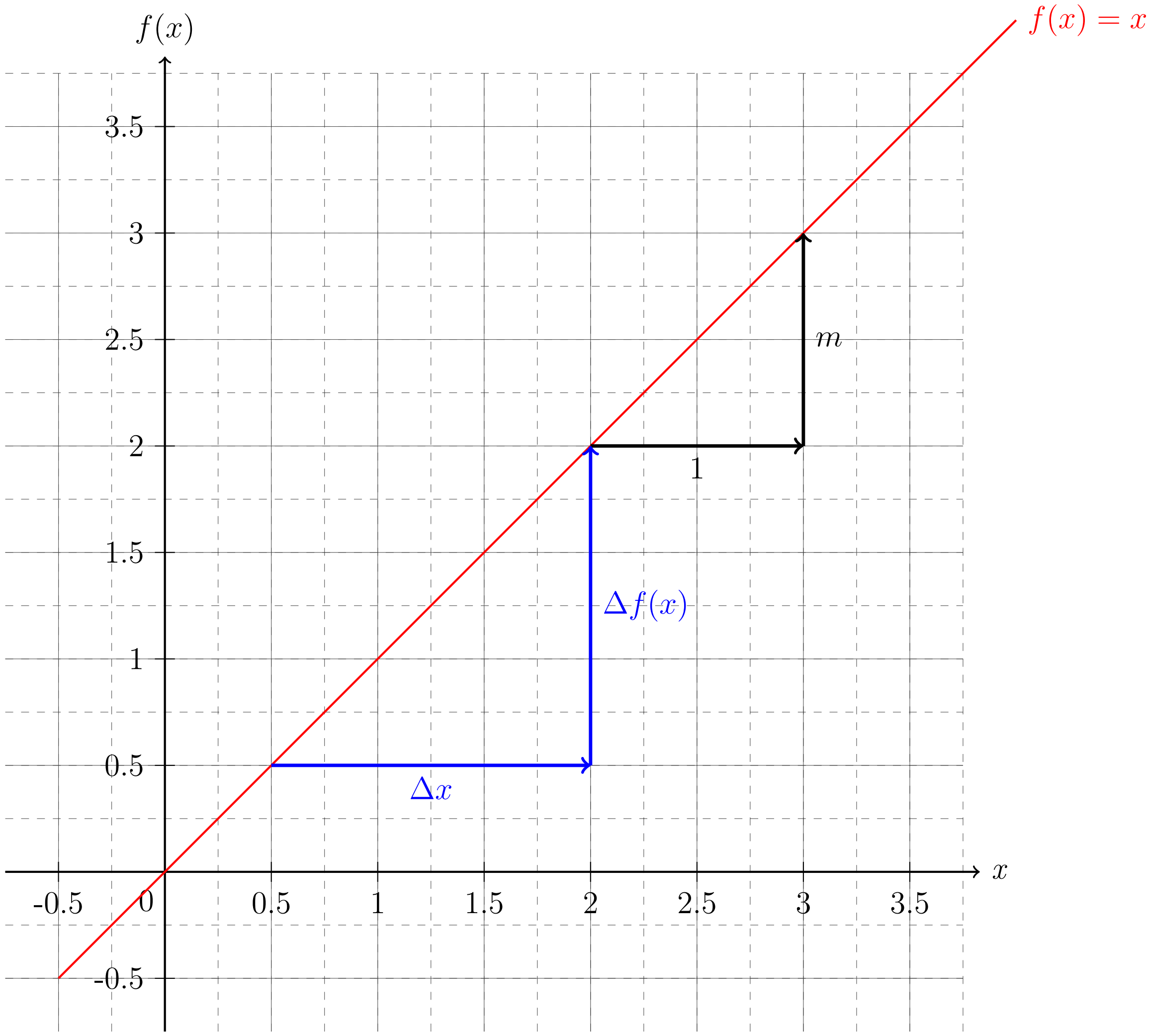
wobei x die *Variable* der *Funktion* $f(x)$ ist und m und b *Parameter* sind. Eine *Gerade* ist eine *lineare Funktion*, oder auch eine *Funktion erster Ordnung*, da der *Term* mit der höchsten *Potenz* als mx^1 gegeben ist. Da eine *Funktion* immer einen *Parameter* mehr besitzt als die Zahl ihrer *Ordnung*, werden für eine *Funktion erster Ordnung* zwei Informationen benötigt, um alle Eigenschaften der *Funktion* bestimmen und den *Graphen* zeichnen zu können. Diese Informationen können *Punkte* sein oder Angaben der *Parameter* m und b. Zu nächst wird sich auf die Bedeutung der *Parameter* beschränkt. Dazu werden für m verschiedene *Geraden* gezeichnet unter der Bedingung, dass $b = 0$ ist, wobei für positive Werte von m die *Funktion* f und für negative Werte g genannt wird.



Die Abbildung zeigt deutlich, dass die *Geraden* mit positiven Werten von m von links unten nach rechts oben gehen und je höher der Wert ist, desto stärker ist die *Steigung* der *Geraden*. Für negative Werte von m sinken die *Geraden* von links oben nach rechts unten. Auch hier nimmt die *Steigung* zu je größer der *Betrag* von m wird. Somit kann festgehalten werden, dass

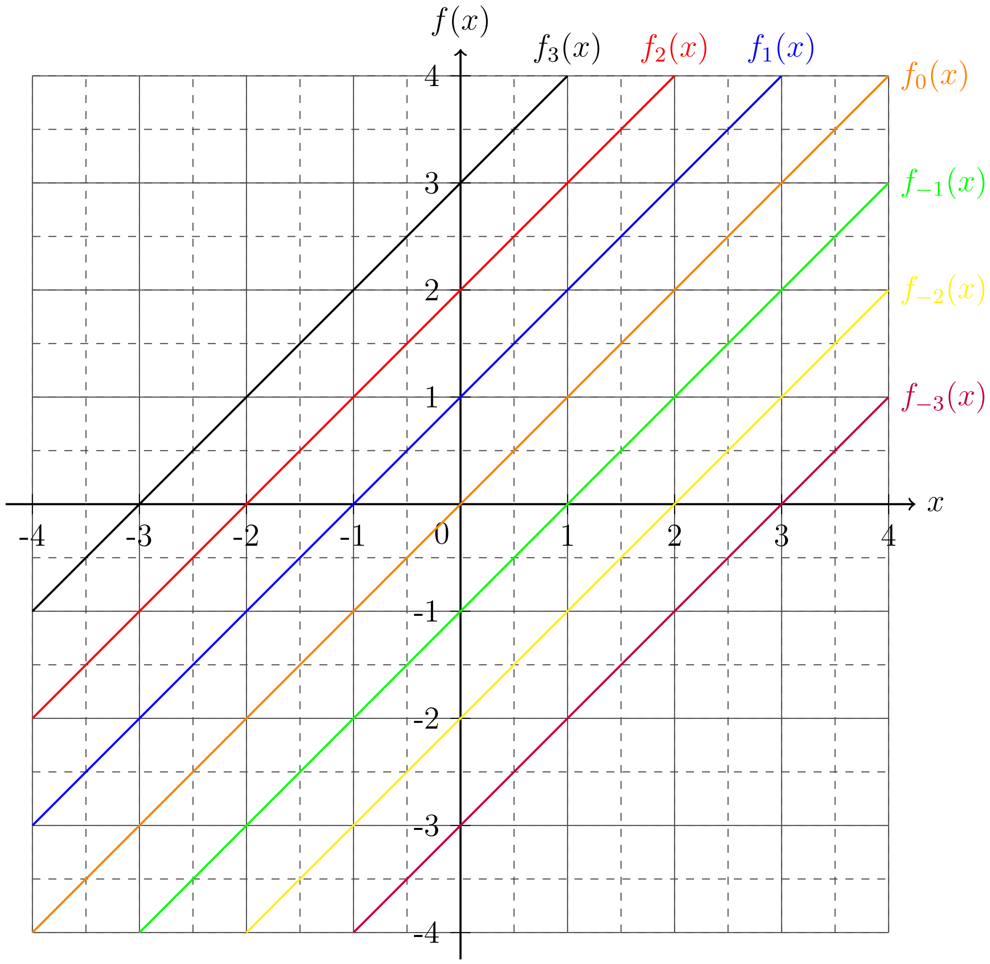
m die *Steigung* der *Geraden* symbolisiert.

Die Steigung einer *Geraden* kann auch gemessen werden. Dabei wird auf der *Koordinate* einen Einheitenschritt nach rechts gegangen und dann *orthogonal* dazu wieder zur *Funktion parallel* zur *Ordinate*. Die Strecke die *parallel* zur *Ordinate* ist, ist der Wert des *Steigungsparameters* m.



Dies nennt man das *Steigungsdreieck*, dabei können auch mehrere Schritte entlang der *Koordinate* zurückgelegt werden, sodass im Allgemeinen $m = \frac{\text{Ordinatenschritte}}{\text{Koordinatenschritte}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, wobei Δx die *Differenz* zwischen zwei Werten von x also $\Delta x = x_2 - x_1$ für $x_2 > x_1$ und $\Delta f(x)$ die *Differenz* zwischen zwei Werten von $f(x)$ folglich $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ beschreibt.

Im nächsten Fall soll die *Steigung* m auf 1 festgelegt werden und der *Parameter* b variiert werden. Dabei wandern die Werte von b von -3 bis 3.



Im *Koordinatensystem* ist deutlich zu erkennen, dass der Wert von b mit dem Wert der *Ordinate* übereinstimmt, wenn sich *Ordinate* und die *Gerade* treffen, somit wird b auch der *Ordinatenschnittwert* oder *Offset* der *Funktion* genannt.

Da die *Parameter* diskutiert wurden, wird nun das Verfahren beschrieben wie aus zwei *Punkten* diese *Parameter* berechnet werden können. Dazu seien die beiden *Punkte* zum Beispiel: $P(-1|-4)$ und $Q(2|3)$. Diese *Punkte* werden in die allgemeine *Geradengleichung* eingesetzt

$$\begin{aligned} P: &\qquad -4 = m \cdot (-1) + b \\ Q: &\qquad 3 = m \cdot 2 + b \end{aligned} \tag{5.9}$$

und dann eine der beiden Gleichungen nach einem unbekannten *Parameter* aufgelöst.

$$P: \qquad m - 4 = b \tag{5.10}$$

Diese Gleichung für den *Parameter* b wird nun in die zweite Gleichung eingesetzt und anschließend nach m aufgelöst:

$$\begin{aligned} P \text{ in } Q: &\qquad 3 = 2m + (m-4) \\ &\qquad 3 = 3m - 4 \qquad |+4 \\ &\qquad 7 = 3m \qquad |:3 \\ &\qquad \frac{7}{3} = m \qquad . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Der berechnete Wert für m wird dann wieder in die Gleichung (5.10) eingesetzt um b zu bestimmen:

$$\begin{aligned} P \text{ mit } m: \qquad \frac{7}{3} - 4 &= b \\ -\frac{5}{3} &= b \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Somit ergibt sich *Geradengleichung* mit den Werten von m und b zu:

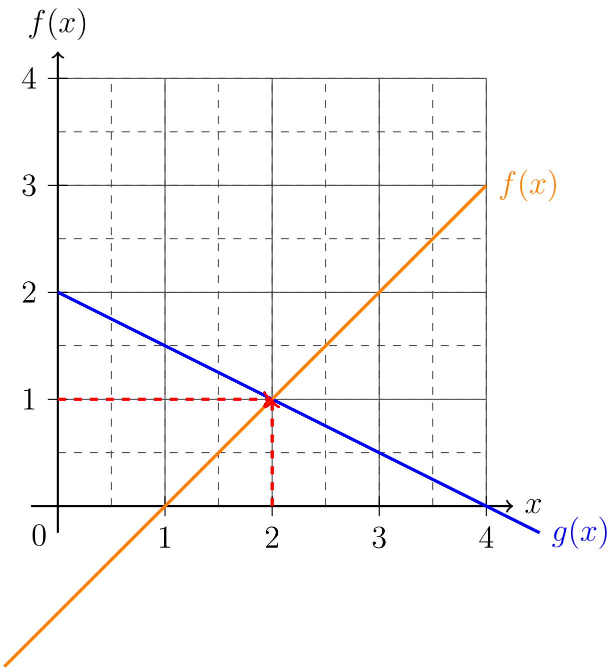
$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Mittels dieses Verfahrens ist nun die *Geradenfunktionsgleichung* berechnet. Auch für komplexere *Funktionen* kann genau dieses Verfahren angewendet werden, allerdings erhöht sich die Anzahl der *Parameter* und der Gleichungen, sodass es eher zu einer Übersichtsaufgabe wird. Wenn die *Steigung* einer *Geraden* gleich Null (m=0) ist, dann wird von einer *Konstanten* gesprochen.

Aber auch noch ein anderer Wert ist interessant, nämlich der *Variablenwert* für den *Schnittpunkt* mit der *Koordinate*. Dieser Wert wird *Nullstelle* genannt und kann berechnet werden, indem man den *Funktionswert* $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ setzt, da der *Ordinatenwert* beim schneiden der *Koordinate* Null ist. Somit folgt eine kurze *Äquivalenzumformung* nach x und die *Nullstelle* x_N ist berechnet:

$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} 0 &= mx + b \\ \Rightarrow -\frac{b}{m} &= x_N \quad . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Aber nicht nur die *Nullstellen* sind im Umgang mit *Funktionen* interessant, sondern auch die *Punkte* in denen sich die *Funktionen* schneiden.



Wie die Abbildung zeigt, besitzen die *Graphen* von $f(x)$ und $g(x)$ in dem *Punkt* $P(1|2)$ den gleichen *Variablen-* und *Funktionswerte*. Um diesen *Punkt* im Allgemeinen zu berechnen, können beide *Funktionen* gleichgesetzt werden und anschließend nach x aufgelöst werden. Für *Geraden* würde dies eine kleine *Äquivalenzumformung* bedeuten, während für höhere *Funktionen* sich die Techniken der *Äquivalenzumformung* wie zum Beispiel durch *quadratische Ergänzung* erweitern würden.

$$\begin{aligned} g(x) &\overset{!}{=} f(x) \\ -\frac{1}{2}x + 2 &= x - 1 \quad \left| +\frac{1}{2}x + 1 \right. \\ 3 &= \frac{3}{2}x \quad \left| \cdot\frac{2}{3} \right. \\ \Rightarrow 2 &= x_x \quad \left| \cdot\frac{2}{3} \right. \end{aligned} \tag{5.15}$$

In Gleichung (5.15) wird die Berechnung der *Schnittstelle* x_x gezeigt. Anschließend muss noch x_x in $f(x)$ oder $g(x)$ eingesetzt und das Ergebnis berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(x_x) &= x_x - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

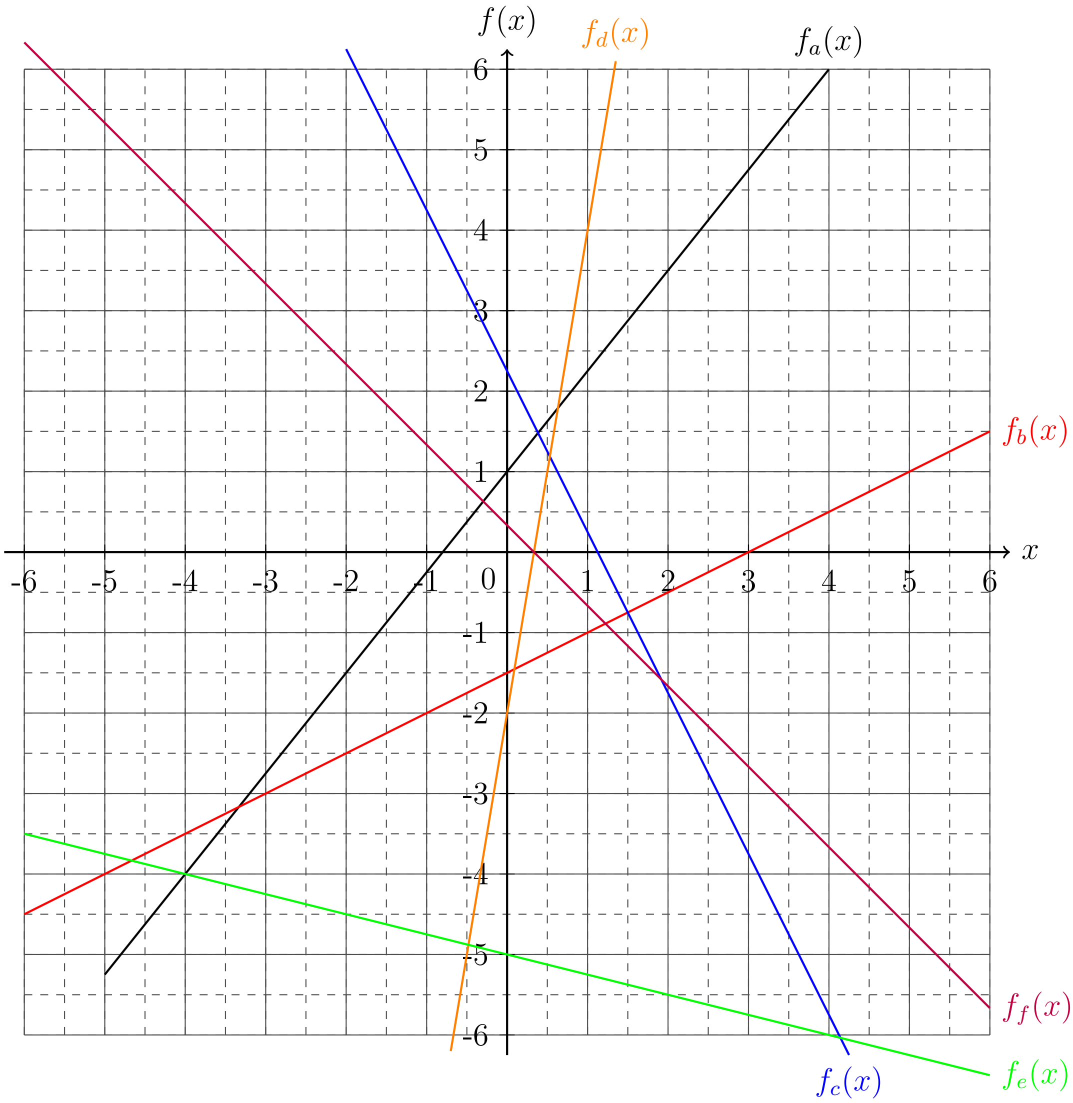
Somit ist, wie im *Koordinatensystem* zu sehen war, der *Schnittpunkt* der *Funktionen* $P_x = (x_x\,|f(x_x)) = (2|1)$.

5.2.1 Übungsaufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: *Bestimme aus den gegebenen Punkte die Geradenfunktionsgleichung, bestimme anschließend die Nullstelle und zeichne den Graphen.*

a) $P_a\,(-2\,|-2\,)$ und $Q_a\,(0\,|4\,)$
b) $P_b\,\left(\frac{1}{2}\,|1\right)$ und $Q_b\,(-1\,|-4\,)$
c) $P_c\,(-4\,|2\,)$ und $Q_c\,(4\,|5\,)$
d) $P_d\,(-3\,|-5\,)$ und $Q_d\,(5\,|2\,)$
e) $P_e\,\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$ und $Q_e\,\left(-\frac{1}{6}\,|-3\right)$
f) $P_f\,\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\sqrt{3}\right)$ und $Q_f\,(e\,|\pi\,)$

Aufgabe 2: *Bestimme den Steigungsparameter m und den Ordinatenschnittwert b aus den dargestellten Graphen. Gibt die Geradenfunktionsgleichung an.*



Aufgabe 3: *Bestimme den Schnittpunkt $P_x\,(x_x\,|f(x_x)\,)$ der beiden Geraden.*

a) $f(x) = 3x - 2$ und $g(x) = x + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{6}x + 2$ und $g(x) = -3x + \frac{4}{5}$
c) $f(x) = -3x$ und $g(x) = 2x - 6$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$ und $g(x) = \frac{7}{3}x - 3$
e) $f(x) = 9x - e^2$ und $g(x) = \pi x + \frac{1}{4}$
f) $f(x) = -\sqrt{2}x$ und $g(x) = x \ln 2 - 6$

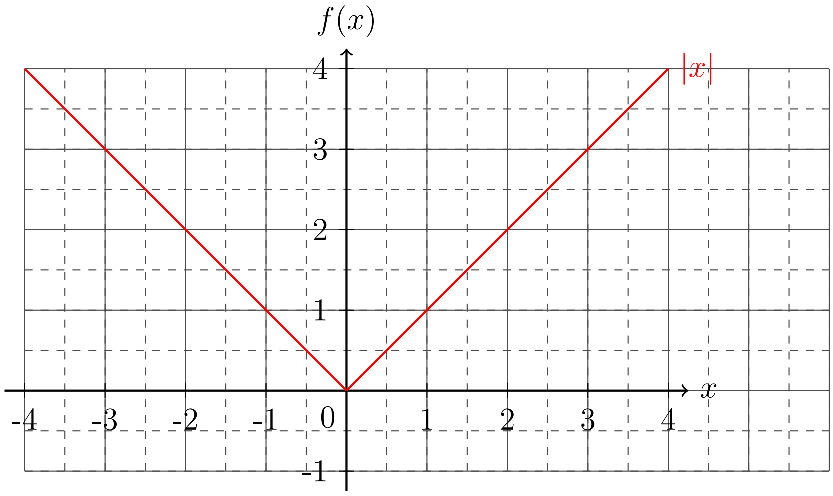
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.21) Lösungen zu Geraden.

5.3 Betragsfunktion

Die *Betragsfunktion* ist im Wesentlichen eine *Gerade* mit der *Steigung* $m = 1$, die an der *Ordinate* gespiegelt ist. Durch diesen Sprung im *Koordinatenursprung* wird die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche unterteilt und da diese *Funktionstyp* öfter vorkommt wird diese spezielle Form abgekürzt:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Wie an Gleichung (5.17) zu erkennen ist, ist die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche geteilt. Dabei ist für negative Werte der *Variable* ein *Subtraktionsoperator* vorgestellt. Dies bedeutet, dass die negativen *Variablenwerte* zu positiven *Funktionswerten* umgewandelt werden. Für positive *Variablenwerte* hat die *Variable* ein Vorzeichen, sodass auch in diesem Bereich positive *Funktionswerte* resultieren. Der *Graph* dieser *Funktion* ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



An der Abbildung ist zu erkennen, dass die *Betragsfunktion* einen Knick im *Koordinatenursprung* besitzt und dass die *Funktion achsensymmetrisch* bezüglich der *Ordinate* ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der Knick der *Funktion* kann verschoben werden, indem in den *Betragsstrichen* eine Zahl *addiert* wird.

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 2 \\ -x & ,\forall x < 2 \end{cases} \tag{5.18}$$

Um den *Funktionswert* der *Betragsfunktion* eines beliebigen *Variablenwertes* zu bestimmen, kann in nahezu allen Fällen, die in der Schule diskutiert werden, die Zahl *quadriert* und anschließend die *Wurzel* daraus gezogen werden.

$$|a| = \sqrt{a^2} \tag{5.19}$$

Dieses Verfahren wird oftmals dazu verwendet um Längen zu bestimmen und findet seine Anwendung zum Beispiel im Kapitel „Vektoren“.

5.4 Parabeln

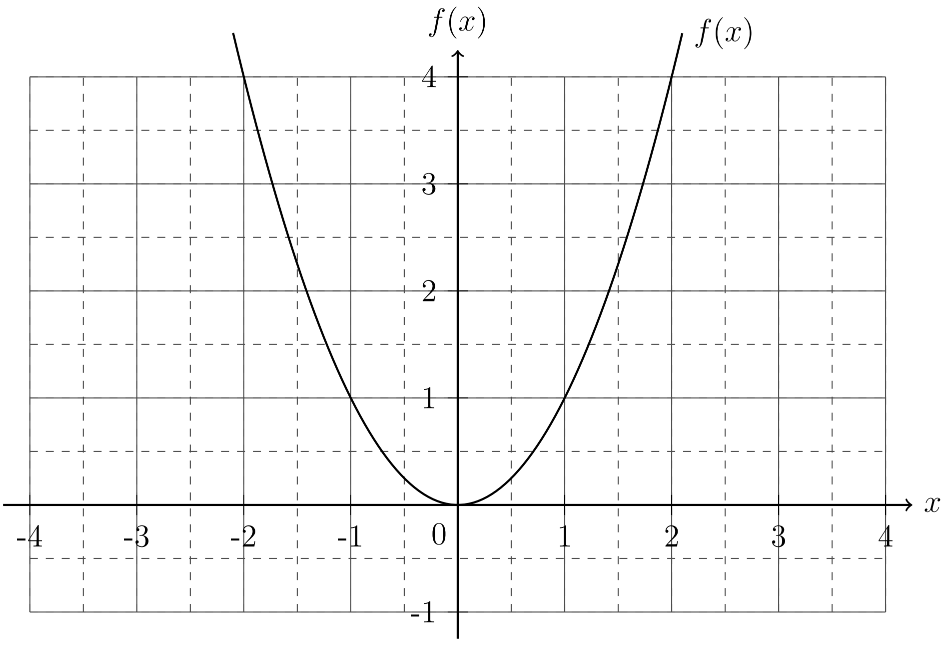
Nach den *Geraden* sind die *Parabeln* die nächst komplexere Form der *Funktionen*. *Parabeln* sind *Funktionen zweiter Ordnung* und werden auch *quadratische Funktionen* genannt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{5.20}$$

Wie die Gleichung (5.20) zeigt, besitzt eine *Parabel* drei *Parameter*. Diese *Darstellung* der *Parabel* wird auch *Parameterdarstellung* genannt. Da die *quadratische Ergänzung* schon eingeführt wurde, kann dieser Gleichung auch so umgeformt werden, dass sich eine *binomische Formel* offenbart (dabei wurden die *Parameter umdefiniert*):

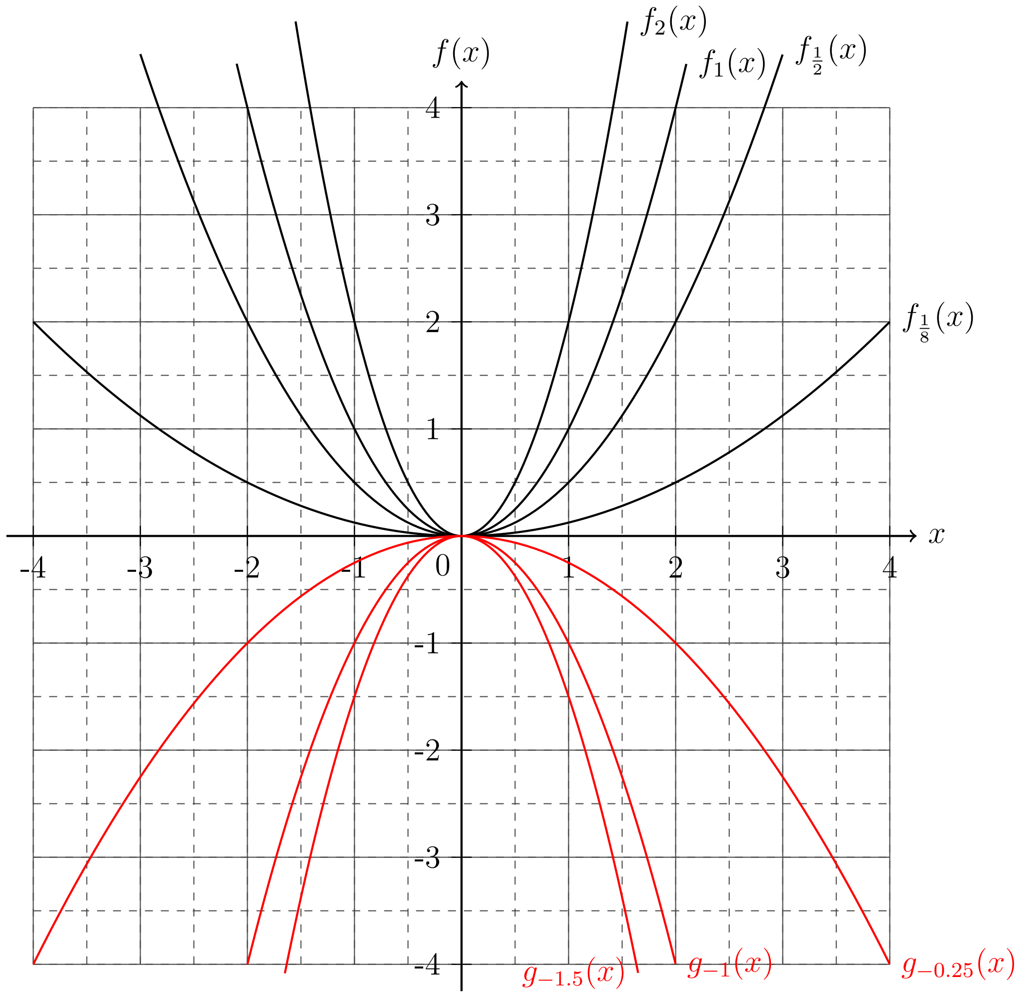
$$f(x) = \alpha(x-d)^2 + e \quad . \tag{5.21}$$

Diese *Darstellung* der *Parabel* wird *Scheitelpunktsform* genannt. Durch das Auflösen der *binomischen Formel* und einer Vereinfachung kann die Gleichung (5.21) auf die die Gleichung (5.20) gebracht werden. Anhand der *Scheitelpunktsform* werden im Folgenden die Eigenschaften der *Parabel* erläutert. Sei zu erst $\alpha = 1$, $d = 0$ und $e = 0$.



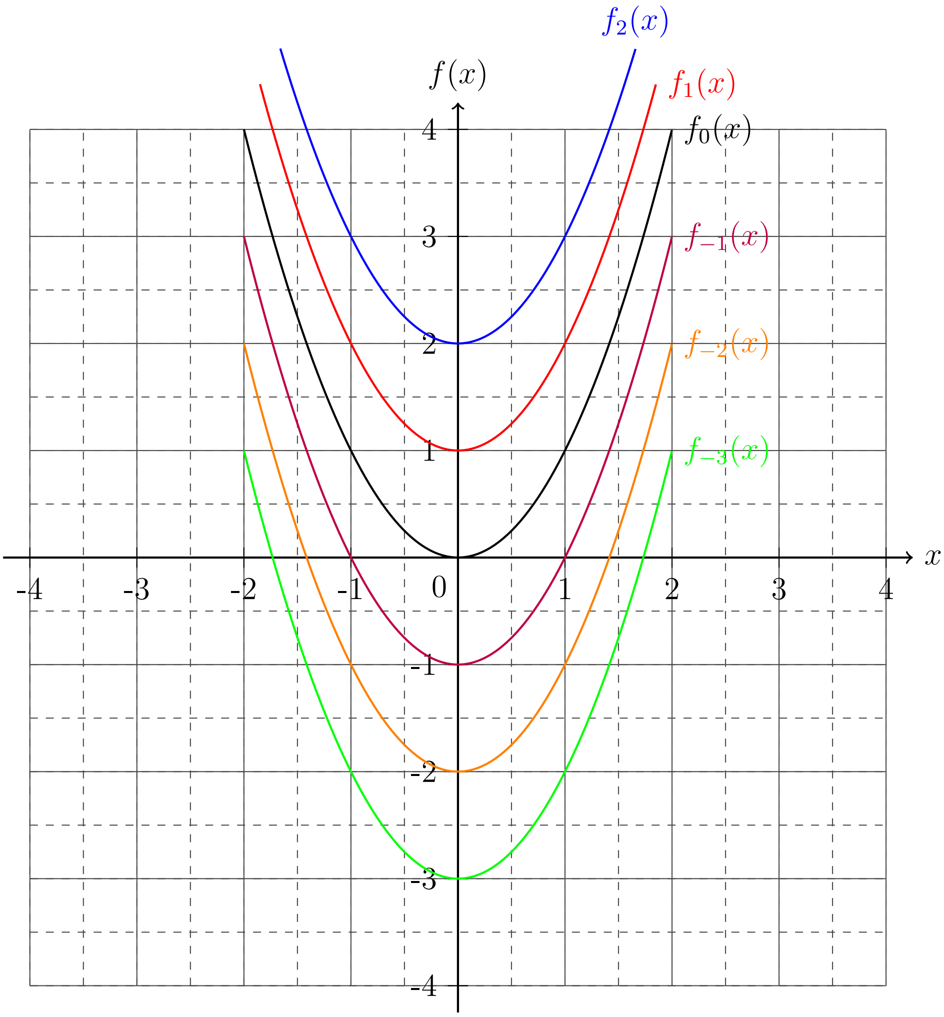
Aus dem *Graphen* wird ersichtlich, dass die *Parabel achsensymmetrisch* ist, da sie an der *Ordinate gespiegelt* wieder sich selbst ergibt. Auch zu erkennen ist, dass die *Funktionswerte* der vereinfachten *Parabel* $f(x) = x^2$ immer stärker zunehmen je weiter ein *Variablenwert* x vom *Koordinatenursprung* $x = 0$ entfernt ist. Außerdem sind alle *Funktionswerte* positiv, da das *Quadrat* das Vorzeichen aufhebt. Der *Scheitelpunkt* der *Parabel* ist der *Punkt* an dem sich die Richtung der *Funktion* umdreht. Hier wäre es das *Minimum* der *Funktion* im *Punkt* $S(0|0)$.

Sei nun im folgenden *Koordinatensystem* $d = 0$ und $e = 0$, während α variiert wird. Dabei soll wieder gelten, dass die *Funktion* für positive Werte von α den Namen f und für negative Werte den Namen g trägt.



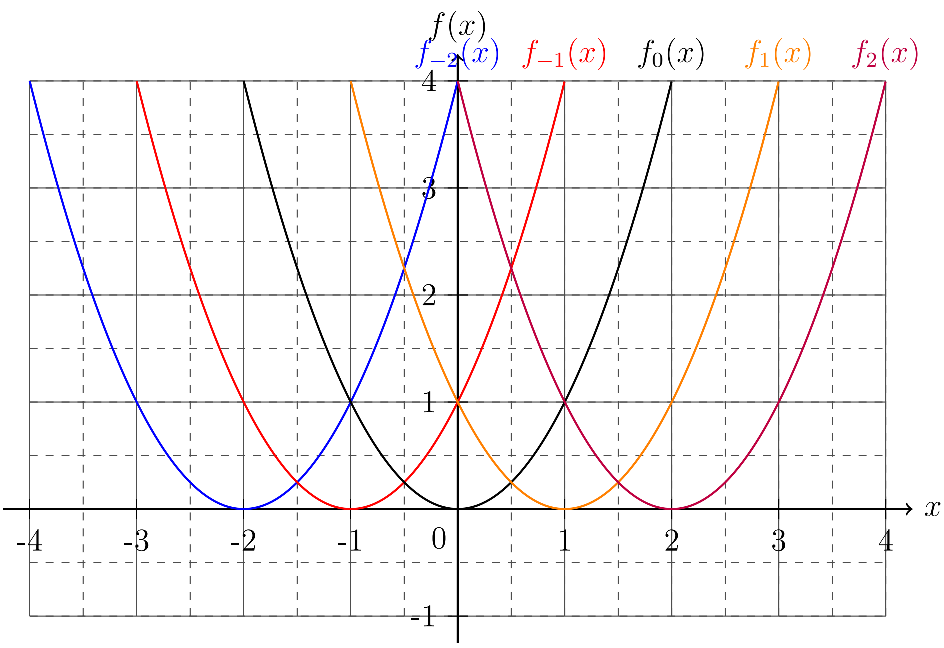
Die *Graphen* für verschiedene Werte von α zeigen deutlich, dass die *Parabeln* für Werte unter 1 gestreckt und für über 1 gestaucht sind. Aus diesem Grund heißt α auch *Stauchungsparameter*. Der Wert von α kann abgelesen werden, indem das Verhältnis $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bestimmt wird, wobei $\Delta x = 1$ gewählt und vom *Scheitelpunkt* aus *parallel* zur *Koordinate* gegangen werden sollte. Der Wert des Verhältnisses ist gleichzusetzen mit α. Des Weiteren fällt auf, dass die *Parabel* für positive α nach oben und für negative α nach unten geöffnet ist. Folglich entscheidet das Vorzeichen des *Stauchungsparameters* über die Öffnung der *Parabel*.

Nun soll der *Parameter* e variiert werden, dazu wird der *Stauchungsparameter* $\alpha = 1$ und $d = 0$ gewählt.



Die *Graphen* zeigen, dass e den *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung*.

Zu Letzt soll d variiert werden, dafür wird der *Stauchungsparameter* α und der *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung* $e = 0$ gewählt.



Durch die *Graphen* wird deutlich, dass der *Parameter* d den Versatz des *Scheitelpunktes* der *Parabel* auf der *Koordinate* beschreibt.
Aus dieser *Darstellung* der *Parabel* wird deutlich, welche Macht die *quadratische Ergänzung* innewohnt, da aus einer *Parameterdarstellung* schnell eine *Scheitelpunktsform* gewonnen und somit die Position des *Scheitelpunkts* und die *Stauchung* abgelesen werden kann. Dabei gilt generell, dass der *Scheitelpunkt* S durch $S(d|e)$ gegeben ist. Der *Scheitelpunkt* S würde in der *Parameterdarstellung* durch $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c-\frac{b^2}{4a}\right)$ gegeben sein.

Die Nullstellen von *quadratischen Funktionen* lassen sich über die *quadratische Ergänzung* berechnen. Da es sich um eine *Funktion zweiter Ordnung* handelt werden auch zwei *Nullstellen* zu berechnen sein, wie bei den *Graphen* $f_{-3}(x)$, $f_{-2}(x)$ und $f_{-1}(x)$ bei der Variation von e schon zu erkennen war und schon im Abschnitt zur *quadratischen Ergänzung* thematisiert wurde.

Des Weiteren bleibt zu erwähnen, dass eine *Funktion zweiter Ordnung* insgesamt drei *Parameter* besitzt, folglich werden drei Informationen benötigt, um alle drei *Parameter* bestimmen zu können. Dies geschieht über das gleiche Verfahren wie bei den *Geradenfunktionen*, nur dass ein *Parameter* und eine Gleichung hinzu kommt.

5.4.1 Übungsaufgaben zu Parabeln

Aufgabe 1: *Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen, bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen, falls sie vorhanden sind. Stelle die Funktion anschließend zur Scheitelpunktsform um.*

a) $f_a(x) = x^2 - 4x + 7$
b) $f_b(x) = -2x^2 - 12x - 14$
c) $f_c(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}$
d) $f_d(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{60}$
e) $f_e(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{64}{21}x + \frac{256}{147} - \ln 2$
f) $f_f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2e\sqrt{2}x + \sqrt{2}e^2 + \pi$
g) $f_g(x) = -x^2 + 2\sqrt{3}4x - \sqrt{5} - 3$
h) $f_h(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{17} - \frac{27}{32}$

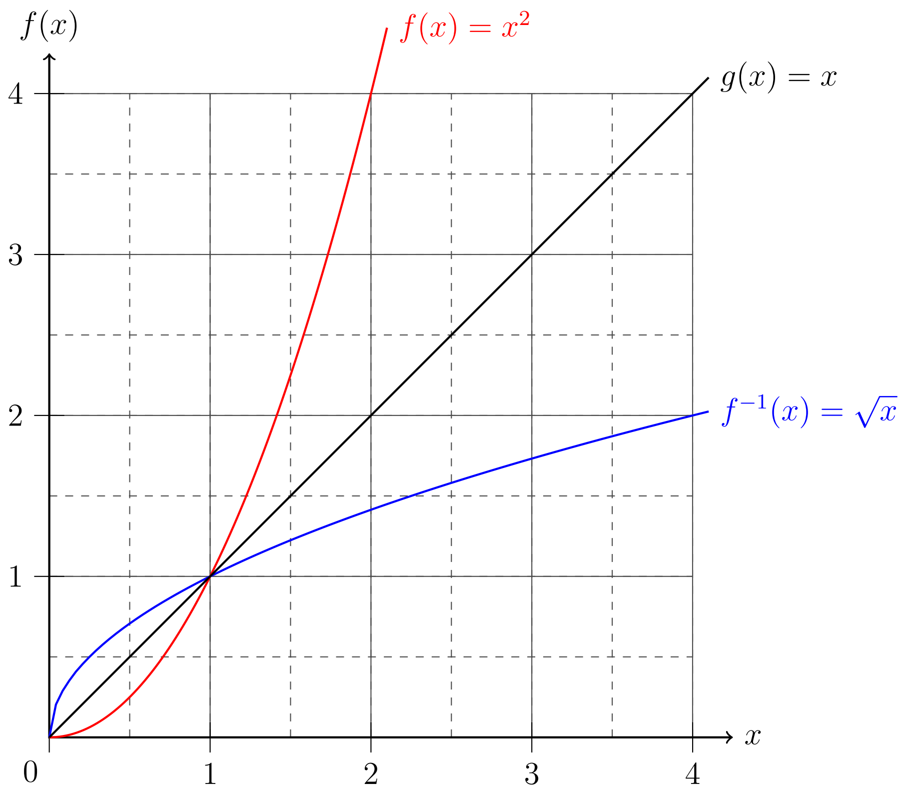
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.22) Lösungen zu Parabeln.

5.5 Umkehrfunktionen

Wie schon bei den Grundlagen der *Algebra* eingeführt wurde, existiert zu jeder *Rechenoperation* eine *Umkehrung*. Folglich existiert zu jeder *Funktion* eine *Umkehrfunktion*. Die Unterschiede der *Funktion* zur *Umkehrfunktion* sind andere *Werte*- und *Definitionsbereiche*. Sei eine *Funktion* $f(x)$ gegeben, dann beschreibt $f^{-1}(x)$ die *Umkehrfunktion* und es gilt dabei immer:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad . \tag{5.22}$$

Die Gleichung (5.22) sagt aus, dass die *Funktion* $f(x)$ von der *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ und die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ von der *Funktion* $f(x)$ gleich der *Variable* x ist. Folglich kann die *Funktion* $f(x)$ statt x in die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt werden und das Ergebnis ist stets x - das gleiche gilt auch für die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt in die *Funktion* $f(x)$. So ist zum Beispiel die *Umkehrfunktion* der *Funktion* $f(x) = x^2$ gegeben als $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,



wobei die *Graphen* im *ersten Quadranten* im *Koordinatensystem* zu sehen sind. Auch zu sehen ist, dass $f(x)$ *gespiegelt* an der *Geraden* $g(x) = x$ die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ ergibt. So die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ zu bestimmen ist graphisch immer möglich. Allerdings gibt es auch ein *algebraisches* Verfahren[1]. Zur Verdeutlichung sei die *Funktion* $f(x) = -\frac{1}{2}9,81x^2 + 5$ gegeben.

[1]Verfahren durch Umstellungen von Gleichungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}9,81x^2 + 5 \quad |-5 \\
f(x) - 5 &= -\frac{1}{2}9,81x^2 \quad \Big|: \left(\frac{9,81}{2}\right) \\
\frac{2(5 - f(x))}{9,81} &= x^2 \quad |\sqrt{\ } \\
\sqrt{\frac{2(5 - f(x))}{9,81}} &= x \quad |\text{Umbenennung} \\
\Rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{2(5 - x)}{9,81}}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Die Gleichung (5.23) zeigt, dass die *Umkehrfunktion* berechnet werden kann, indem nach der *Variable* aufgelöst wird. Als abschließender Schritt werden $f(x)$ in x und x in $f^{-1}(x)$ umbenannt. Über dieses Verfahren lassen sich alle *Umkehrfunktionen* bestimmen. Wichtig ist hierbei, dass die unterschiedlichen *Definitions-* und *Wertebereiche* berücksichtigt und niedergeschrieben werden. So unterscheiden sich diese bei der *Beispielfunktion* zu ihrer *Umkehrfunktion* stark:

$$\begin{aligned}
f(x): &\quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\} \\
\Rightarrow f^{-1}(x): &\quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\} \qquad \mathbb{W} = \left\{x \in \mathbb{R}^+\right\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

In den folgenden Abschnitten werden die *Funktionen* analysiert und ihre *Umkehrfunktionen* vorgestellt.

5.5.1 Übungsaufgaben zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = x + 6$
b) $f(x) = 3x - 9$
c) $f(x) = x^2 - 64$
d) $f(x) = -x^2 + 3x + 8$
e) $f(x) = 4x^2 + 8x - 6$
f) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

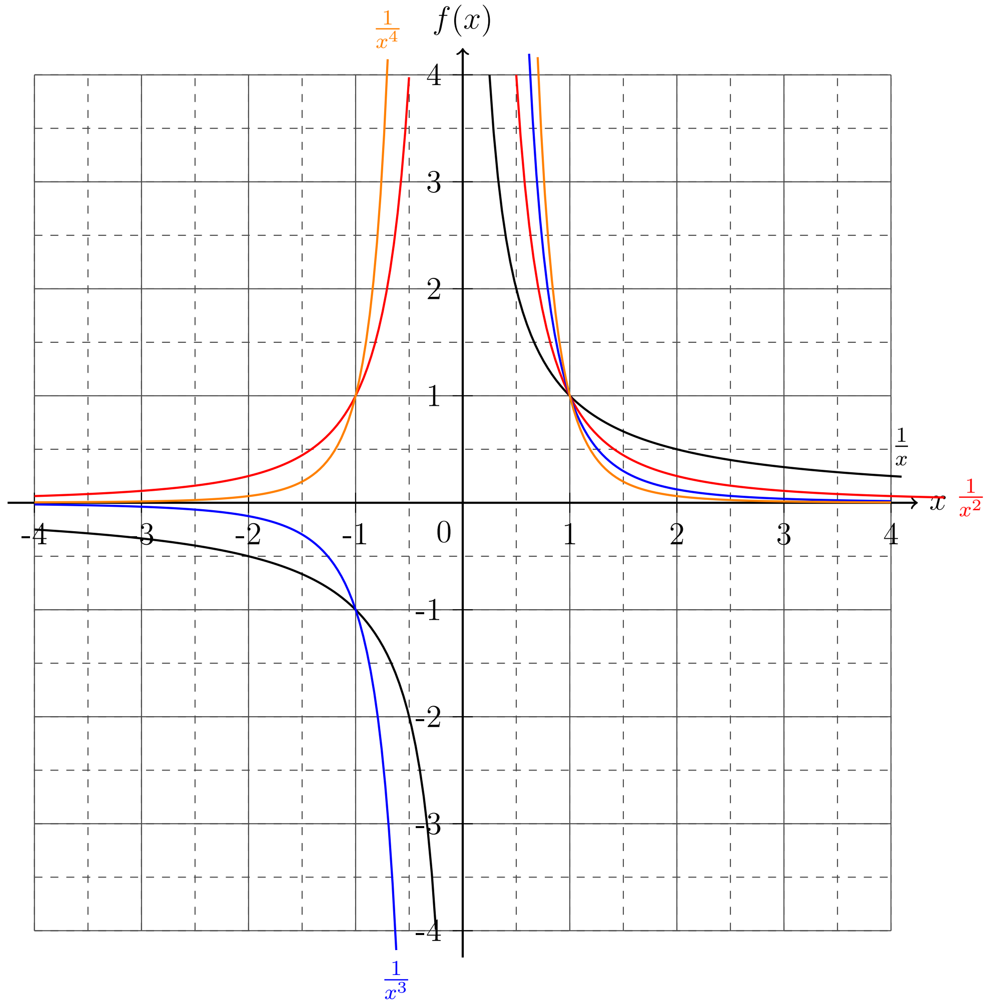
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.23) Lösungen zu Umkehrfunktionen.

5.6 Hyperbeln

Nachdem die *Gerade* und *Parabel* vorgestellt wurde, soll in diesem Abschnitt die *Hyperbel* besprochen werden. Eine *Hyperbel* ist definiert durch:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x} \tag{5.25}$$

Wie schon in der Einleitung des Kapitels erwähnt wurde, muss bei einer *Funktion* die *Definitionsmenge* bestimmt werden, welche bei einer *Hyperbel* durch die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ohne 0 gegeben ist. Die *Hyperbel* beschreibt die Grundform aller *Funktionen* mit negativer *Potenz*.



Wie die Abbildung zeigt, dass die *Hyperbel* und höhere *Potenzen* der selben bei $x = 0$ von rechts gegen ∞ und von links gegen $-\infty$ gehen. Dabei steigen die *Funktionen* stärker an je höher die *Potenz* ist. Je weiter sich die *Funktionen* vom *Koordinatenursprung* entfernen, desto weiter schmiegen sich die *Funktionen* der *Koordinate* an. Dabei ist dieses Verhalten der *Funktionen* auch stärker je höher die *Potenz* ist. Auch zu erkennen ist, dass alle *Graphen* durch den *Punkt* $P(1|1)$ gehen. Gerade *Potenzen* sind an der *Ordinate* gespielt in den *zweiten Quadranten*, während ungerade *Potenzen* im *Koordinatenursprung* in den *dritten Quadranten* gespiegelt werden.

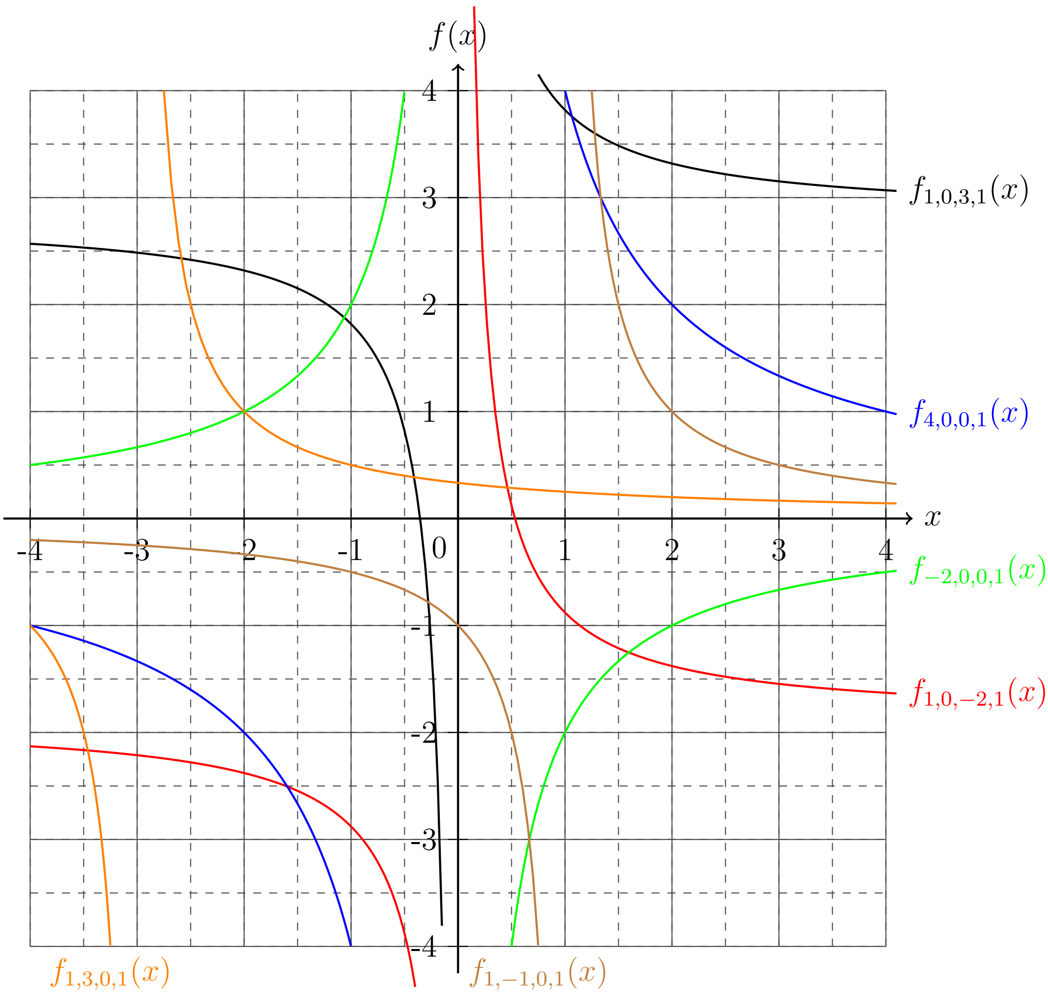
Die *Umkehrfunktion* der *Hyperbel* ist wieder eine *Hyperbel*. Für höhere *Potenzen* gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \tag{5.26}$$

Wenn die *Hyperbel* um eine Zahl c *addiert* wird, dann wird diese auf der *Ordinate* verschoben, sodass eine *Nullstelle* entsteht. Würde eine Zahl b im *Nenner addiert* werden, verschiebt sich die *Hyperbel* entlang der *Koordinate* und eine in den *Zähler multiplizierte* Zahl a würden den *Punkt* verschieben an dem sich alle weiteren *Potenzen* von x schneiden würden. Dabei bestimmt das Vorzeichen von a ob sich die *Hyperbel* hauptsächlich im ersten und dritten oder im zweiten und vierten *Quadranten* aufhält. Der *Punkt* an dem sich alle höheren *Potenzen* schneiden würden, ist gegeben als $P(\sqrt{a}|\sqrt{a})$, wenn die anderen *Parameter* gleich Null gesetzt würden.

$$f_{a,b,c,n}(x) = \frac{a}{x^n + b} + c \tag{5.27}$$

Im folgenden *Koordinatensystem* sind für $n = 1$ jeweils zwei Variationen der *Parameter* als *Graph* dargestellt.



5.6.1 Übungsaufgaben zu Hyperbeln

Aufgabe 1: *Bestimme die Nullstelle x_n und die Definitionsmenge $\mathbb{D}$.*

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$
b) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{4}$
c) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$
d) $f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} - 3$
e) $f(x) = \frac{2}{x-\frac{2}{3}} + \sqrt{5}$
f) $f(x) = \frac{\pi}{x-\sqrt{2}} + e$

Aufgabe 2: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
b) $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}$
c) $f(x) = \frac{9}{4x-2} + 3$
d) $f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-6} + 4$
e) $f(x) = \frac{2}{3x^2-27} + \frac{7}{8}$
f) $f(x) = \frac{e}{x^3 \ln 2 - \pi} + \sqrt{2}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.24) Lösungen zu Hyperbeln.

5.7 Grenzwerte

Wie schon beim *Graphen* der *Hyperbel* zu sehen war, haben einige *Funktionen* Lücken in der *Definitionsmenge* x_L. Dabei zeigen die *Funktionen* oftmals ein interessantes Verhalten an diesen Stellen. So ist bei der *Hyperbel* ein Sprung von $-\infty$ zu ∞ zu sehen. Diese Stelle wird dann *Polstelle mit Vorzeichenwechsel*. Bei der *Funktion* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ war kein Sprung festzustellen, sodass lediglich von einer *Polstelle* gesprochen wird. Von einer *Definitionslücke* ist die Rede, wenn eine *Funktion* in einem *Punkt* nicht *definiert* ist, allerdings kein Verhalten festzustellen ist, dass nicht zu einer *Polstelle* passt. Solche *Funktionen* werden später im Abschnitt „gebrochen rationale Funktionen“ behandelt.

Um das Verhalten um solche Lücken in der *Definitionsmenge* oder für besonders große oder kleine Zahlen zu beschreiben, dient der sogenannte *Grenzwert*. Dabei wird zwischen einem *linksseitige* und einem *rechtsseitigen Grenzwert* - also ob von den kleineren Zahlen oder von den größeren Zahlen aus zur Lücke gegangen wird.

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow x_L} f(x) &\qquad \text{linksseitiger Grenzwert} \\ \lim_{x \searrow x_L} f(x) &\qquad \text{rechtsseitiger Grenzwert} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Für die *Hyperbel* $\frac{1}{x}$ existieren folgende *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Generell kann bei jeder *Funktion* der *Grenzwert* gegen ∞ und $-\infty$ bestimmt werden. Dabei sind die *Grenzwerte* in der Schule von relativ trivialer Natur, sodass sich das *Verhalten* offenbart, indem Zahlen nahe der Zielzahl einsetzt. Für das Verhalten einer *Funktion* gegen besonders große oder kleine Zahlen zu bestimmen reicht es aus zwei besonders große oder kleine Zahl einzusetzen und die *Funktionswerte* zu vergleichen. Für die *Hyperbel* ergibt sich daraus, dass die *Funktionswerte* gegen Null gehen. Dabei bedeutet „gegen Null“, dass die Erreichung dieses *Funktionswertes* unerreichbar ist. Die *Funktion*, die diese nicht erreichbaren *Funktionswerte* beschreibt, wird *Asymptote* genannt. Aus diesem Grund wird von einem *asymptotischen Verhalten* gegen Null für große Zahlen bei einer *Hyperbel* gesprochen.

Einige wichtige *Grenzwerte*:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} &= \infty \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= e \\
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= e^x \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) &= \ln a
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

5.7.1 Übungsaufgaben zu Grenzwerte

Aufgabe 1: *Bestimme die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.*

a) $f(x) = \frac{1}{x-6}$
b) $f(x) = \frac{1}{2x-8}$
c) $f(x) = \frac{1}{5x-2}$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$
e) $f(x) = \frac{1}{2x^2-4}$
f) $f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$

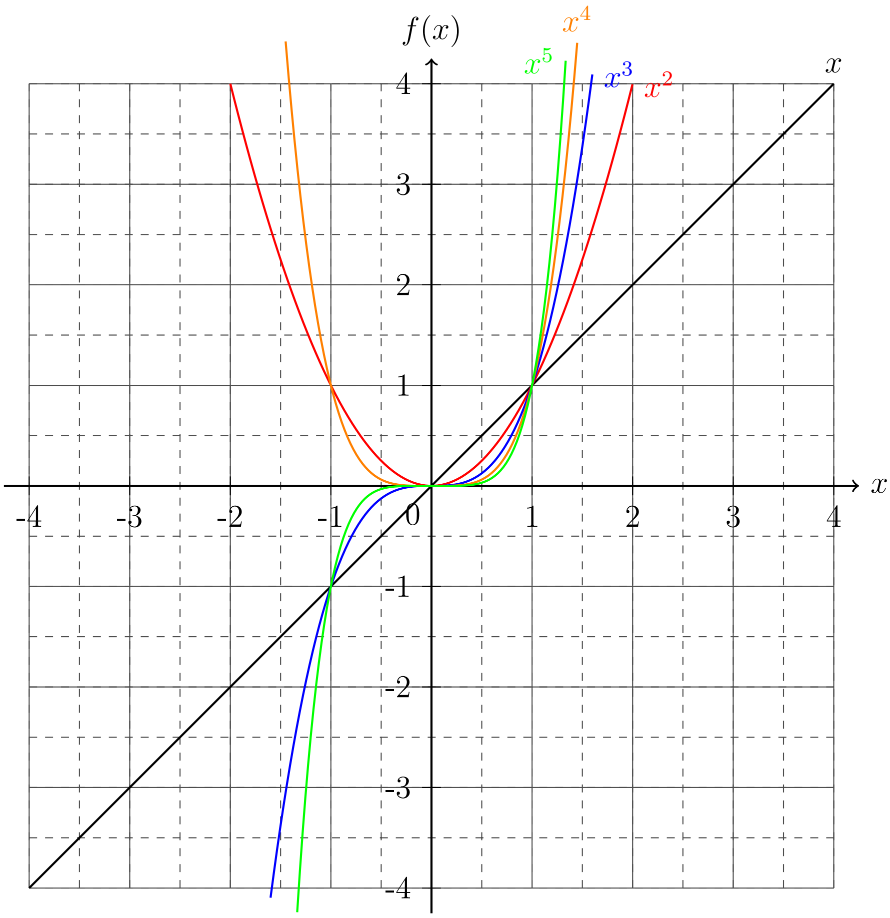
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (13.5.25) Lösungen zu Grenzwerte.

5.8 Polynomfunktionen

Nach der Diskussion der *Geraden* und der *Parabeln* kann ein Zusammenhang zwischen diesen festgestellt werden. Dabei lohnt sich eine Gegenüberstellung der *linearen* und *quadratischen Funktion* mit höheren *Funktionen*:

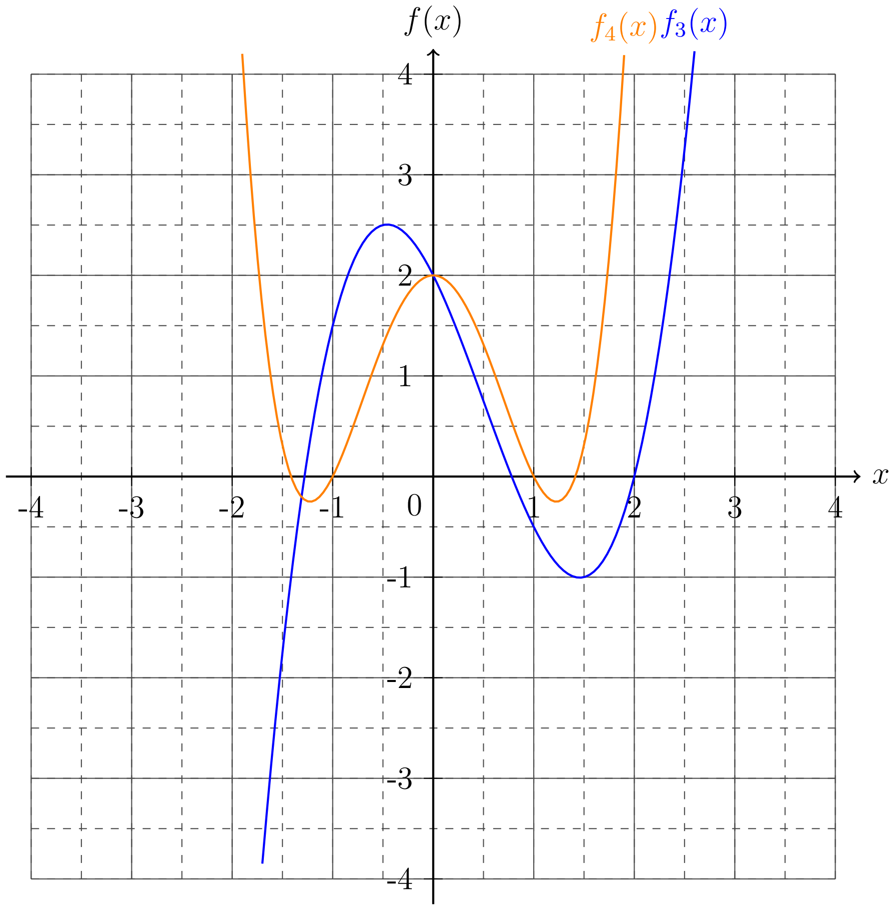
$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1x + a_0 \qquad \text{1. Ordnung}\\
f_2(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{2. Ordnung}\\
f_3(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{3. Ordnung}\\
f_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{4. Ordnung}\\
f_5(x) &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{5. Ordnung}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Deutlich an der Gleichung (5.31) ist zu erkennen, dass durch die Höhe der *Potenzen* die Anzahl der *Terme* und der *Parameter* zunimmt. Die rechte Seite der *Funktionsgleichungen* werden *Polynome* genannt. *Polynome* zeichnen sich dadurch aus, dass die *Potenzen* der *Variablen aufaddiert* werden und dabei jeweils ihren spezifische *Vorfaktoren* besitzen.
Dabei unterscheiden sich die Eigenschaften der *Polynomfunktionen* je nach Ordnung. Um diese vergleichen zu können, werden nur die höchsten *Terme* der *Polynome* berücksichtigt.



Ungerade *Potenzen* sind dabei *symmetrisch* in einem *Punkt*, während gerade *Potenzen symmetrisch* zu einer Linie *parallel* zur *Ordinate* sind. Außerdem zeigt die Abbildung auch, dass mit steigender *Potenz* die *Funktionen* nach dem *Punkt* $P(1|1)$ einen stärkeren Anstieg zeigen und vor diesem *Punkt* schneller gegen Null gehen.

Um mehr Eigenschaften der *Polynomfunktionen* in den dazugehörigen *Graphen* ablesen zu können, werden nun beliebige Beispiele von *Polynomen* dritter und vierter *Ordnung* graphisch dargestellt.



Aus dem *Koordinatensystem* ist das charakteristisch Bild der *Graphen* von *Polynomfunktionen* dritter und vierter *Ordnung* zu erkennen. Dabei fällt auf, dass eine *Funktion* eines *Polynom* dritter *Ordnung* zwei Stellen besitzt, die dem *Scheitelpunkt* der *Parabel* ähneln. Diese Stellen werden werden *Extremstellen* und die dazu gehörigen *Punkte* werden *Extrempunkte* genannt. Dabei wird unterschieden zwischen *Minima* und *Maxima*. Eine *Polynomfunktion* vierter *Ordnung* besitzt drei *Extrempunkte*.

Die Berechnung der *Nullstellen* wird in einer späteren Version des Buches an dieser *Stelle* vorgestellt.

5.9 Reihen

Da oftmals viele ähnliche *Terme aufaddiert* oder *-multipliziert* werden, gibt es auch für dieses Prozedere eine abkürzende Schreibweise. Zu nächst wird die Abkürzung für die *Addition* eingeführt - die *Summenreihe* $\sum$. Dabei sei als Beispiel $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ gegeben. Die abkürzende Schreibweise würde wie folgt aussehen:

$$\sum_{n=0}^{5} x^n = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad , \tag{5.32}$$

wobei die Gleichung (5.32) als „Die *Summe* über x^n von $n = 0$ bis $n = 5$“ gesprochen wird. Somit wird unter dem *Summenzeichen* $\sum$ den durchlaufenden *Parameter* (hier n) und den Startwert an. Über dem *Summenzeichen* $\sum$ ist der maximale Wert des *Parameters* bei der *Addition* angegeben. Für komplexere *addierte Terme* könnte eine solche *Summe* zum Beispiel so aussehen:

$$\sum_{n=2}^{4} \frac{1}{n!} \cdot \log_n \left(\sqrt[n]{x} \right) = \frac{1}{2!} \cdot \log_2 \left(\sqrt[2]{x} \right) + \frac{1}{3!} \cdot \log_3 \left(\sqrt[3]{x} \right) + \frac{1}{4!} \cdot \log_4 \left(\sqrt[4]{x} \right) \quad . \tag{5.33}$$

Viele komplexere *Summen* sind schon bekannt, allerdings wurden sie noch nicht in ihrer *Summenform* vorgestellt. Da diese *Summen* besonders oft vorkommen, wurden für diese *Summen* wiederum Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= e^x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \sin x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} &= \cos x \end{aligned} \tag{5.34}$$

Auch das Beispiel aus Gleichung (5.32) ist eine besondere *Summenreihe* - die sogenannte *geometrische Reihe*:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=0}^{k} x^n &= \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Aber auch die *Vorfaktoren* der *binomischen Formeln* für höhere *Potenzen* k lassen sich über *Reihen* darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} = (1+x)^k \tag{5.36}$$

Für *Polynome* wird oftmals auch eine *Summenreihe* verwendet

$$\sum_{n=0}^{k} c_n x^n \quad , \tag{5.37}$$

wobei c_n für jede *Potenz* von x einen anderen Wert haben kann und sind *Koeffizienten*, also *Vorfaktoren*.

Wesentlich seltener kommen *Produktreihen* $\prod$ vor, welche nur kurz vorgestellt werden sollen.

$$\prod_{n=0}^{4} x^n = x^0 \cdot x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \tag{5.38}$$

Dabei ist die *Fakultät* eine oft vorkommende *Produktreihe* und wird durch den *Fakultätsoperator* ! abgekürzt.

$$\prod_{n=0}^{k} n = k! \tag{5.39}$$

Wichtig für jeden Schüler ist es zu wissen was sich hinter diesen Symbolen verbirgt, sodass weiterführende Zusammenhänge hergestellt werden können und Gleichungen mit komplexer Struktur den Schüler nicht abschrecken lassen, da bekannt ist, dass es sich lediglich um eine abkürzende Schreibweise handelt.

5.10 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind *Funktionen*, die im *Nenner* und im *Zähler* ein *Polynom* vorzuweisen haben. Dabei wird zwischen *echten* und *unechten gebrochen rationalen Funktionen* unterschieden. Eine *echt gebrochen rationale Funktion* wäre zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 25} \quad , \tag{5.40}$$

wobei der *Nenner* nicht wegzudiskutieren ist. Anders sieht dies bei den *unecht gebrochen rationalen Funktionen* aus, welche oftmals in Verbindung mit den *binomischen Formeln* vorzufinden sind.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)\,(x + 3)}{x + 3} = x - 3 \quad , \tag{5.41}$$

Gleichung (5.41) zeigt, dass die *Funktion* bei $x = -3$ aufgrund der Bruchschreibweise nicht definiert ist, allerdings kann durch Anwendung der *binomischen Formeln* gezeigt werden, dass es sich bei dieser Struktur der *Funktion* lediglich um eine *Gerade* handelt. Allerdings sind einige *Brüche* nicht so einfach zu kürzen wie in diesem Beispiel. Hierfür bedarf es der sogenannten *Polynomdivision*, also der *Division* durch ein *Polynom*. Dabei wird wie bei der schriftlichen *Division* der *Grundrechenarten* gerechnet, allerdings statt durch Zahlen zu *dividieren*, wird durch einen *Funktionsterm* dividiert. Um die *Polynomdivision* zu demonstrieren sei folgende *Funktion* gegeben:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 48}{x - 2} \quad , \tag{5.42}$$

wobei durch die *Polynomdivision* überprüft werden kann ob es sich um eine *echte* oder *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt.

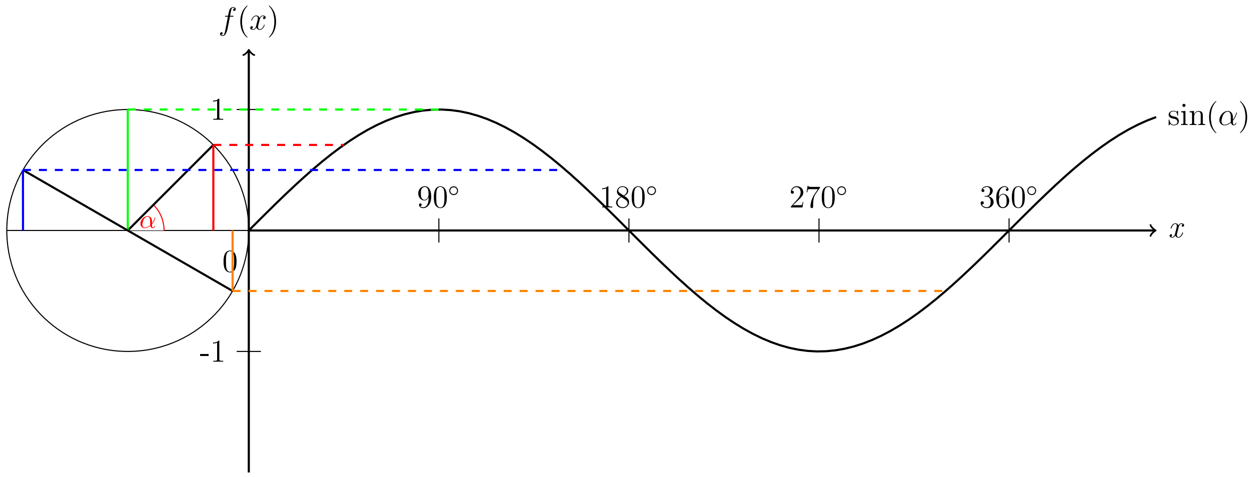
$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) & : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & & \\
\hline
& 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 & \\
& -(6x^3 & -12x^2) & & & \\
\hline
& & 8x^2 & +8x & -48 & \\
& & -(8x^2 & -16x) & & \\
\hline
& & & 24x & -48 & \\
& & & -(24x & -48) & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Bei der *Polynomdivision* ist kein *Restterm* vorhanden, sodass der Schluss gezogen werden kann, dass es sich um eine *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt. Das Verfahren der *Polynomdivision* ist auch nützlich wenn *Null-* oder andere *Stellen* bei höheren *Polynomfunktionen* bestimmt werden sollen.

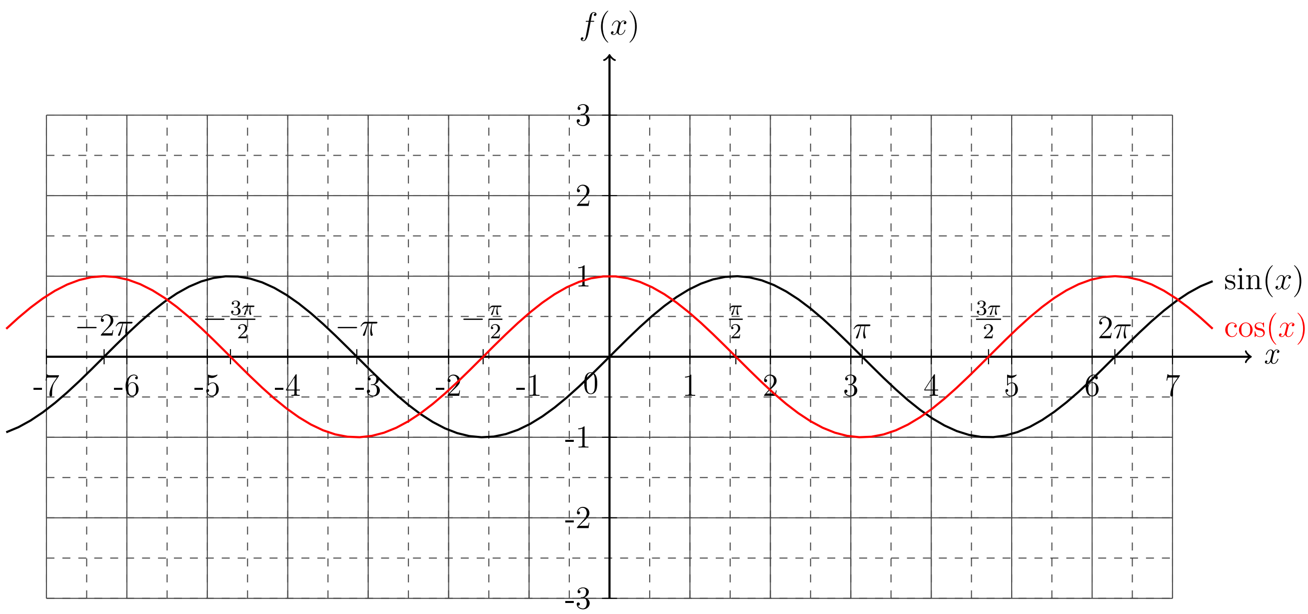
Insgesamt zeigt sich durch diese Unterscheidung, dass *unechte gebrochen rationale Funktionen* keine *Polstelle* sondern eine *Definitionslücke* besitzen, wobei bei komplexeren *Funktionen* lediglich sich nur die *Polstellenanzahl* reduziert.

5.11 Trigonometrische Funktionen

Als die *Trigonometrie* eingeführt wurde, wurden auch schon die *trigonometrischen Funktionen* eingeführt, da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sowie $\tan(x)$ und $\cot(x)$ sind bereits *Funktionen*, wie auch an der sprachlichen Übersetzung zu erahnen war: „Sinus von x“. Um den *Graphen* der *Sinus-Funktion* zu veranschaulichen, wird ein *Kreis* mit *Radius* $r = 1$ gewählt, sodass die *Hypotenuse* auch immer gleich 1 ist. Daraus folgt, dass die *Gegenkathete* zum Winkel α, welcher sich am *Kreismittelpunkt* befindet, den *Sinus-Funktionswert* entspricht.



Durch den *Graphen* und den sogenannten *Einheitskreis* wird auch ersichtlich, dass sich die *Sinusfunktion* sich nach $360° = 2\pi\text{rad}$ wiederholt. Diese *periodische* Eigenschaft der *Funktion* ist besonders oft in den Naturwissenschaften zur Beschreibung der Natur vorzufinden.
Da der *Kosinus* nur ein um 90° verschobener *Sinus* ist ähneln sich auch die *Funktionsgraphen*.



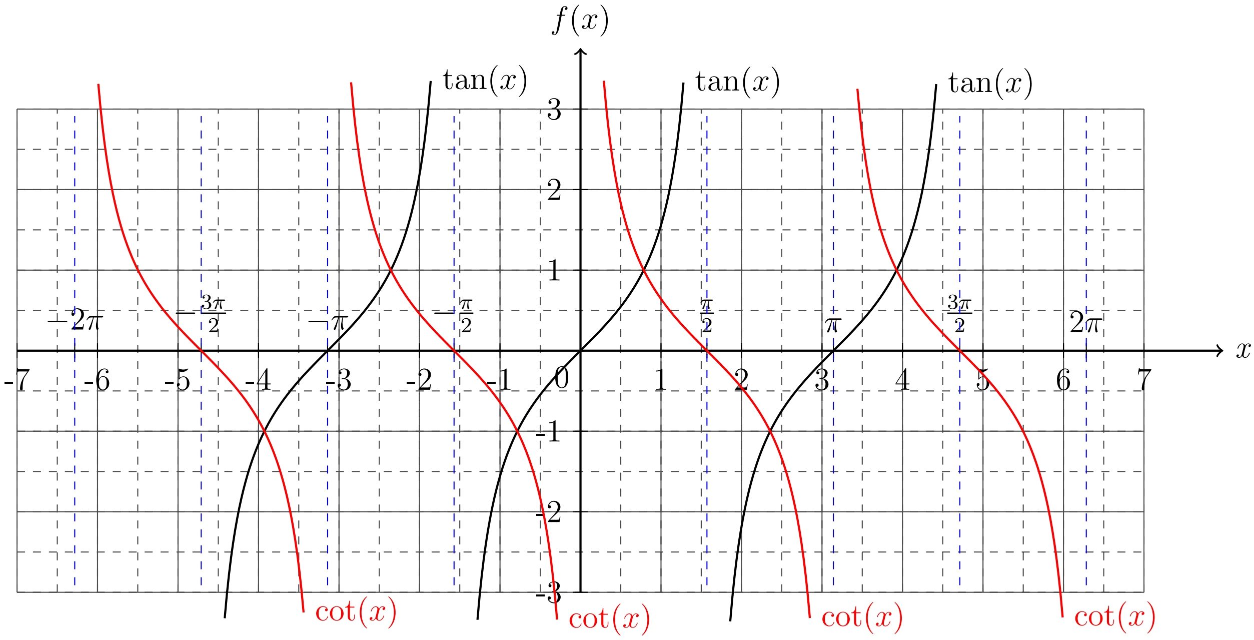
Durch die *Graphen* zeigen sich die wichtigen Eigenschaften, dass die *Funktionen* sich zwischen 1 und -1 bewegt und dass

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0 \quad \text{und} \\ \cos 0 &= 1 \end{aligned} \tag{5.43}$$

gilt. Außerdem ist zu erkennen, dass der *Kosinus symmetrisch* zur *Ordinate* und dass der *Sinus punktsymmetrisch* zum *Koordinatenursprung* ist.

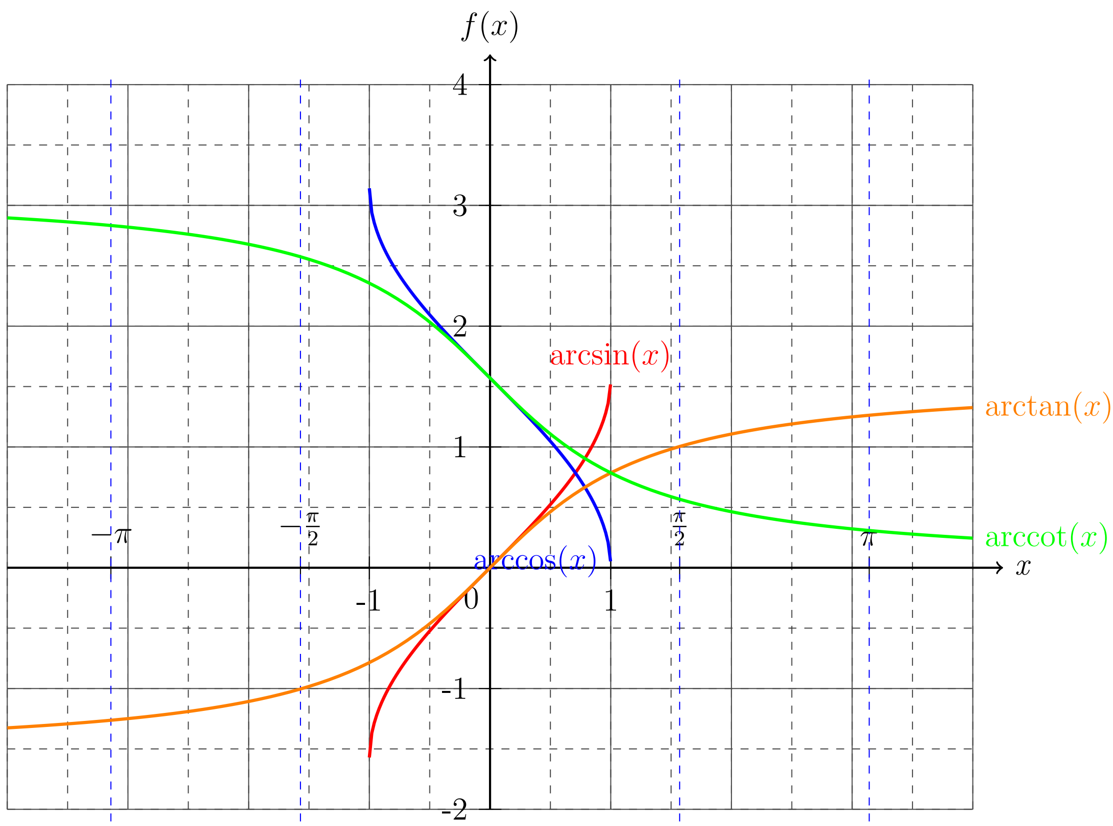
$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \quad \text{und} \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{5.44}$$

Der *Tangens* und der *Kotangens* sind *Brüche* aus *Sinus* und *Kosinus*, was wiederum bedeutet, dass es *periodische* Lücken in der *Definitionsmenge* muss. Dies zeigt sich auch in der Darstellung der *Graphen*.



Die *Graphen* zeigen, dass bei der *Tangens*- und der *Kotangens-Funktion* in *periodischen Abständen* zu *Polstellen* vorzufinden sind. Dabei ist die *Polstelle* des *Tangens* die *Nullstelle* des *Kotangens* und anders herum.

Die *Graphen* der *Umkehrfunktionen* sind im folgenden *Koordinatensystem* veranschaulicht.



5.12 Trigonometrische Identitäten

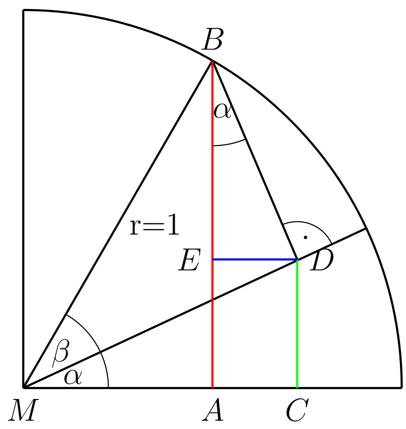
Wie schon im vorigen Abschnitt zu sehen war, gibt es Beziehungen zwischen *Sinus*, *Kosinus*, *Tangens* und *Kotangens*, den sogenannten *trigonometrischen Funktionen*. Diese Beziehungen können hergeleitet und bewiesen werden. Die wichtigste *trigonometrische Identität* ist der *Satz des Pythagoras* an einem *rechtwinkligen Dreieck* mit der *Hypotenusenlänge* von 1. Somit ergeben sich die *Katheten* zur Länge $\sin x$ und $\cos x$, sodass daraus die folgende *Identität* folgt:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad , \tag{5.45}$$

wobei $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ ist.
Des Weiteren gelten noch die sogenannten *Additionstheoreme*:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad , \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad ; \end{aligned} \tag{5.46}$$

welche anhand des *Einheitskreises* bewiesen werden können.



Dabei ist die *Strecke* $\overline{AB} = \sin(\alpha + \beta)$ sowie die *Strecke* $\overline{BD} = \sin \beta$. Der *Kosinus* für den *Winkel* α wäre dann $\cos \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$, sodass dann $\overline{BE} = \cos \alpha \sin \beta$ ist. Da der *Sinus* von α durch das Verhältnis $\frac{\overline{CD}}{\overline{MD}}$ gegeben ist, ergibt sich mit $\cos \beta = \overline{MD}$ ein Ausdruck für die *Strecke* $\overline{BE} = \cos \alpha \sin \beta$. Die *Strecke* $\overline{AB}$ besteht aus der *Summe* der *Strecken* $\overline{BE}$ und $\overline{EA}$ und somit wäre das *Additionstheorem* für den *Sinus* bewiesen. Für die *Differenz* der *Winkel* werden die *Symmetrieeigenschaften* der *trigonometrischen Funktionen* ausgenutzt. Auch für den *Kosinus* kann eine ähnliche Herleitung aus dieser Abbildung beschrieben werden.

Aus dieser Beziehung und den anderen vorgestellten Eigenschaften aus dem vorherigen Abschnitt können noch weitere *Identitäten*.

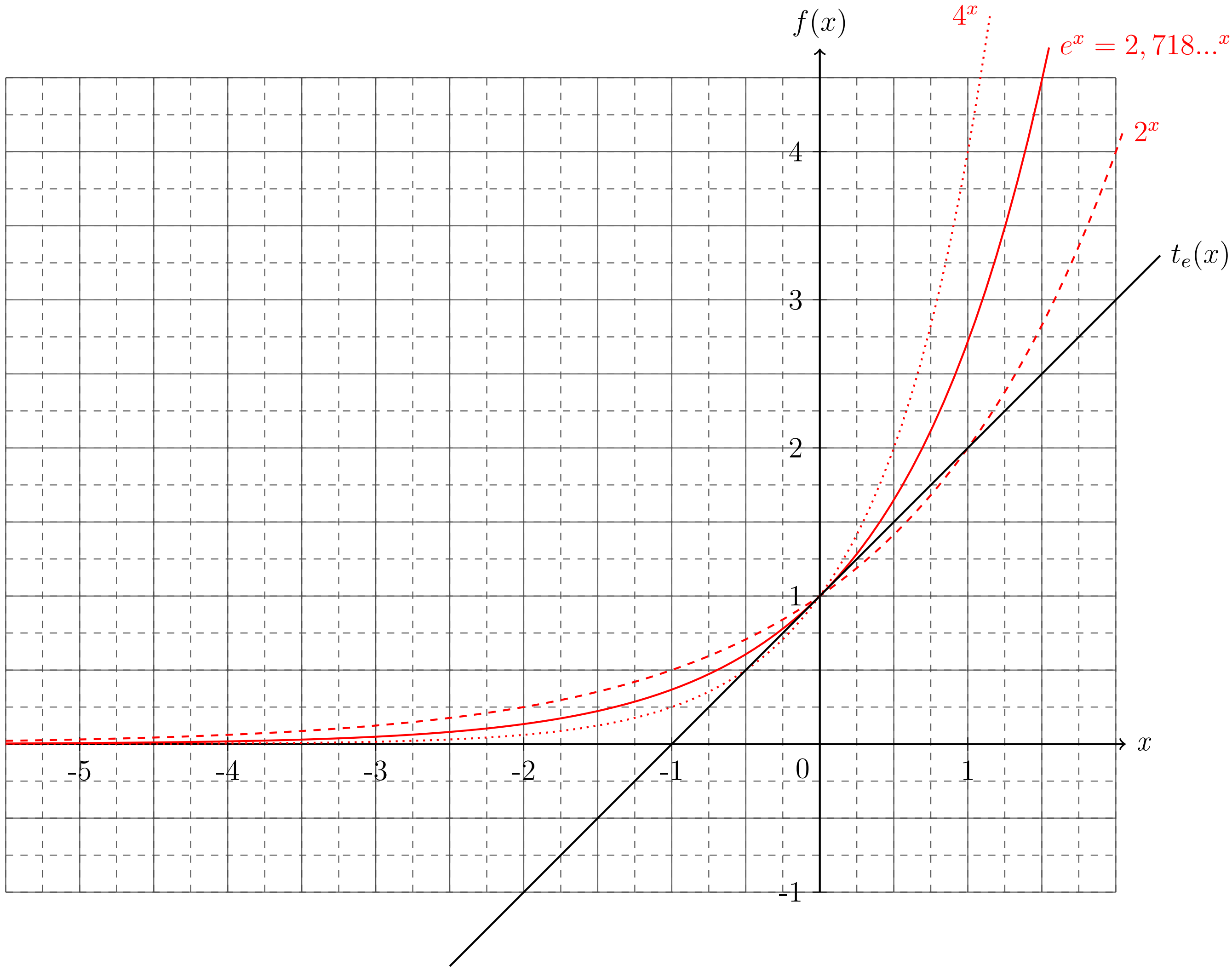
$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \quad , \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad , \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right) \quad , \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \quad .
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Die ersten beiden *Identitäten* können mit den *Additionstheoremen* schnell gezeigt werden, da $\sin 2x = \sin(x + x)$ und $\cos 2x = \cos(x + x)$. Mit Hilfe dieser Beiden *Identitäten* können schnell die beiden weiteren bewiesen werden.

All diese *Identität* können genutzt werden um weitere zu bewiesen und sind oft in Aufgaben sowie in der Beschreibung der Natur nützlich.

5.13 Exponentialfunktion

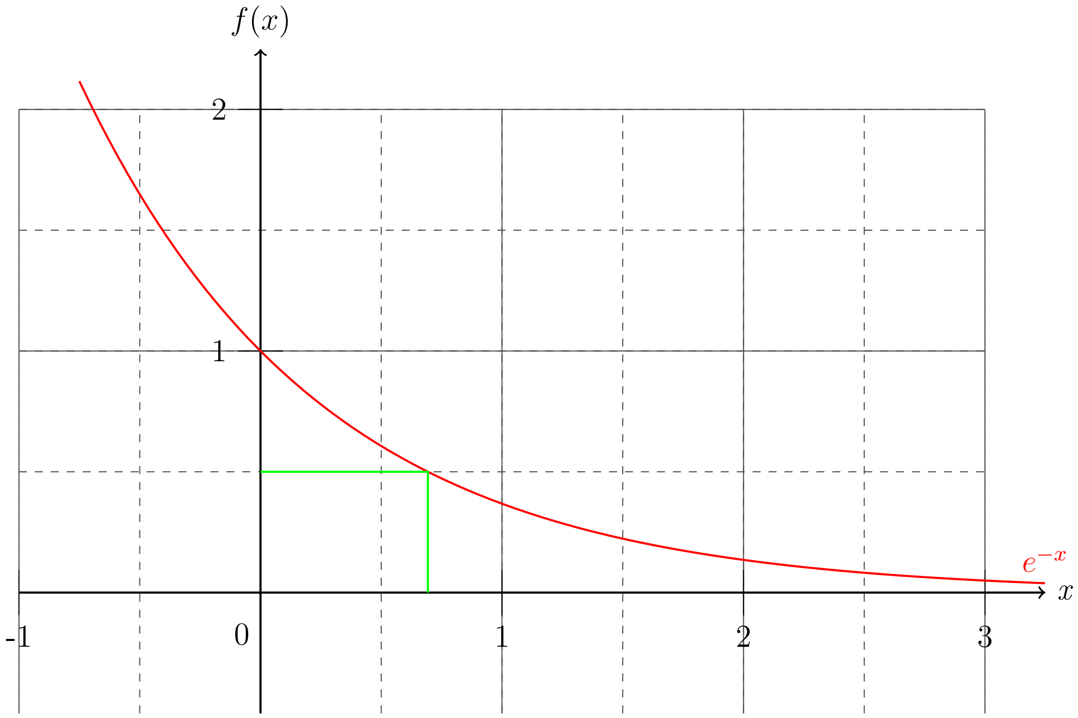
Zu guter Letzt wird noch die *Exponentialfunktionen* thematisiert. Dabei steht eine Zahl als *Basis* und im *Exponenten* die *Variable*. Dabei wurde schon im Abschnitt der *Logarithmen* die Zahl e eingeführt. Ihre besondere Rolle in der Mathematik hat sich im Laufe der Kapitel dabei schon wie bei den *Reihen* herauskristallisiert. Allerdings kann die große Bedeutung dieser Zahl in der *Basis* erst vollständig verstanden werden, wenn das Kapitel „Differentiation und Integration“ behandelt wurde. Für diesen Abschnitt ist die Wirkungsweise der *Exponentialfunktionen* von Bedeutung. Dazu finden sich im folgenden *Koordinatensystem* einige *Exponentialfunktionen* mit unterschiedlicher *Basis* wieder.



Dabei kann den *Graphen* entnommen werden, dass sich alle *exponentiellen Funktionen* für hohe negative Zahlen *asymptotisch* gegen Null bewegen, während die *Funktionswerte* für hohe positive Zahlen gegen Unendlich laufen. Diese Eigenschaft gilt es in sehr vielen Fällen, besonders in der Physik, auszunutzen, da die *Division* durch eine *Exponentialfunktion* bedenkenlos durchgeführt werden kann. Im *Koordinatensystem* befindet sich auch die *Funktion* $t_e(x)$, welche eine *Gerade* mit *Steigungsparameter* $m = 1$ ist. Diese spezielle *Gerade* ist eine *Tangente* der *Exponentialfunktion* mit der *Basis* e. Diese besondere Eigenschaft wird sich im späteren Verlaufes des Buches offenbaren.

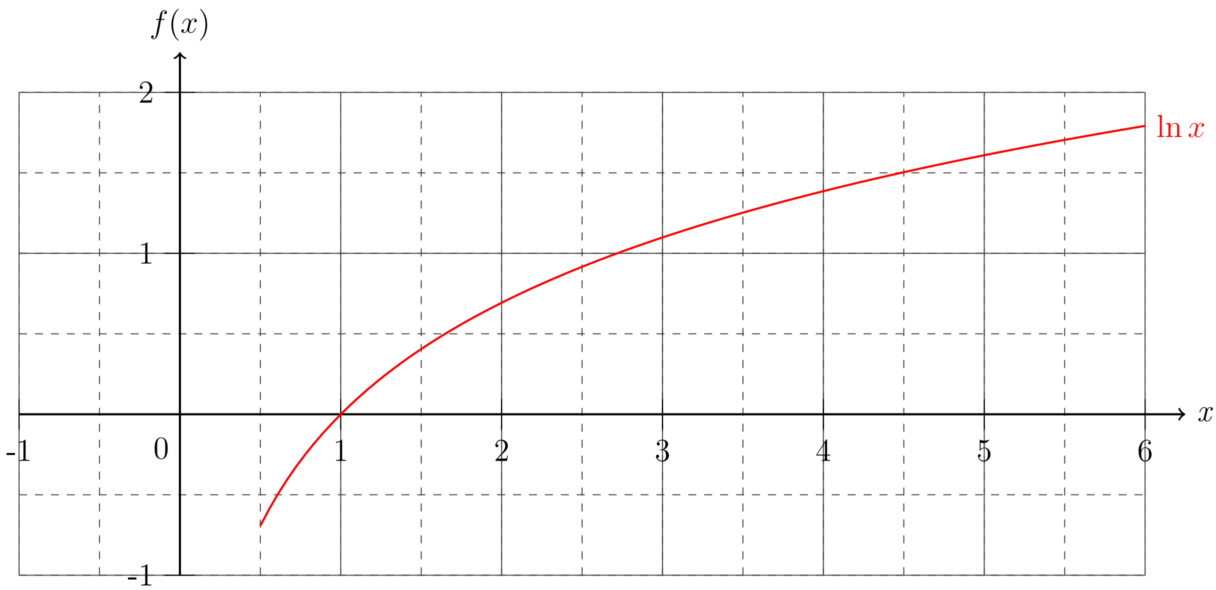
Eine weitere Eigenschaft die aus dem *Koordinatensystem* abzulesen ist, ist die Tatsache, dass sich der *Funktionswert* bei einem Schritt auf der *Koordinate* mit dem Wert der *Basis* der *Exponentialfunktion multipliziert*. So entwickeln sich die *Funktionswerte* für $f(x) = 2^x$ mit dem wachsenden *Exponenten*: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, und so weiter.

Wenn die Rede vom *exponentiellen Zerfall* ist, dann wird die *Funktion* $e^{-\lambda x}$ betrachtet. Dabei gibt der *Parameter* λ an wie stark der Zerfall von statten geht.



Im *Koordinatensystem* wurde für den *Parameter* $\lambda = 1$ gewählt. Ebenso wurde ins *Koordinatensystem* die Stelle eingetragen, an der sich der *Funktionswert* um die Hälfte reduziert hat. Dieser Wert wird in den Naturwissenschaften oftmals mit Halbwertszeit betitelt.

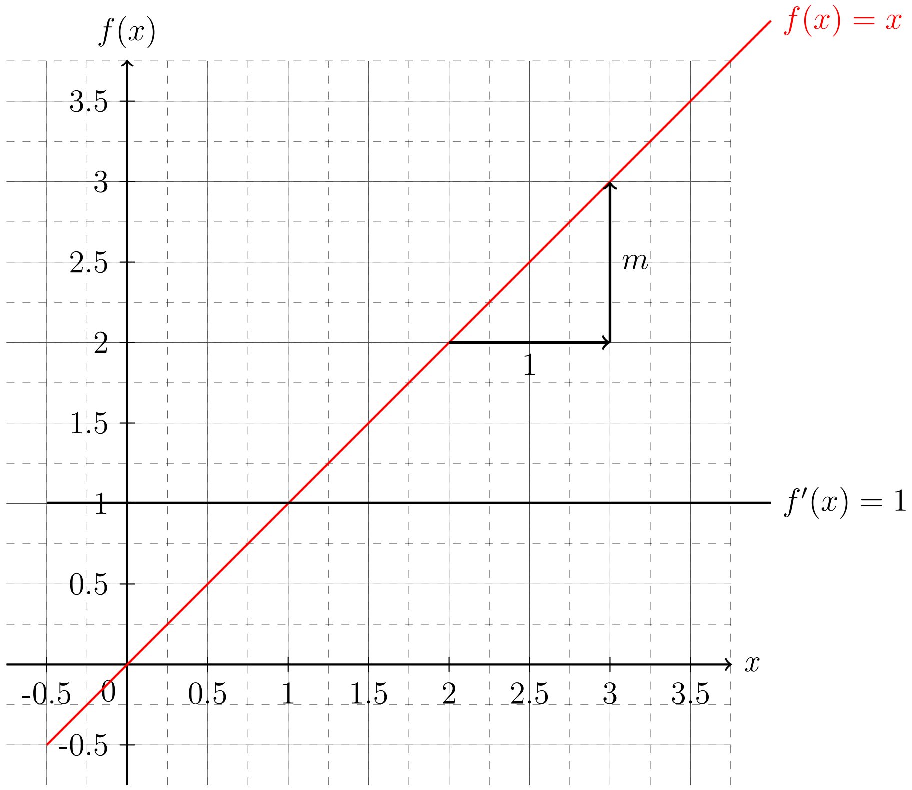
Die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist der *Logarithmus*, dessen *Graph* wie folgt aussieht:



Für ein tieferes Verständnis von *Funktionen* sollte das Kapitel „Differentiation und Integration“ sowie „Komplexe Zahlen“ bearbeitet werden, da viele Zusammenhänge zwischen den Arten der *Funktionen* und ihren Eigenschaften dadurch besonders deutlich erkennbar werden.

6 Differentiation und Integration

Die *Differentiation* und die *Integration* sind wichtige Kernelemente der *Analysis*. Um diese beiden *Operationen* effektiv einzuführen, sollte die *Geradengleichung* $f(x) = mx + b$ mit der *Steigung* der *Geraden* m und dem *Ordinatenschnittpunkt* b nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Seien die *Geraden* $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ gegeben, dann kann durch die Veranschaulichung im *Koordinatensystem* gesehen werden, dass die *Steigung* der *Gerade* $f(x)$ gleich der dem Wert der *Geraden* $f'(x)$ also gleich eins ist. Die *Steigung* der *Gerade* $f'(x)$ ist Null, da es sich um eine *Konstante* handelt wie im *Koordinatensystem* zu erkennen ist. Dabei ist der Begriff „*Steigung*" so *definiert*: „Wenn man einen Einheitenschritt nach rechts von der *Geraden* aus geht, ist die *Steigung* der *Geraden* gleich der Einheitenschritte *orthogonal* zum gegangenen Schritt - folglich nach oben für positive *Steigung* und nach unten für negative *Steigung*."



6.1 Operatoralgebra

Mathematisch lässt sich ein Ausdruck definieren, der sprachlich fordert: „*Bestimme die Steigung von der Funktion!*" Diese Forderung wird durch den sogenannten *Differentialoperator* $\frac{\partial}{\partial x}$ erfüllt, der „*d nach d x*" gelesen wird. Ein solcher *Operator* wirkt nur nach rechts, dass heißt alle *Größen* die links vom *Operator* unangetastet stehen bleiben. Somit soll folgende Rechenvorschrift für den *Operator* gelten, um den veranschaulichten Forderungen im vorherigen *Koordinatensystem* gerecht zu werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= 1 \qquad \text{siehe Funktionenbeispiel} \\ \frac{d}{dx}1 &= 0 \qquad \text{im Koordinatensystem} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Somit würde das *Kommutativgesetz*, welches für normale Zahlen, *Parameter* und *Variablen* gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 0 \\ &a \cdot b - b \cdot a = 0 = [a, b] \qquad , \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$ der sogenannte *Kommutator* ist, sich wie folgt verändern:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \qquad . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch *Äquivalenzumformung* der Gleichung (6.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} &= 1 \qquad \Big| + x\frac{d}{dx} \\ {\color{red}\frac{d}{dx}x} &= {\color{green}1 + x\frac{d}{dx}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dieser Ausdruck ist von zentraler Bedeutung, der es durch ein triviales *Einsetzungsverfahren* ermöglicht den *Operator* an einer *Variable* vorbei zu ziehen. Sei zum Beispiel die *Steigung* der *Funktion* $g(x) = x^2$ gesucht, dann lässt sich dies mit Hilfe der Gleichung (6.4) bestimmen, indem *Terme* der Form $\frac{d}{dx}x$ durch den Ausdruck $\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^2 &= {\color{red}\frac{d}{dx}x} \cdot x \\ &= {\color{green}\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)}x \\ &= x + x{\color{red}\frac{d}{dx}x} \\ &= x + x{\color{green}\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)} \\ &= x + x + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{6.5}$$

Ähnlich verhält sich das Prozedere mit der *Funktion* $h(x) = x^3$, wobei lediglich die Anzahl der Schritt zunimmt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^3 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \cdot x \\
&= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\frac{d}{dx}x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\frac{d}{dx} \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\
&= x^2 + x^2 + x^2 + x^3 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\
&= 3x^2
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Dies kann für x^4 und höhere *Potenzen* von x auch bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der Schritte nur weiter erhöhen würde. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse ist eine Regel für die *Ableitung* von *Polynomen* erkennbar, sodass die Prozedur des wiederholten Einsetzens überflüssig wird.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}1 &= 0 \\
\frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} = 1 \\
\frac{d}{dx}x^2 &= 2x + x^2\frac{d}{dx} = 2x \\
\frac{d}{dx}x^3 &= 3x^2 + x^3\frac{d}{dx} = 3x^2 \\
\frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3 + x^4\frac{d}{dx} = 4x^3 \\
\frac{d}{dx}x^5 &= 5x^4 + x^5\frac{d}{dx} = 5x^4
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Gleichung (6.7) zeigt deutlich, dass sich die Potenz bei der Anwendung vom *Differentialoperator* um eins verringert und als *Vorfaktor* wieder zu finden ist. Somit ergibt sich folgende allgemeine Regel für die Anwendung des *Differentialoperators* - es wird auch vom „*Ableiten*“ gesprochen - auf ein *Polynom*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Als verkürzende Schreibweise soll von nun an gelten:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \qquad . \tag{6.9}$$

Dabei bedeutet der Strich bei $f'(x)$, dass es sich um die *Ableitung* der *Funktion* $f(x)$ handelt und dass der wirkende *Differentialoperator* nach x (also $\frac{d}{dx}$) gewirkt hat. So gilt zum Beispiel ebenso:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dy}f(y) = f'(y) \qquad \text{Funktion von } y \text{ deswegen Differentialoperator nach } y \\
&\frac{d}{dz}f(z) = f'(z) \qquad \text{Funktion von } z \text{ deswegen Differentialoperator nach } z \\
&\frac{d}{dt}f(t) = \dot{x}(t) \qquad \text{Funktion von } t \text{ deswegen Differentialoperator nach } t,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

wobei letztes ein Spezialfall der Physik ist, da nach der Zeit t *abgeleitet* wurde. Generell werden in der Physik immer die *Ableitungen* nach der Zeit mit einem *Punkt* über der *Funktion* beschrieben.

6.2 Ableitungsregeln

Die erste *Ableitungsregel* wurde schon in Gleichung (6.8) beschrieben und gilt für jede Art von *Polynomen*.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \tag{6.11}$$

Diese *Ableitungsregel* ist besonders nützlich im Zusammenhang mit den *Potenzgesetzen*, denn so lassen sich bestimme *Funktionen* über einer *Variable* als *Basis* mit einer Zahl im *Exponenten darstellen*. Mit Hilfe dieser *Ableitungsregel* besteht die Möglichkeit wesentlich komplexere, also zusammengesetzte, *Funktionen abzuleiten*. Dazu sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt unter der Verwendung der Regeln für die Klammersetzung:

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}f(x) \tag{6.12}$$

Sei nun $f(x) = g(x)h(x)$ und zum Beispiel mit $g(x) = x^n$ und $h(x) = x^m$, dann gilt unter Berücksichtigung der *Potenzgesetze* und Gleichung (6.11) und der verkürzten Schreibweise aus Gleichung (6.9):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) &= \frac{d}{dx}x^n x^m = \frac{d}{dx}x^{n+m} = (n+m)x^{n+m-1} \\
&= \frac{d}{dx}x^n x^m = \left(nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\right)x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\frac{d}{dx}x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\left(mx^{m-1} + x^m\frac{d}{dx}\right) \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n mx^{m-1} \\
&= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\
&= nx^{n-1+m} + mx^{n+m-1} = (n+m)x^{n+m-1}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Wie Gleichung (6.13) zeigt, kann diese Aufgabe schnell über die *Potenzgesetze* in einer Zeile gelöst werden. Dieses Ergebnis soll als Vergleich dienen, um die *Ableitungsregel* für *Polynome* auf die zusammengesetzte *Funktion* $f(x)$ anzuwenden. Dabei wird erneut wie schon beim Herleiten der *Ableitungsregel* für *Polynome* das *Einsetzungsverfahren* verwendet. In der vorletzten Zeile dieser Rechnung ist zu erkennen, dass

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \ , \tag{6.14}$$

gilt. Diese *Ableitungsregel* aus Gleichung (6.14) wird *Leibnizregel* oder *Produktregel* genannt. Ihr Nutzen wird sich offenbaren wenn nicht nur *Polynome* zur Diskussion stehen.

Mit der *Leibnizregel* und der *Substitution*, soll nun noch eine weitere *Ableitungsregel* bestimmt werden. Dabei soll gelten, dass die *Funktion* $f(x)$ eine verkettete *Funktion* sein soll: $f(x) = g(x) \circ h(x) = g\left(h(x)\right)$ mit dem Beispiel, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$ sei - mit den *Ableitungen* $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 2$. Wie die Verkettung fordert, wir $h(x)$ in die *Funktion* $g(x)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Ableitung mit der Überprüfung des Ergebnisses durch die *Ableitungsregel* der *Polynome* sowie den *Binomischen Formeln*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(2x+1\right)^2 = \frac{d}{dx}4x^2 + 4x + 1 = 8x + 4 \\
&= \frac{d}{dx}\left(2x+1\right)\left(2x+1\right) \quad \text{Leibnizregel} \\
&= \left(2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(2x+1\right) + \left(2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(2x+1\right) \\
&= \left(2x+1\right)2 + \left(2x+1\right)2 \\
&= 2 \cdot 2\left(2x+1\right) \quad \text{Vergleich mit } g'(x),\ h'(x) \text{ und } h(x) \\
&= h'(x) \cdot g'\left(h(x)\right) = 8x + 4
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Die letzte Zeile offenbart durch den Vergleich der *Terme* mit den *Funktionen* $g(x)$ und $h(x)$ sowie ihren *Ableitungen* $g'(x)$ und $h'(x)$ die allgemeine Regel der *Ableitung* von verketteten *Funktionen*.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) = h'(x) \cdot g'\left(h(x)\right) \tag{6.16}$$

Diese Regel wird *Kettenregel* genannt und wird ihre Bedeutung erst offenbaren, wenn *Funktionen* angenommen werden, deren abgekürzte Schreibweise ihre Herkunft aus *Polynomen* nicht mehr offensichtlich zeigen.
Mittels der *Substitution* $y := h(x)$ würde das *Polynom* in der Klammer ersetzt werden. Allerdings muss auch der *Ableitungsoperator* $\frac{d}{dx}$ nach $\frac{d}{dy}$ umgewandelt werden. Dies geschieht wie folgt (Hier sollte erwähnt werden, dass es sich lediglich um eine Nebenrechnung handelt, um die *Substitution* zu durchführen zu können. Die gezeigten Schritte der Rechnung sehen intuitiv aus, sind allerdings nicht ohne weitere Prüfungen und tiefer liegende Mathematik durchführbar.):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} &= h'(x) \qquad |\cdot dx \\
dy &= dx \cdot h'(x) \qquad |: h'(x) \\
\Rightarrow dx &= \frac{dy}{h'(x)} \qquad \text{eingesetzt in: } \frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} &= h'(x)\frac{d}{dy}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

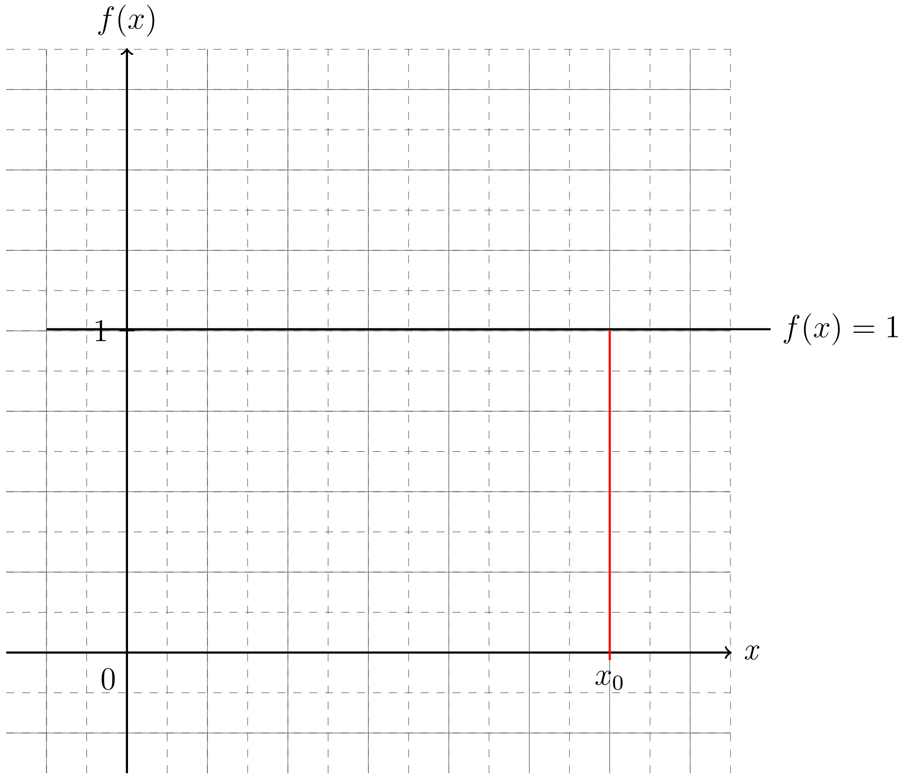
Der gefundene Ausdruck für $\frac{d}{dx}$ wird nun mit eingesetzt, wenn die *Substitution* durchgeführt wird.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} g\left(h(x)\right) \qquad \text{mit: } y := h(x) \text{ und: } \frac{d}{dx} = h'(x)\frac{d}{dy} \\ &= h'(x)\frac{d}{dy} g(y) \\ &= h'(x) g'(y) \qquad \text{mit: } y = h(x) \text{ zurück eingesetzt} \\ &= h'(x) g'\left(h(x)\right) \end{aligned} \tag{6.18}$$

Gleichung (6.17) und (6.18) zeigen eine Herleitung der *Kettenregel* ohne Spezifizierung der *Funktionen*, sodass festgehalten werden kann, dass jede *differenzierbare verkettete Funktion* über diese Regel *ableitbar* ist.

6.3 Integration

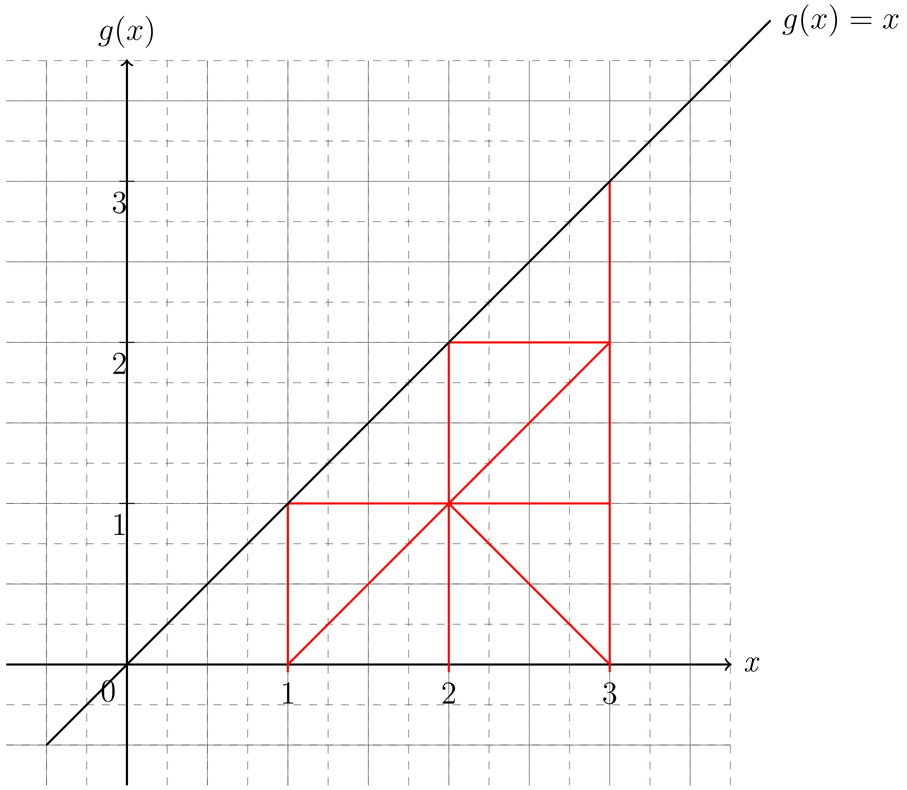
Nachdem die *Differentiation* zur Bestimmung der *Steigung* einer *Funktion* eingeführt wurde, soll nun eine weitere Eigenschaft der *Funktion* untersucht werden. Sei eine *Funktion* $f(x) = 1$ gegeben. Nun soll der *Flächeninhalt* bestimmt werden, der von der *x-Achse* und *Funktion* $f(x)$ eingeschlossen wird, von $x = 0$ bis $x = x_0$ bestimmt werden.



Der *Flächeninhalt* als *Funktion* $F(x)$ wäre gegeben als:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \cdot x \qquad \text{mit: } f(x) = 1 \\ F(x) &= x \qquad \text{mit: } x = x_0 \\ \Rightarrow F(x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $F(x)$ wäre wieder die *Funktion* $f(x)$. Als weiteres Beispiel soll die *Funktion* $g(x) = x$ gegeben sein und erneut soll der *Flächeninhalt* als *Funktion* von x, also $G(x)$, bestimmt werden.



Der *Flächeninhalt* unterhalb der *Funktion* $g(x)$ bildet ein *Dreieck*. Somit ist die *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ gegeben als:

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{g(x) \cdot x}{2} \qquad \text{mit: } g(x) = x \\
G(x) &= \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ wäre $\frac{1}{2}2x = x = g(x)$. Somit wäre erneut die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ die *Ausgangsfunktion* $g(x)$. Aus dieser Erkenntnis kann wieder aus der sprachlichen Forderung „Bestimme den *Flächeninhalt* unter der *Funktion* $f(x)$ der durch die *Grenzen* $x = a$ bis $x = b$ und *x-Achse* begrenzt ist!“ einen mathematischen Formalismus entstehen lassen:

$$
F(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{6.21}
$$

Diese *Operation* wird *Integration* genannt. Dabei wird Gleichung (6.21) gelesen als „Die *Stammfunktion* $F(x)$ ist gleich das *Integral* über die *Funktion* $f(x)$ nach x in den *Grenzen* von a bis b“.

6.4 Integrationsregeln

Nachdem der Formalismus eingeführt wurde, soll ein allgemeines *Polynom* x^n untersucht werden. Dazu wird die *Ableitung* von x^n gebildet und über *Äquivalenzumformung* und mit *Potenzgesetzen* die Gleichung umgestellt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \qquad \text{substituiere: } m = n-1 \Rightarrow n = m+1 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}x^{m+1} &= (m+1)x^m \qquad |: (m+1) \\ \frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1} &= x^m \qquad |\cdot dx \\ \frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1}dx &= x^m dx \qquad \Big|\int \\ \Rightarrow \int x^m dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Die letzte Zeile der Gleichung (6.22) zeigt die hergeleitete Regel für die *Integration* von *Polynomen*. Nachdem das generelle *Integrationsgesetz* für *Polynome* gefunden wurde, die *Produktregel* als Ausgangspunkt für die Herleitung einer weiteren *Integrationsregel* dienen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad |\cdot dx \\ \frac{d}{dx}f(x)g(x)dx &= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx \qquad \Big|\int \\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \Big| - \int f(x)g'(x)dx \\ \Rightarrow \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \end{aligned} \tag{6.23}$$

Diese *Integrationsregel* wird *„partielle Integration“* genannt. Sie wird dazu verwendet *Funktionsprodukte* zu *integrieren* bei dem eine *Teilfunktion* $f(x)$ leicht zu *integrieren* ist, während die andere *Teilfunktion* $g(x)$ eine *Funktion* ist die eine unbekannte *Stammfunktion* besitzt, deren *Ableitung* allerdings bekannt ist. Generell wird diese *Integrationsregel* dazu verwendet, um das *Produkt* eines *Polynoms* mit einer anderen *Funktion* zu *integrieren*. Dabei bildet in der Regel das *Polynom* die *Funktion* $g(x)$, sodass dieses nach mehrfacher Anwendung der *partiellen Integration* und dem *Einsetzungsverfahren* dieses *Polynom* restlos verschwindet und die *Funktion* $f(x)$ alleinstehend unter dem *Integral* vorzufinden.

Abschließend soll die *Kettenregel* in eine Regel der *Integration* überführt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(g(x)) &= g'(x)f'(g(x)) \qquad |dx \\ \frac{d}{dx}f(g(x))\,dx &= g'(x)f'(g(x))\,dx \qquad \Big|\int \\ f(g(x)) &= \int g'(x)f'(g(x))\,dx \end{aligned} \tag{6.24}$$

Durch *Substitution* lässt sich dieses *Integral* lösen, hierbei wird $y := g(x)$ gewählt:

$$\begin{aligned} &\int g'(x)f'(g(x))\,dx \qquad \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ &= \int f'(y)\,dy = f(y) \qquad \text{zurück eingesetzt: } g(x) = y \\ &= f(g(x)) \end{aligned} \tag{6.25}$$

Aus den Gleichungen (6.24) und (6.25) ist erkennbar, dass die *Kettenregel* der *Ableitung* überführt in die *Integration* durch *Substitution* bearbeitet werden kann. Aus diesem Grund wird diese Regel „*Integration* durch *Substitution*“ genannt.

Mit *Grenzen* würde sich bei der *Integration* durch *Substitution* die *Grenzen* mit verändern:

$$\begin{aligned} &\int_a^b g'(x) f'\left(g(x)\right) dx \qquad \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right) dy \end{aligned} \tag{6.26}$$

Dabei wird die obere *Grenze* und die unteren *Grenze* eingesetzt in die *Stammfunktion* und anschließend von einander *subtrahiert*. Für diesen Prozess gibt es zwei verschiedene Schreibweisen. Die erste Schreibweise umklammert den *Term*, in den einzusetzen ist, während die zweite Schreibweise einen senkrechten Strich vorsieht und aussagt, dass für alle *Variablen* links vom Strich eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right) dy &= \left[f(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= f(y)\big|_{x=g(a)}^{x=g(b)} \\ &= f\left(g(b)\right) - f\left(g(a)\right) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Da nun alle Regeln für die *Integration* und der *Differentiation* bekannt sind, werden im folgenden Abschnitt beide Methoden dazu verwendet um spezielle Gleichungen zu lösen - die sogenannten *Differentialgleichungen*.

6.5 Partielle und totale Differentiation

6.6 Kurvendiskussion

6.7 Taylorentwicklung

6.8 Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.9 Differentialgleichungen 2. Ordnung

6.10 Distributionen

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Zufallsexperimente

7.2 Permutationen

8 Komplexe Zahlen

9 Vektoren

9.1 Eigenschaften von Vektoren

9.2 Spatprodukt

9.3 Matrizen und Tensoren

9.4 Vektoranalysis

10 Fehlerrechnung

10.1 Standardabweichungen

10.2 Lineare Regression

10.3 Fehlerfortpflanzung

11 Physikalische Anwendungen

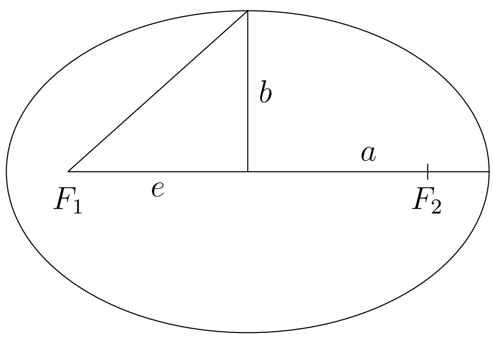
11.1 Lagrange Formalismus

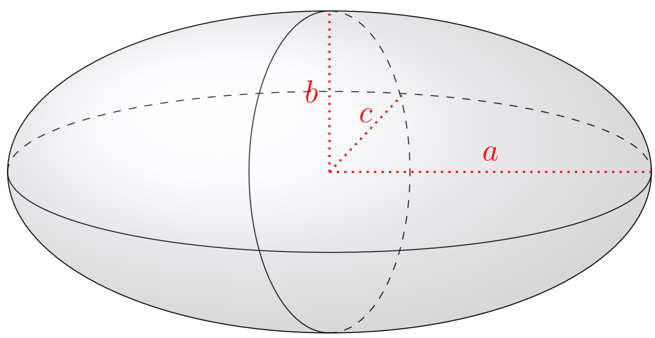
11.1.1 Euler-Lagrange Gleichungen

11.1.2 Noether Theorem

11.2 Fourier-Reihe

11.3 Ellipse und Ellipsoid





12 Ökonomische Anwendungen

13 Anhang

13.1 Alphabete

$A\ \alpha$	Alpha	$I\ \iota$	Jota	$P\ \rho$	Rho
$B\ \beta$	Beta	$K\ \kappa$	Kappa	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	Sigma
$\Gamma\ \gamma$	Gamma	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$T\ \tau$	Tau
$\Delta\ \delta$	Delta	$M\ \mu$	My	$\Upsilon\ \upsilon$	Ypsilon
$E\ \epsilon$	Epsilon	$N\ \nu$	Ny	$\Phi\ \phi\ \varphi$	Phi
$Z\ \zeta$	Zeta	$\Xi\ \xi$	Xi	$X\ \chi$	Chi
$H\ \eta$	Eta	$O\ o$	Omikron	$\Psi\ \psi$	Psi
$\Theta\ \theta$	Theta	$\Pi\ \pi$	Pi	$\Omega\ \omega$	Omega

Zurück zum Text durch folgenden Link: (3.5).

13.2 Pascal'sches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Zurück zum Text durch folgenden Link: (2.7.3).

13.3 10er Potenzen

Symbol	Name	10er Potenz	Ausgeschrieben	Sprachlich
Y	Yotta	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliade
E	Exa	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	10^{15}	1.000.000.000.000.000	Billarde
T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	10^{9}	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	10^{6}	1.000.000	Million
k	Kilo	10^{3}	1.000	Tausend
h	Hekto	10^{2}	100	Hundert
da	Deka	10^{1}	10	Zehn
		10^{0}	1	Eins
d	dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	centi	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
μ	mirko	10^{-6}	0,000.001	Millionstel
n	nano	10^{-9}	0,000.000.001	Milliardstel
p	piko	10^{-12}	0,000.000.000.001	Billionstel
f	femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	zepto	10^{-21}	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	yokto	10^{-24}	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel

13.4 Mathematische Begriffe auf Englisch

Symbol	Deutsch	Englisch
Σ	Summe	sum
Π	Produkt	product
$+$	addierten	add
$-$	Subtrahieren	subtract
$\cdot$	Multiplizieren	multiply
$:$	Dividieren	divide
$\frac{a}{b}$	Bruch	fraction
$\sum_{n=k}^{k=l} c_n x_n^{b_n}$	Reihe	serie
	Dreieck	triangle
	Kreis	circle
	Rechteck	rectangle
	Fläche	area
	Umfang	perimeter
	Volumen	volume
	Oberfläche	surface

13.5 Lösungen

13.5.1 Lösungen zu Mengen

Aufgabe 1:
$a)\ 4 \in \mathbb{N}$ $b)\ -1 \in \mathbb{Z}$ $c)\ 9 \in \mathbb{N}$ $d)\ 0,45 \in \mathbb{Q}$
$e)\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ $f)\ -6 \in \mathbb{Z}$ $g)\ 4,75 \in \mathbb{Q}$ $h)\ 0,\bar{3} \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$ $j)\ -\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ $k)\ 3 \in \mathbb{N}$ $l)\ 0,125 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 0,01 \in \mathbb{Q}$ $n)\ \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$ $o)\ 3,141 \in \mathbb{Q}$ $p)\ -0,75 \in \mathbb{Q}$

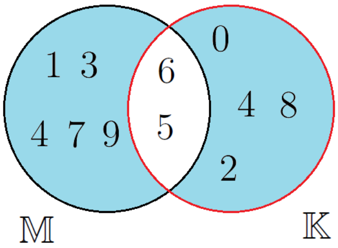
Aufgabe 2:
$a)\ 0,\bar{6} \in \mathbb{Q}$ $b)\ -\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$ $c)\ 0 \in \mathbb{N}$ $d)\ \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$ $f)\ \sqrt{13} \in \mathbb{R}$ $g)\ \frac{2}{\sqrt{16}} \in \mathbb{Q}$ $h)\ 1\% \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$ $j)\ -42 \in \mathbb{Z}$ $k)\ \sqrt{144} \in \mathbb{N}$ $l)\ \frac{16}{2} \in \mathbb{N}$
$m)\ 5,01 \in \mathbb{Q}$ $n)\ 17 \in \mathbb{N}$ $o)\ 1,1\bar{6} \in \mathbb{Q}$ $p)\ -\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3:
$a)\ \lg 10 \in \mathbb{N}$ $b)\ \sqrt{9} \in \mathbb{N}$ $c)\ -7 \in \mathbb{Z}$ $d)\ \pi \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{e^2}{2} \in \mathbb{R}$ $f)\ -\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ $g)\ 1 \in \mathbb{N}$ $h)\ 0,597813553 \in \mathbb{Q}$
$i)\ \ln 2 \in \mathbb{R}$ $j)\ -e^{\ln \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$ $k)\ \log_3 9 \in \mathbb{N}$ $l)\ 0,1 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 28\% \in \mathbb{Q}$ $n)\ \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ $o)\ \sqrt{17} \in \mathbb{R}$ $p)\ -\frac{1}{\ln e} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4:
$a)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,5,9\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{3,4,8\}$;
$b)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7\} = \mathbb{M}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{1,2,3,5,7\} = \mathbb{K}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{6\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{\} = \varnothing$;
$c)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{\} = \varnothing$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \mathbb{K}$;
$d)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{2,8\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{1,4,7\}$;
$e)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{2,3,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{2,5,8\}$;
$f)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,5,6,7,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,5,7\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{4,6\}$

Aufgabe 5:
$a)\ (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} = \varnothing;$
$b)\ (\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \mathbb{M};$
$c)\ (\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
$d)\ (\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) = \{3,4,6,9\};$
$e)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) = \{5,7\};$
$f)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
$g)\ (\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L}\Delta\mathbb{K} = \{3,5,6,7,8\};$
$h)\ \mathbb{M}\Delta\mathbb{K} = \{1,2,4,8,9\};$

Aufgabe 6:
$\mathbb{M}\Delta\mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$;



Aufgabe 7:
$a)\ \mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \varnothing$; $b)\ \mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $c)\ \mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (1.0.1).

13.5.2 Lösungen zu Grundrechenarten

Aufgabe 1:
$a)\ 3821 + 1347 = 5168$ $b)\ 5962 + 8912 = 14874$
$c)\ 2512 + 3246 = 5758$ $d)\ 2353 + 4636 = 6989$
$e)\ 4462 + 9543 = 14005$ $f)\ 4156 + 3737 = 7883$
$g)\ 9948 + 5499 = 15447$ $h)\ 4784 + 8377 = 13161$
$i)\ 9745 + 3726 = 13471$ $j)\ 3269 + 9289 = 12459$

Aufgabe 2:
$a)\ 3821 - 1347 = 2474$ $b)\ 5962 - 1912 = 4050$
$c)\ 4512 - 3246 = 1266$ $d)\ 9353 - 4636 = 4717$
$e)\ 4462 - 2543 = 1919$ $f)\ 4156 - 3737 = 419$
$g)\ 9948 - 5499 = 4449$ $h)\ 4784 - 3377 = 1407$
$i)\ 9745 - 3726 = 6019$ $j)\ 7269 - 3289 = 3980$

Aufgabe 3:
$a)\ 3821 \cdot 1347 = 5146887$ $b)\ 5962 \cdot 1912 = 11399344$
$c)\ 4512 \cdot 3246 = 14645952$ $d)\ 9353 \cdot 4636 = 43360508$
$e)\ 4462 \cdot 2543 = 11346866$ $f)\ 4156 \cdot 3737 = 15530972$
$g)\ 9948 \cdot 5499 = 54704052$ $h)\ 4784 \cdot 3377 = 16155568$
$i)\ 9745 \cdot 3726 = 36309870$ $j)\ 7269 \cdot 3289 = 23907741$

Aufgabe 4:
$a)\ 7095 : 3 = 2365$ $b)\ 2568 : 6 = 856$

c) $4512 : 2 = 2256$ *d*) $5033 : 7 = 719$
e) $7389 : 9 = 821$ *f*) $9475 : 5 = 1895$
g) $9872 : 8 = 1234$ *h*) $6024 : 8 = 753$
i) $9416 : 4 = 2354$ *j*) $7273 : 7 = 1039$

Aufgabe 5:
a) $3821 + 1347 \cdot 43 = 61742$
b) $4525 - 2070 : 6 = 4180$
c) $8124 + 1347 - 4371 = 5100$
d) $7124 - 2070 + 1392 = 6446$
e) $4284 : 2 + 1347 \cdot 43 = 60063$
f) $8285 : 5 - 5256 : 8 = 1000$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (2.1.1) Lösungen zu Grundrechenarten.

13.5.3 Lösungen zur Bruchrechnung

Aufgabe 1:
a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ *b*) $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ *c*) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ *e*) $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$ *f*) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ *h*) $\frac{2}{5} < \frac{7}{15}$ *i*) $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$ *k*) $\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$ *l*) $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$ *n*) $\frac{5}{9} > \frac{3}{7}$ *o*) $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$ *q*) $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ *r*) $\frac{14}{8} < \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} = \frac{24}{64}$ *t*) $\frac{81}{9} = \frac{36}{4}$ *u*) $\frac{55}{5} = \frac{131}{11}$

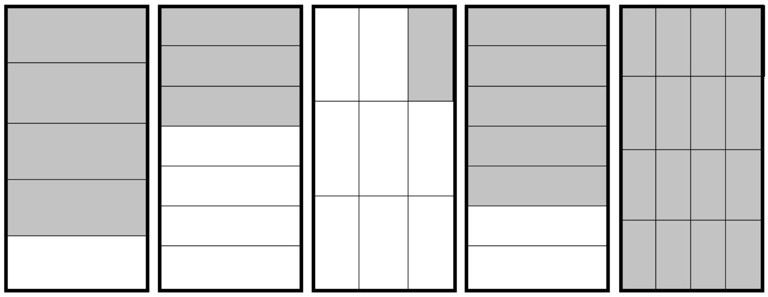
Aufgabe 2:
a) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ *b*) $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ *c*) $\frac{9}{15} = \frac{1}{2}$
d) $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ *e*) $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$ *f*) $\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$
g) $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$ *h*) $\frac{30}{75} = \frac{6}{15}$ *i*) $\frac{72}{108} = \frac{2}{3}$
j) $\frac{16}{48} = \frac{1}{3}$ *k*) $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ *l*) $\frac{24}{8} = 3$
m) $\frac{12}{96} = \frac{1}{8}$ *n*) $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ *o*) $\frac{48}{144} = \frac{1}{3}$
p) $\frac{33}{3} = 11$ *q*) $\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$ *r*) $\frac{5000}{10000} = \frac{1}{2}$
s) $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ *t*) $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$ *u*) $\frac{63}{108} = \frac{7}{12}$

Aufgabe 3:
a) $\frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{36}$ *b*) $\frac{5}{7} \cdot 7 = \frac{35}{49}$ *c*) $\frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{96}$
d) $\frac{1}{2} \cdot 24 = \frac{24}{48}$ *e*) $\frac{7}{8} \cdot 6 = \frac{42}{48}$ *f*) $\frac{4}{6} \cdot 11 = \frac{44}{66}$
g) $\frac{5}{7} \cdot 8 = \frac{40}{56}$ *h*) $\frac{5}{13} \cdot 9 = \frac{45}{113}$ *i*) $\frac{4}{11} = \frac{28}{77} \cdot 7$
j) $\frac{7}{4} \cdot 9 = \frac{63}{36}$ *k*) $\frac{6}{11} \cdot 5 = \frac{30}{55}$ *l*) $\frac{3}{12} \cdot 4 = \frac{12}{48}$
m) $\frac{2}{3} \cdot 21 = \frac{42}{63}$ *n*) $\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{21}{24}$ *o*) $\frac{4}{6} \cdot 13 = \frac{52}{78}$

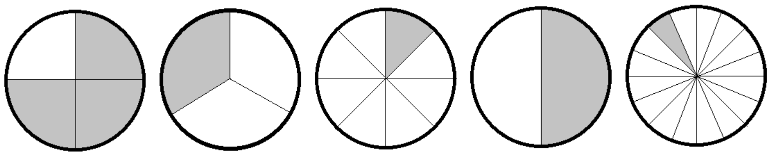
$p)\ \frac{3}{9}\cdot 8=\frac{24}{72}$ $q)\ \frac{5}{12}\cdot 6=\frac{30}{72}$ $r)\ \frac{7}{12}\cdot 7=\frac{49}{84}$
$s)\ \frac{3}{4}\cdot 17=\frac{51}{68}$ $t)\ \frac{5}{6}\cdot 4=\frac{20}{24}$ $u)\ \frac{13}{6}\cdot 1000=\frac{13000}{6000}$

Aufgabe 4: Quadrate: $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.
Kreise: $\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{5}{16},1,\frac{2}{3},\frac{13}{16},0,\frac{5}{8},\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{16}$.

Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 7:
$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $b)\ \frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$
$d)\ \frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ $e)\ \frac{5}{16}+\frac{3}{8}=\frac{11}{16}$ $f)\ \frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$
$g)\ \frac{1}{4}+\frac{3}{32}=\frac{11}{32}$ $h)\ \frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$ $i)\ \frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Aufgabe 8:
$a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $b)\ \frac{3}{7}-\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$ $c)\ \frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$
$d)\ \frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ $e)\ \frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$ $f)\ \frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$
$g)\ \frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}$ $h)\ \frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$ $i)\ \frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Aufgabe 9:
$a)\ \frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$ $b)\ \frac{13}{7}-\frac{15}{14}=\frac{11}{14}$ $c)\ \frac{9}{5}+\frac{13}{10}=\frac{32}{10}$
$d)\ \frac{21}{2}-\frac{31}{8}=\frac{53}{8}$ $e)\ \frac{9}{8}+\frac{19}{16}=\frac{37}{16}$ $f)\ \frac{5}{3}-\frac{11}{9}=\frac{4}{9}$
$g)\ \frac{7}{4}+\frac{67}{32}=\frac{123}{32}$ $h)\ \frac{13}{5}-\frac{25}{15}=\frac{14}{15}$ $i)\ \frac{13}{3}+\frac{11}{6}=$
$j)\ \frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$ $k)\ \frac{13}{4}-\frac{9}{6}=\frac{7}{4}$ $l)\ \frac{9}{5}+\frac{3}{4}=\frac{51}{20}$
$m)\ \frac{21}{4}-\frac{11}{8}=\frac{31}{8}$ $n)\ \frac{3}{8}+\frac{9}{32}=\frac{21}{32}$ $o)\ \frac{4}{3}-\frac{10}{9}=\frac{2}{9}$
$p)\ \frac{7}{8}-\frac{11}{32}=\frac{17}{32}$ $q)\ \frac{13}{5}-2=\frac{3}{5}$ $r)\ 14+\frac{11}{6}=\frac{95}{6}$
$s)\ \frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$ $t)\ \frac{15}{6}-\frac{7}{3}=\frac{1}{6}$ $u)\ \frac{9}{5}-\frac{3}{4}=\frac{21}{20}$
$v)\ \frac{23}{4}+\frac{17}{8}=\frac{63}{8}$ $w)\ \frac{7}{9}-\frac{11}{18}=\frac{5}{9}$ $x)\ \frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=\frac{99}{1000}$

y) $\frac{5}{20} - \frac{1}{1000} = \frac{249}{1000}$ *z*) $\frac{13}{15} + 6 = \frac{103}{15}$

Aufgabe 10:
a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ *b*) $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{98}$ *c*) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{50}$
d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ *e*) $\frac{5}{16} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{128}$ *f*) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$
g) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{32} = \frac{3}{128}$ *h*) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{75}$ *i*) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

Aufgabe 11:
a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ *b*) $\frac{3}{7} : \frac{1}{14} = 6$ *c*) $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3}$ *e*) $\frac{3}{8} : \frac{5}{16} = \frac{6}{5}$ *f*) $\frac{1}{3} : \frac{2}{9} = \frac{3}{2}$
g) $\frac{1}{4} : \frac{3}{32} = \frac{8}{3}$ *h*) $\frac{2}{5} : \frac{2}{15} = 3$ *i*) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4$

Aufgabe 12:
a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ *b*) $\frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} = \frac{195}{98}$ *c*) $\frac{9}{5} : \frac{13}{10} = \frac{18}{13}$
d) $\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} = \frac{651}{16}$ *e*) $\frac{9}{8} : \frac{19}{16} = \frac{18}{19}$ *f*) $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} = \frac{55}{27}$
g) $\frac{7}{4} : \frac{67}{32} = \frac{56}{67}$ *h*) $\frac{13}{5} : \frac{25}{15} = \frac{39}{25}$ *i*) $\frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{26}{11}$
j) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$ *k*) $\frac{13}{4} : \frac{9}{6} = \frac{39}{18}$ *l*) $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{36}{15}$
m) $\frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} = \frac{231}{32}$ *n*) $\frac{3}{8} : \frac{9}{32} = \frac{4}{3}$ *o*) $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27}$
p) $\frac{7}{8} : \frac{11}{32} = \frac{28}{11}$ *q*) $\frac{13}{5} : 2 = \frac{13}{10}$ *r*) $14 \cdot \frac{11}{6} = \frac{77}{3}$
s) $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{128}$ *t*) $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$ *u*) $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{36}{15}$
v) $\frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} = \frac{391}{32}$ *w*) $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} = \frac{77}{162}$ *x*) $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} = 100$
y) $\frac{5}{20} : \frac{1}{1000} = 250$ *z*) $\frac{13}{15} \cdot 6 = \frac{26}{5}$
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.2.1).

13.5.4 Lösungen zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1:
a) $\frac{1}{2} = 0,5$ *b*) $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$ *c*) $\frac{1}{5} = 0,2$
d) $\frac{1}{8} = 0,125$ *e*) $\frac{1}{4} = 0,25$ *f*) $\frac{1}{16} = 0,0625$
g) $\frac{3}{4} = 0,75$ *h*) $\frac{4}{5} = 0,8$ *i*) $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$
j) $\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$ *k*) $\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$ *l*) $\frac{19}{5} = 3,8$
m) $\frac{5}{9} = 0,\bar{5}$ *n*) $\frac{11}{6} = 1,8\bar{3}$ *o*) $\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$
p) $\frac{43}{5} = 8,6$ *q*) $\frac{55}{2} = 27,5$ *r*) $\frac{17}{8} = 2,125$
s) $\frac{67}{7} = 9,\overline{571428}$ *t*) $\frac{81}{3} = 27$ *u*) $\frac{55}{7} = 7,\overline{857142}$
v) $\frac{1}{10} = 0,1$ *w*) $\frac{1}{100} = 0,01$ *x*) $\frac{1}{1000} = 0,001$

Aufgabe 2:
a) $4 \cdot 0,1 = 0,4$ *b*) $1 + 0,75 = 1,75$ *c*) $9 \cdot 1,001 = 9,009$
d) $2,125 - 1 = 1,125$ *e*) $6,\bar{6} + 3,\bar{3} = 10$ *f*) $1 + 0,0004 = 1,0004$
g) $3,003 : 3 = 1,001$ *h*) $100 \cdot 1,001 = 100,1$ *i*) $1000 \cdot 0,001 = 1$

$j)$ $5,\bar{5} : 5 = 1,\bar{1}$ $k)$ $5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} = 0,8\bar{3}$ $l)$ $14 + 0,\bar{7} = 14,\bar{7}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.3.1).

13.5.5 Lösungen zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: $a = 3,\ b = 2,\ c = 4$
$a)$ $a + b - c = 3 + 2 - 4 = 1$
$b)$ $3a - 4b + c = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 4 = 5$
$c)$ $ab - bc = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2$
$d)$ $ab - ba = 0$
$e)$ $4ab + 2cc - 3bc = 32$
$f)$ $4\frac{a}{b} + \frac{c}{a} = \frac{22}{3}$
$g)$ $2ab + 2ac + 2bc = 52$
$h)$ $a + d = 27$ mit: $d = abc$
$i)$ $ad = -6$ mit: $d = ab - cb$
$j)$ $\frac{a}{bd} = \frac{1}{24}$ mit: $d = 4aa$
$k)$ $\frac{d}{a} - \frac{b}{d} = bc - \frac{1}{ac} = \frac{95}{12}$ mit: $d = abc$
$l)$ $\frac{1}{d} = a = 3$ mit: $d = \frac{1}{a}$
$m)$ $a + b\frac{d}{c} = a + b\frac{2ac-c}{bc} = a + 2a - 1 = 8$ mit: $d = \frac{2ac-c}{b}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.4.1).

Lösung zur Prozentrechnung

Aufgabe 1:
$a)$ $0,01 = 1\%$ $b)$ $100 = 10000\%$ $c)$ $0,5 = 50\%$
$d)$ $0,125 = 12,5\%$ $e)$ $0,0024 = 0,24\%$ $f)$ $289 = 2,89\%$
$g)$ $0,9315 = 93,15\%$ $h)$ $0,0341 = 3,41\%$ $i)$ $0,891 = 89,1\%$

Aufgabe 2:
$a)$ $1\% = 0,01$ $b)$ $100\% = 1$ $c)$ $54\% = 0,54$
$d)$ $1626\% = 16,26$ $e)$ $2,374\% = 0,02374$ $f)$ $2,01\% = 0,0201$
$g)$ $99\% = 0,99$ $h)$ $5\% = 0,05$ $i)$ $81,063\% = 0,81063$

Aufgabe 3:
$a)$ $\frac{1}{4} = 25\%$ $b)$ $\frac{1}{3} \approx 33,3\%$ $c)$ $\frac{5}{6} \approx 83,3\%$
$d)$ $\frac{9}{14} \approx 64,3\%$ $e)$ $\frac{8}{25} = 32\%$ $f)$ $\frac{1}{8} = 12,5\%$
$g)$ $\frac{7}{9} \approx 77,7\%$ $h)$ $\frac{9}{4} = 225\%$ $i)$ $\frac{43}{83} \approx 51,8\%$

Aufgabe 4:

$a)$ $700 \cdot 1\% = 7$ $b)$ $45 \cdot 100\% = 45$ $c)$ $200 \cdot 4\% = 8$
$d)$ $80 \cdot 25\% = 20$ $e)$ $1500 \cdot 2\% = 30$ $f)$ $50000 \cdot 3\% = 1500$
$g)$ $9000 \cdot 99\% = 8910$ $h)$ $3141 \cdot 0,1\% = 3,141$ $i)$ $120 \cdot 5\% = 6$

Aufgabe 5:

$a)$ 4% von 1000€ sind: $4\% \cdot 1000€ = 40€$
$b)$ 2% von 5550€ sind: $2\% \cdot 5550€ = 111€$
$c)$ 10% von 862434€ sind: $10\% \cdot 862434€ = 86243,4€$
$d)$ 19% von 299€ sind: $19\% \cdot 299€ = 56,81€$
$e)$ 12% von 1200€ sind: $12\% \cdot 1200€ = 144€$
$f)$ 11% von 65300€ sind: $11\% \cdot 65300€ = 7183€$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.5.1).

13.5.6 Lösungen zur Klammersetzung

Aufgabe 1:

$a)$ $\frac{1}{2}(9+7) = 8$ $b)$ $\frac{25+65}{10} = 9$
$c)$ $4(3+2) - 2(1+3) = 12$ $d)$ $\frac{16+48}{2} = 32$

Aufgabe 2:

$a)$ $4(a+b) = 4a + 4b$ $b)$ $c(a-5b) = ac - 5bc$
$c)$ $\frac{2}{5}(9a-5) = \frac{18a}{5} - 10$ $d)$ $(a+b)(a+b) = aa + 2ab + bb$
$e)$ $\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b} - \frac{5c}{d}\right) = \frac{2a}{5b} - \frac{2c}{d}$ $f)$ $(a-b)(a-b) = aa - 2ab + bb$
$g)$ $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ $h)$ $(a-b)(a+b) = aa - bb$
$i)$ $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $j)$ $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) = a + 2ab + bb$

Aufgabe 3:

$a)$ $9a + 9b = 9(a+b)$ $b)$ $2a + 6 - 8b = 2(a + 3 - 4b)$
$c)$ $ab - acd + aa = a(b - cd + a)$ $d)$ $2ab + 4ab + 8ab = 2ab(1+2+4)$
$e)$ $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} = \frac{5}{bc}(a+5)$ $f)$ $abcdefghijkl - bcdefghijk = bcdefghijk(al - 1)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.6.4).

13.5.7 Lösungen zur Potenzen

Aufgabe 1:

$a)\ 2^3 = 8 \quad b)\ 3^4 = 81 \quad c)\ 2^6 = 64$

$d)\ 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad e)\ 10^3 = 1000 \quad f)\ 8^3 = 512$

$g)\ 4^{-3} = \frac{1}{64} \quad h)\ 10^{-6} = \frac{1}{1000000} \quad i)\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$j)\ \left(5^3\right)^2 = 3125 \quad k)\ 4^{\left(3^2\right)} = 4096 \quad l)\ 2^6 \cdot 2^2 = 256$

$m)\ \left(2^3 + 2^3\right)^3 = 4096 \quad n)\ \left(10^2\right)^{-1} = \frac{1}{100} \quad o)\ \left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} = 64$

$p)\ \left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 100 \quad q)\ \left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} = 3,141 \quad r)\ \left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 = 125$

Aufgabe 2:

$a)\ \sqrt{16} = 4 \quad b)\ \sqrt{81} = 9 \quad c)\ \sqrt[3]{8} = 2$

$d)\ \sqrt[3]{27} = 3 \quad e)\ \sqrt{144} = 12 \quad f)\ \sqrt[5]{100000} = 10$

$g)\ \sqrt{289} = 17 \quad h)\ \sqrt[4]{81} = 3 \quad i)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} = 2$

Aufgabe 3:

$a)\ 1m^2 = 10^4 cm^2 \quad b)\ 2,718km = 2,718 \cdot 10^6 mm \quad c)\ 1mm^3 = 10^6 dm^3$

$d)\ 3m^3 = 3 \cdot 10^3 dm^3 \quad e)\ 0,5cm^2 = 5 \cdot 10^{-5} m^2 \quad f)\ 13,3cm^3 = 133 \cdot 10^{-7} m^3$

$g)\ 10^3 km^2 = 10^9 dm^2 \quad h)\ 1,234dm = 123,4mm \quad i)\ \frac{15}{4}\mu m^2 = \frac{15}{4} \cdot 10^6 mm^2$

$j)\ \frac{1}{3}Mm^3 = \frac{1}{3} \cdot 10^9 km^3 \quad k)\ 0,01km^2 = 10^8 cm^2 \quad l)\ 125mm^5 = 125 \cdot 10^{-5} cm^5$

$m)\ 6,\bar{6}m^4 = 6,\bar{6} \cdot 10^8 cm^4 \quad n)\ 0,025km^7 = 0,025 \cdot 10^{42} mm^7$

$o)\ 3,141Tm^2 = 3,141 \cdot 10^{36} nm^2$

Aufgabe 4:

$a)\ (a+4)^2 = a^2 + 8a + 16 \quad b)\ \left(a - \sqrt{2}\right)^2 = a^2 - 2\sqrt{2}a + 2$

$c)\ \left(\sqrt{2}a + 2\right)^4 = 4a^4 + 16\sqrt{2}a^3 + 48a^2 + 32\sqrt{2}a + 16$

$d)\ \left(3a + \frac{2}{3}\right)^3 = 27a^3 + 18a^2 + 4a + \frac{8}{27}$

$e)\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$f)\ (a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.7.4).

13.5.8 Lösungen zu Logarithmen

Aufgabe 1:

$a)\ \log_2 16 = 4 \quad b)\ \lg 1000 = 3 \quad c)\ \log_8 64 = 2$

$d)\ \mathrm{lb}\ 512 = 9 \quad e)\ \ln e^9 = 9 \quad f)\ \log_5 125 = 3$

$g)\ \log_{25} 125 = \frac{3}{2} \quad h)\ \lg 11 \cdot 10^6 = 6 + \lg 11 \approx 7,04139 \quad i)\ \log_{17} 1 = 0$

$j)$ $\log_3 81 = 4$ $k)$ $\log_4 64 = 3$ $l)$ $\log_{15} 225 = 2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.8.1).

13.5.9 Lösungen zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1:

$a)$ $3 \cdot x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ $b)$ $2 \cdot x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$
$c)$ $9 \cdot x + 55 = 0 \Rightarrow x = -\frac{55}{9}$ $d)$ $5 \cdot x - 25 = 0 \Rightarrow x = 5$
$e)$ $3 \cdot x + 9 = 6 \Rightarrow x = -1$ $f)$ $x - 66 = 9 \Rightarrow x = 75$
$g)$ $4 \cdot x + 4 = 11 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$ $h)$ $9 \cdot x - 5 = 4 \Rightarrow x = 1$
$i)$ $32 \cdot x + 3 = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$ $j)$ $1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23 \Rightarrow x = \frac{47}{22}$
$k)$ $7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x \Rightarrow x = -\frac{7}{5}$ $l)$ $98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10 \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$

Aufgabe 2:

$a)$ $-16x^2 + 64 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $b)$ $\sqrt{2x - 6} - 144 = 0 \Rightarrow x = 9$
$c)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{289}$ $d)$ $\ln 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{e^2}{5}$
$e)$ $\ln \frac{13}{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = e^{-\sqrt{2} + \ln 13}$ $f)$ $\frac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}$
$g)$ $\left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 7$ $h)$ $e^{2x-6} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(6 + \ln 2) = 3 + \ln\sqrt{2}$

Aufgabe 3:

$a)$ $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1$
$b)$ $4x^2 - 16x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 4$
$c)$ $3x^2 + 24x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{17}$
$d)$ $5x^2 - 20x = 50 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{14}$
$e)$ $2x^2 - 20x = 6 - 10x \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$
$f)$ $7x = 8 - 3x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{145}}{6}$
$g)$ $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$
$h)$ $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.9.2).

13.5.10 Lösungen zur Substitution

Aufgabe 1:

$a)$ $(x^2 + x + 1)^3 = 8$ mit: $y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y^3 = 8$
$b)$ $(a + 4x)^{\frac{1}{2}} = 6b - c$ mit: $y^2 = 4x + a \Rightarrow \sqrt{y^2} = 6b - c$
$c)$ $(18x - 4ab)^2 = c$ mit: $\sqrt{y} = 18x - 4ab \Rightarrow \sqrt{y}^2 = c$
$d)$ $d)$ $2^{2a-c} = 32$ mit: $b = 2a - c \Rightarrow 2^b = 32$

e) $x = 4a$ mit: $y = x + 4a \Rightarrow y + 4a = 4a$
f) $x^2 + 8x + 16 = 0$ mit: $(y+4)^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow (y+4)^2 = 0$
g) $(3a + 2x)(2x - 3a) = 0$ mit: $y = 2x + 3a \Rightarrow y^2 - 6ya = 0$
h) $\ln(x^2 + 4x) = 2$ mit: $y = x^2 + 4x \Rightarrow \ln y = 2$

Aufgabe 2:
a) $x^3 + 4x^2 - x - 8 = 0 \Rightarrow y - 8 = 0$ mit: $y = x^3 + 4x^2 - x$
b) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{y} = 0$ mit: $y = \frac{x}{2}$
c) $\frac{x^2}{ab} + \frac{5}{ab} - 3 = 0 \Rightarrow dx^2 + 5d - 3 = 0$ mit : $d = \frac{1}{ab}$
d) $\frac{ax^2+bx-c}{5} = 0 \Rightarrow \frac{y}{5a} = 0$ mit: $y = a(ax^2 + bx - c)$
e) $ax + bx + cx + xd + xe - f = 0 \Rightarrow gx - f = 0$ mit: $g = a + b + c + d + e$
f) $x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{4} + 2\right)^2 = 0$ mit: $y = 4x - 8$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.10.1).

Lösungen zu Fakultäten

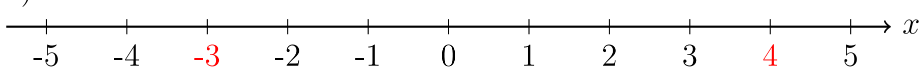
Aufgabe 1:
a) $5! = 120$ *b)* $3! = 6$ *c)* $\frac{7!}{5!} = 120$
d) $\frac{3!}{4!} \cdot 0! = \frac{1}{4}$ *e)* $\frac{(4b)!}{b!} = 24$ *f)* $4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$

Aufgabe 1:
a) $\binom{2}{1} = 2$ *b)* $\binom{8}{4} = 70$ *c)* $\binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0} = 10$
d) $\binom{7}{2} = 21$ *e)* $\binom{3}{1} = 3$ *f)* $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$

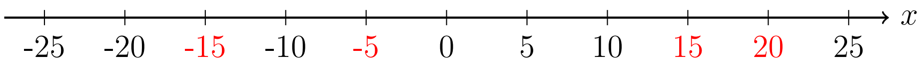
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.11.1).

13.5.11 Lösungen zum Zahlenstrahl

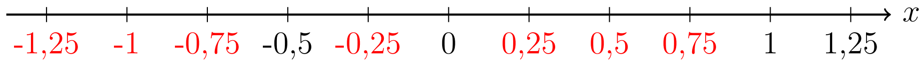
Aufgabe 1:
a)



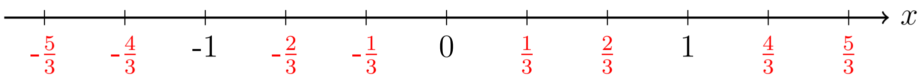
b)



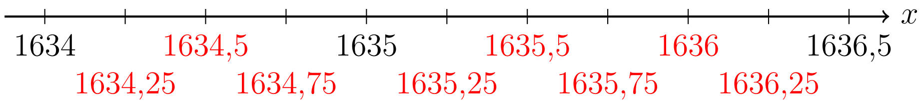
c)



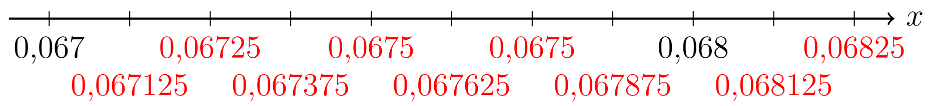
d)



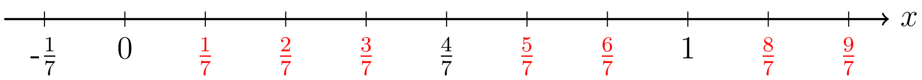
e)



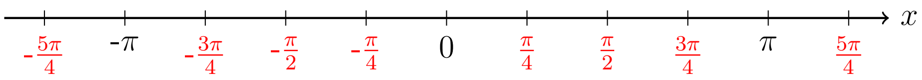
f)



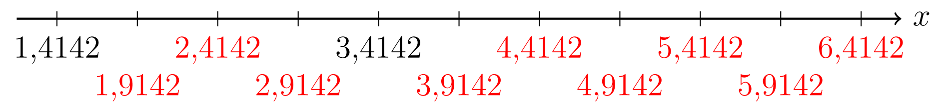
g)



h)



i)



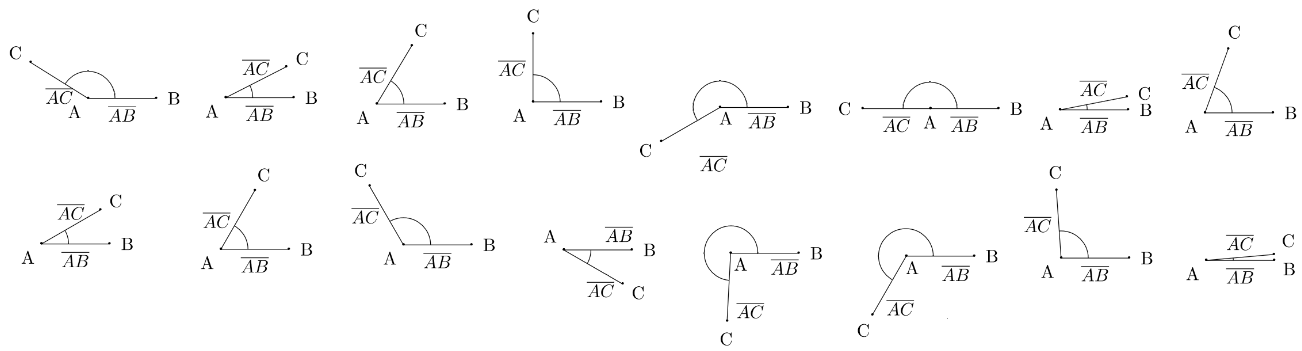
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.1.1).

13.5.12 Lösungen zu Winkeln

Aufgabe 1:
$\measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) =$

57°: spitzer Winkel
133°: stumpfer Winkel
14°: überspitzer Winkel
214°: überstumpfer Winkel
75°: spitzer Winkel
300°: überstumpfer Winkel
117°: stumpfer Winkel
91°: stumpfer Winkel
270°: überstumpfer Winkel
179°: stumpfer Winkel
8°: überspitzer Winkel
45°: spitzer Winkel

Aufgabe 2:



Aufgabe 3:
$a \parallel b$, $c \nparallel, d$ $e \parallel, f$
$g \nparallel h$, $i \parallel, j$ $k \parallel, l$
Zusätzliche Parallelitäten: $a \parallel c$, $b \parallel c$

Aufgabe 4:
$a \not\perp b$, $c \not\perp d$, $e \perp f$, $g \not\perp h$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.2.1).

13.5.13 Lösungen zu Rechtecken

Aufgabe 1:
a) $A = 18cm^2$ und $U = 18cm$
b) $A = 14cm^2$ und $U = 18cm$
c) $A = 108cm^2$ und $U = 42cm$
d) $A = 68cm^2$ und $U = 42cm$
e) $A = 81cm^2$ und $U = 60cm$
f) $A = 90cm^2$ und $U = 123cm$
g) $A = 1cm^2$ und $U = 5cm$

Aufgabe 2:
a) $A = 1,8dm^2$ und $U = 7,2dm$
b) $A = 4500mm^2$ und $U = 280mm$
c) $A = 180600cm^2$ und $U = 1700cm$
d) $A = 0,4cm^2$ und $U = 4,4cm$
e) $A = 0,3dm^2$ und $U = \frac{2431}{45}dm \approx 54,022dm$
f) $A = 9000m^2$ und $U = 18250m$
g) $A = 1200\sqrt{111}cm^2 \approx 12642,785cm^2$ und $U = 20\sqrt{111}cm + 240cm \approx 450,713cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.4.1).

13.5.14 Lösungen zu Dreiecken

Aufgabe 1:
a) $g = 9cm$, $a = 4cm$ und $h_g = 3cm$: $p = \sqrt{7}cm$, $q = 9cm - \sqrt{7}cm$, $b \approx 6,51cm \Rightarrow A = 13,5cm^2$, $U \approx 19,51cm$
b) $g = 11cm$, $a = 5cm$ und $h_g = 2cm$: $p = \sqrt{21}cm$, $q = 11cm - \sqrt{21}cm$, $b \approx 6,72cm$ $\Rightarrow A = 11cm^2$, $U \approx 22,72cm$
c) $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $h_c = 2cm$: $p = \sqrt{32}cm$, $q = \sqrt{45}cm$, $c = p + q \Rightarrow A \approx 12,37cm^2$, $U \approx 22,37$
d) $g = 7cm$, $b = 6cm$ und $h_g = 1cm$: $p = \sqrt{35}cm$, $q = 7cm - \sqrt{35}cm$, $a \approx 1,48cm$ $\Rightarrow A = 3,5cm^2$, $U \approx 14,48cm$
e) $p = 2,5cm$, $q = 2cm$ mit einem rechten Winkel: $c = 4,5cm$, $h_c = \sqrt{5}$, $a \approx 3,35cm$, $b = 3cm$ $\Rightarrow A \approx 5,03cm^2$, $U \approx 10,85cm$
f) $c = 12cm$, $q = 3cm$ und $a = 5cm$: $h_c = 4cm$, $p = 9cm$, $b \approx 9,85cm \Rightarrow A = 24cm^2$, $U \approx 26,85cm$

Aufgabe 2:
Da das Geodreieck mit einem 45° Winkel zum Boden gehalten wird, ist der Abstand zum Turm gleich die Resthöhe des Turms, da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt. Die Höhe, in der das Geodreieck gehalten wird, muss anschließend noch dazu addiert werden: $h = 21,5m$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.5.1).

13.5.15 Lösungen zu Vierecken

Aufgabe 1:
a) Quadrat: $a = 2cm$: $\Rightarrow A = 4cm^2$, $U = 8cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm$: $\Rightarrow A = 20cm^2$, $U = 20cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm$, $b = 3cm$ und $h_a = 2cm$: $\Rightarrow A = 12cm^2$, $U = 18cm$
d) Trapez: $a = 4cm$, $c = 11cm$, $d = b$ und $h = 4cm$: $b \approx 5,32$, $\Rightarrow A = 30cm^2$, $U \approx 25,64cm$
e) Drachen: $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $e = 6cm$: $d \approx 7,84cm \Rightarrow A \approx 47,04cm^2$, $U = 20cm$

Aufgabe 1:
a) $A = 8cm^2 + 18cm^2 + 20cm^2 = 46cm^2$, $U = 2 \cdot 2cm + 4cm + 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{45} \approx 28,63cm$
b) $A = 2 \cdot 9cm^2 + 2 \cdot 10cm^2 + 36cm^2 = 74cm^2$, $U = 2 \cdot 4cm + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{18} \approx 33,92cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.7.1).

13.5.16 Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1:
a) Würfel: $a = 3cm \quad \Rightarrow V = 27cm^3, O = 54cm^2$
b) Quader: $a = 2cm$, $b = 9cm$ und $c = 4cm \quad \Rightarrow V = 72cm^3, O = 122cm^2$
c) Pyramide: $b = a = 4cm$ und $h = 6cm \quad \Rightarrow V = 32cm^3, O = 2\sqrt{52}\cdot 6cm^2 + 16cm^2 \approx 102,53cm^2$
d) Pyramide: $a = 3cm$, $b = 4cm$ und $h = 5cm \quad \Rightarrow V = 20cm^3, O = 5\sqrt{41}cm^2 + 5\sqrt{34}cm^2 + 12cm^2 \approx 73,17cm^2$
e) Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$: $a = 6cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 4cm \quad \Rightarrow V = 80cm^3, O = 6 \cdot 5cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5cm^2 + 4 \cdot \sqrt{41}cm^2 + 4 \cdot \sqrt{52}cm^2 \approx 172,46cm^2$
f) Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf: $a = 2,5cm$, $b = 5cm$ und $c = h = 2,5cm \quad \Rightarrow V \approx 41,67cm^3, O \approx 72,81cm^2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.8.1).

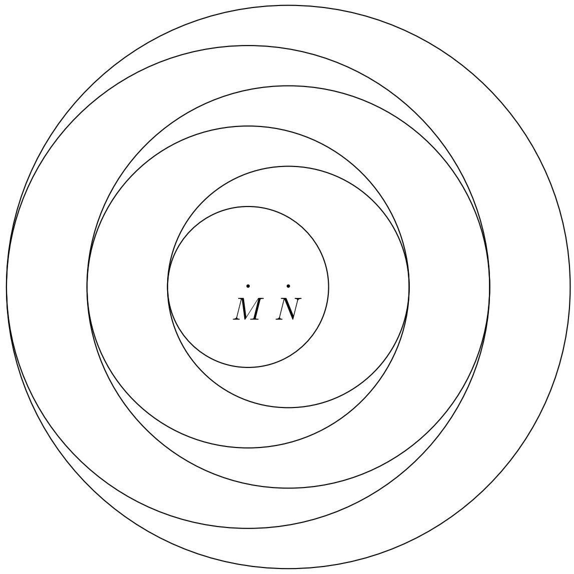
13.5.17 Lösungen zu Kreisen

Aufgabe 1:
a) $r = 3cm, \Rightarrow A \approx 28,27cm^2, U \approx 18,85cm,$
b) $r = \pi cm, \Rightarrow A \approx 31,01cm^2, U \approx 19,74cm,$
c) $d = 4cm, \Rightarrow A \approx 12,57cm^2, U \approx 12,57cm,$
d) $d = 0,5cm, \Rightarrow A \approx 0,20cm^2, U \approx 1,57cm,$
e) $r = 2,718cm, \Rightarrow A \approx 23,21cm^2, U \approx 17,08cm,$
f) $d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow A \approx 2,31cm^2, U \approx 5,39cm,.$

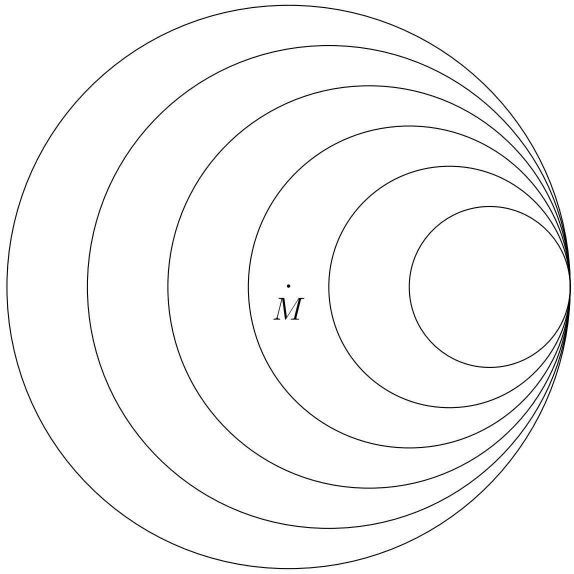
Aufgabe 2:
a) $\alpha = 60°$ und $r = 5cm, \Rightarrow A \approx 13,09cm^2, U \approx 15,24cm,$
b) $\alpha = 230°$ und $r = 2cm, \Rightarrow A \approx 8,03cm^2, U \approx 12,03cm,$
c) $\alpha = 177°$ und $r = \sqrt{17}cm, \Rightarrow A \approx 26,26cm^2, U \approx 20,98cm,$
d) $\alpha = 55°$ und $r = 3cm, \Rightarrow A \approx 4,32cm^2, U \approx 8,88cm,$
e) $\alpha = 145°$ und $r = 7cm, \Rightarrow A \approx 62,00cm^2, U \approx 31,72cm,$
f) $\alpha = 310°$ und $r = 2,5cm, \Rightarrow A \approx 16,91cm^2, U \approx 18,53cm.$

Aufgabe 3:
(Alle Größen wurden mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.)

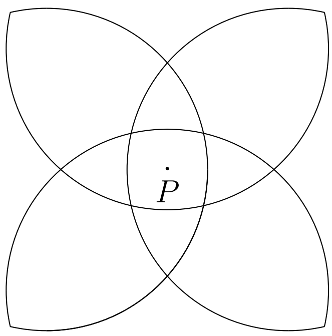
a)



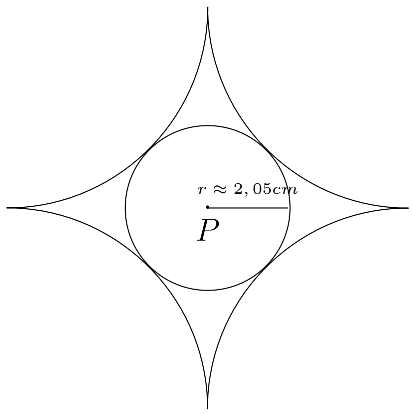
b)



c)

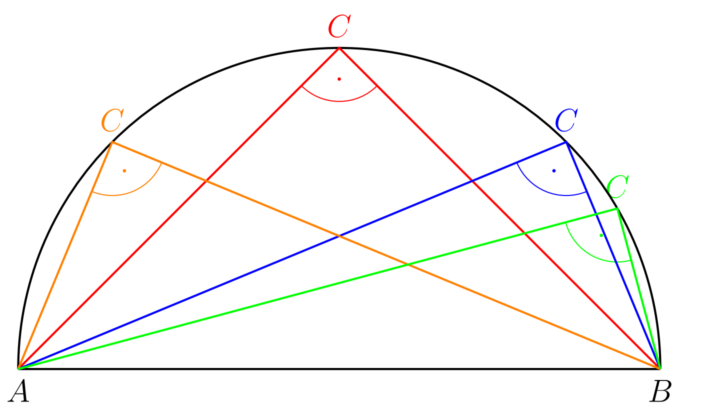


d)



Aufgabe 4:
Der Abstand der Mittelpunkte nimmt nach rechts immer weiter um $0,5cm$ zu, während die Radien der Kreise um $0,5cm$ abnehmen.

Aufgabe 5:



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.9.3).

13.5.18 Lösungen zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1:
a) $r = 5cm$ und $h = 11cm$, $\Rightarrow V \approx 863,94cm^3, O \approx 329,87cm^2$,
b) $r = 47cm$ und $h = 85cm$, $\Rightarrow V \approx 589551,15cm^3, O \approx 26430,22cm^2$,
c) $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm$, $\Rightarrow V \approx 0,59cm^3, O \approx 2,75cm^2$,
d) $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm$, $\Rightarrow V \approx 43,98cm^3, O \approx 60,61cm^2$,
e) $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm$, $\Rightarrow V \approx 38,25cm^3, O \approx 50,60cm^2$,
f) $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm$, $\Rightarrow V \approx 68,02cm^3, O \approx 323,78cm^2$.

Aufgabe 2:
a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm$, $\Rightarrow V \approx 45,24cm^3, s \approx 4,83cm, O \approx 110,91cm^2$,
b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm$, $\Rightarrow V \approx 0,84cm^3, s \approx 1,47cm, O \approx 12,81cm^2$,
c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm$, $\Rightarrow V \approx 220,65cm^3, s \approx 8,22cm, O \approx 334,60cm^2$,
d) $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm$, $\Rightarrow V \approx 8,55cm^3, s \approx 4,25cm, O \approx 25,47cm^2$,
e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm$, $\Rightarrow V \approx 36,65cm^3, s \approx 5,19cm, O \approx 160,10cm^2$,
f) $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm$, $\Rightarrow V \approx 0,15cm^3, s \approx 9,00cm, O \approx 3,58cm^2$.

Aufgabe 3:
a) $r_1 = 4cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm$, $\Rightarrow V \approx 146,61cm^3, s_1 \approx 5,39cm, O \approx 164,34cm^2$,
b) $r_1 = 3,5cm$, $r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm$, $\Rightarrow V \approx 144,78cm^3, s_1 \approx 7,28cm, O \approx 159,91cm^2$,
c) $r_1 = 6cm$, $r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm$, $\Rightarrow V \approx 490,09cm^3, s_1 \approx 9,85cm, O \approx 373,19cm^2$,
d) $r_1 = \frac{1}{3}cm$, $r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm$, $\Rightarrow V \approx 40,32cm^3, s_1 \approx 6,78cm, O \approx 38,55cm^2$,
e) $r_1 = 1cm$, $r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm$, $\Rightarrow V \approx 56,81cm^3, s_1 \approx 4,37cm, O \approx 163,98cm^2$,
f) $r_1 = \pi cm$, $r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm$, $\Rightarrow V \approx 38,20cm^3, s_1 \approx 1,48cm, O \approx 81,39cm^2$.

Aufgabe 4:
Beide Körper haben das gleiche Volumen und die gleiche Oberfläche. $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(h_1 + h_2)r_1^2 - 2\frac{1}{3}\pi h_2 r_2^2 \approx 100,53cm^3, O = \pi r_1^2 + \pi(s_1 + s_2)r_1 \approx 499,85cm^2$. Dabei ist das Volumen des kleines Kegels zweimal vom großen Kegel zu subtrahieren. Die Oberfläche ist dabei identisch zur Oberfläche eines großen Kegels.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.10.1).

13.5.19 Lösungen zu Kugeln

Aufgabe 1:
a) $r = 3cm, \Rightarrow V \approx 113,10cm^3, O \approx 113,10cm^2,$
b) $r = \pi cm, \Rightarrow V \approx 129,88cm^3, O \approx 124,03cm^2,$
c) $d = 4cm, \Rightarrow V \approx 33,51cm^3, O \approx 50,27cm^2,$
d) $d = 0,5cm, \Rightarrow V \approx 0,066cm^3, O \approx 0,785cm^2,$
e) $r = 2,718cm, \Rightarrow V \approx 84,11cm^3, O \approx 92,83cm^2,$
f) $d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow V \approx 2,64cm^3, O \approx 9,23cm^2.$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.11.1).

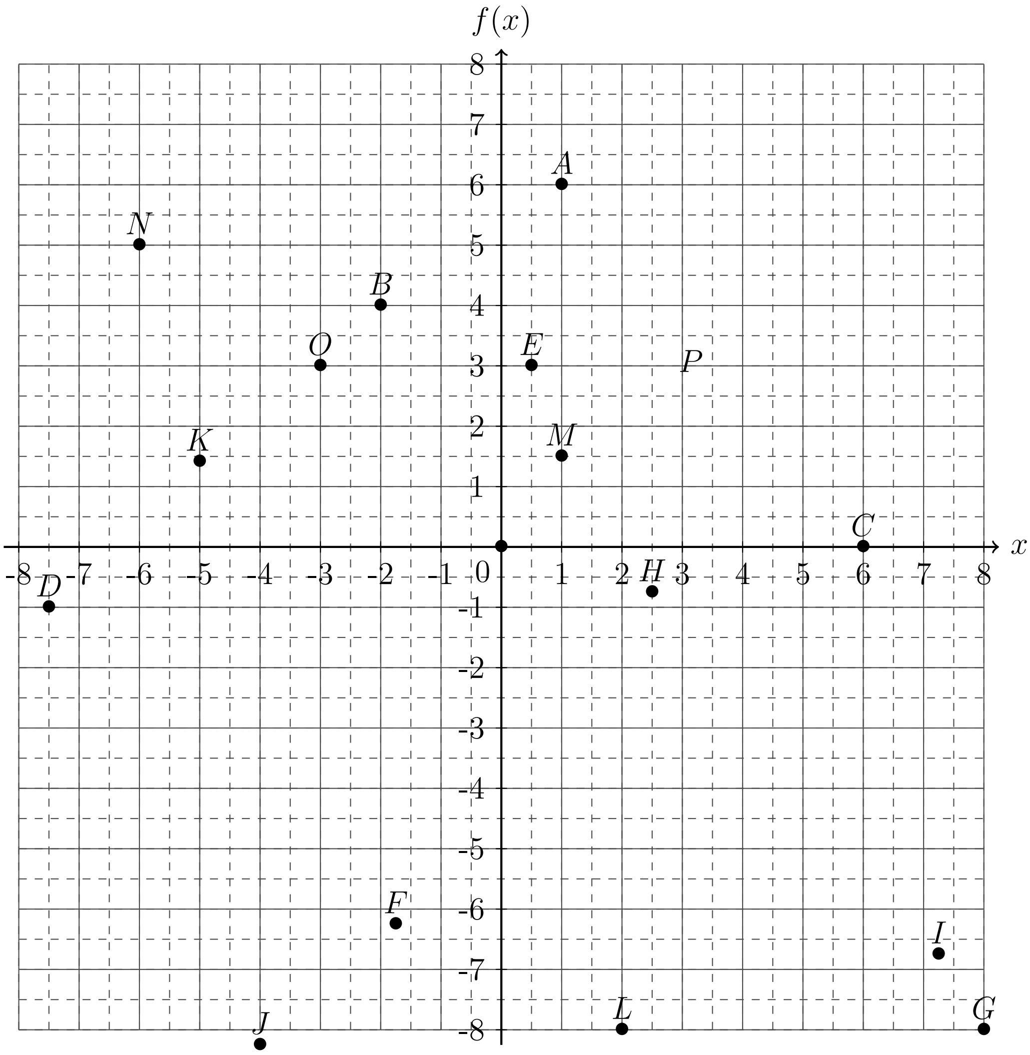
Lösungen zur Trigonometrie

Aufgabe 1:
a) $a = 7cm$ und $c = 11cm$: $\Rightarrow b \approx 8,49cm, \alpha \approx 39,52°, \beta \approx 50,48°$
b) $a = 4cm$ und $b = 6cm$: $\Rightarrow c \approx 7,21cm, \alpha \approx 33,69°, \beta \approx 56,31°$
c) $\alpha = 55°$ und $c = 9cm$: $\Rightarrow a \approx 7,37cm, b \approx 5,16cm, \beta \approx 35°$
d) $a = 5,35cm$ und $\beta = 18°$: $\Rightarrow b \approx 1,74cm, \alpha \approx 72°, c \approx 5,63cm$
e) $b = 14cm$ und $\beta = 81°$: $\Rightarrow c \approx 14,18cm, a \approx 2,22cm, \beta \approx 9°$
f) $a = \pi cm$ und $\alpha = 27,18°$: $\Rightarrow b \approx 6,12cm, c \approx 6,88cm, \beta \approx 62,82°$
g) $c = \sqrt{60}cm$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi$rad: $\Rightarrow b \approx 6,71cm, a \approx 3,87cm, \alpha \approx 30°$
h) $c = \frac{83}{17}cm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi$rad: $\Rightarrow b \approx 2,12cm, a \approx 4,40cm, \beta \approx 64,29°$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.0.1).

13.5.20 Lösungen zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

a)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	7	5	3	2	1	0	-1
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	5,83	3,67	2,6	0,71	-2,44	-3,28	-5,25

b)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-12,49	$\frac{1}{3}$	-3,08	-4,94	3,86	8,76	24,26

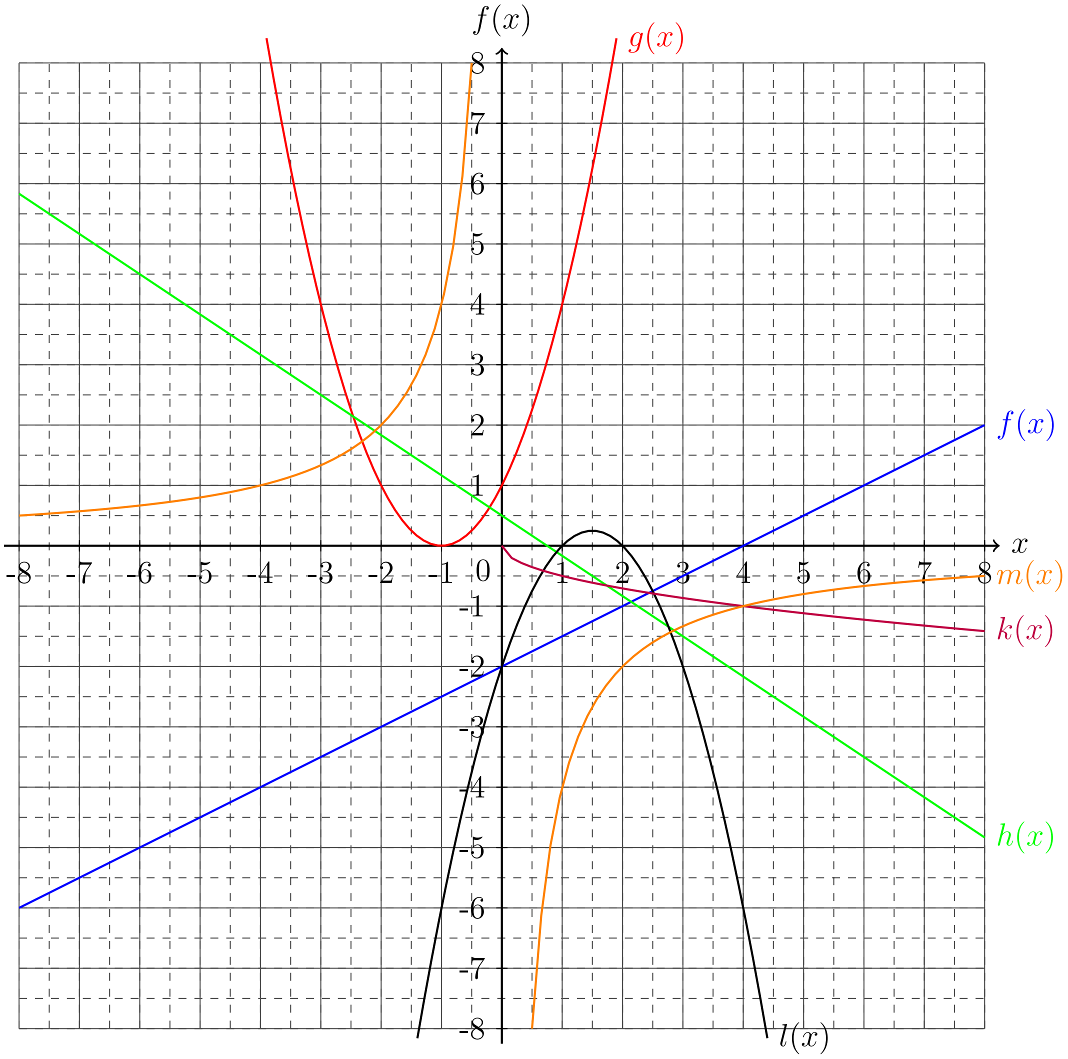
c)

d)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	$\frac{9}{8}$	-1	$\frac{29}{8}$	-6
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,83	1,52	1,85	-1,73	7,47	-6,47	4,09

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	-$\frac{87}{16}$	-6	- $\frac{71}{16}$	3
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	- $\frac{422}{81}$	-5,08	-5,91	34,82	72,67	250

Aufgabe 3:



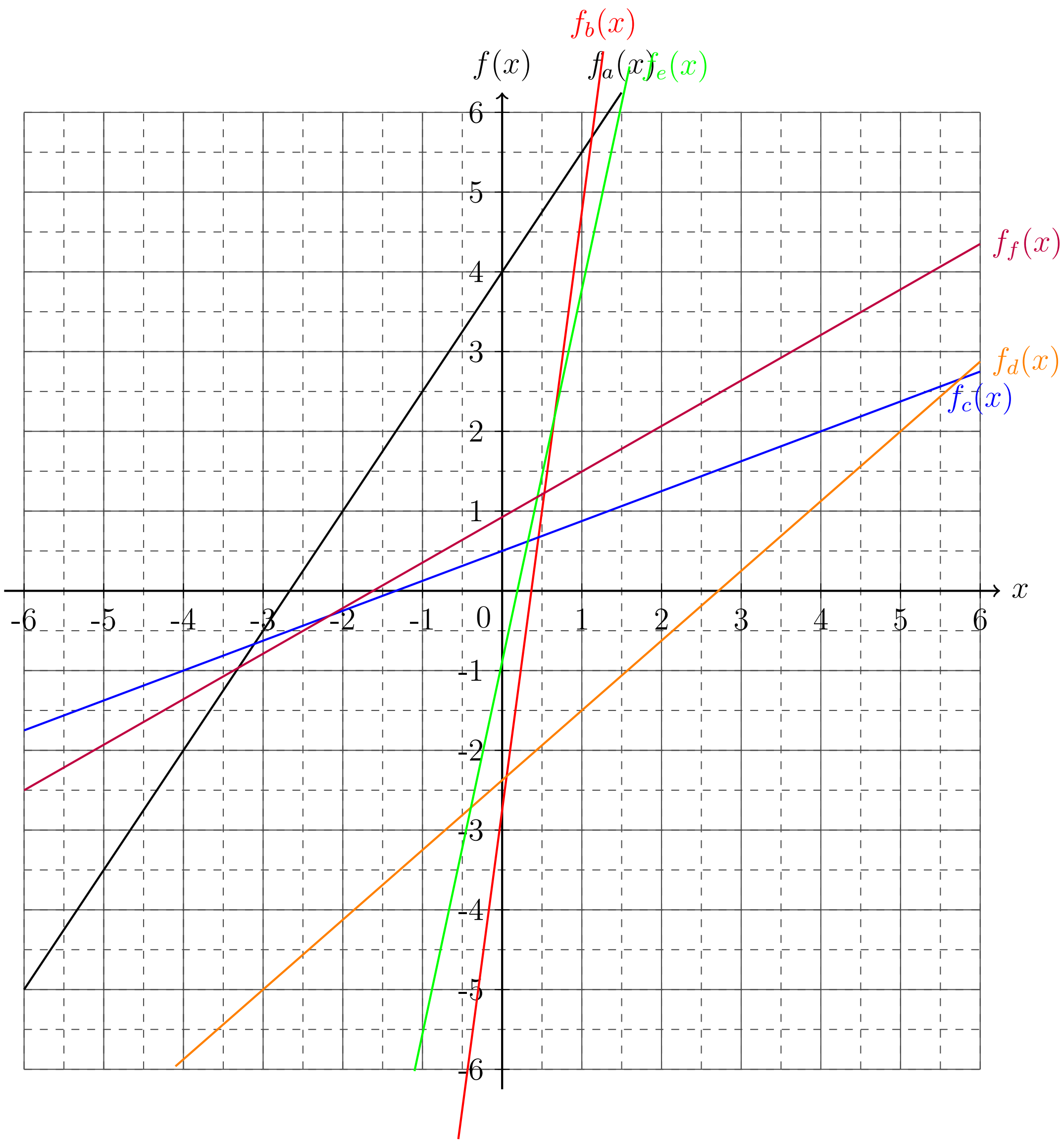
$a)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$
$b)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{g(x) \in \mathbb{R}^+\}$
$c)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{h(x) \in \mathbb{R}\}$
$d)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^+\}, \quad \mathbb{W} = \{k(x) \in \mathbb{R}^-\}$
$e)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \left\{l(x) \in \mathbb{R} | l(x) \leq \frac{1}{4}\right\}$
$f)$ $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \quad \mathbb{W} = \{m(x) \in \mathbb{R}\}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.1.1).

13.5.21 Lösungen zu Geraden

Aufgabe 1:

$a)\ \ f_a(x) = \frac{3}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow x_N = -\frac{8}{3}$
$b)\ \ f_b(x) = \frac{15}{2} \cdot x - \frac{11}{4} \quad \Rightarrow x_N = \frac{11}{30}$
$c)\ \ f_c(x) = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_N = -\frac{4}{3}$
$d)\ \ f_d(x) = \frac{7}{8} \cdot x - \frac{19}{8} \quad \Rightarrow x_N = \frac{19}{7}$
$e)\ \ f_e(x) = \frac{14}{3} \cdot x - \frac{8}{9} \quad \Rightarrow x_N = \frac{4}{21}$
$f)\ \ f_f(x) = \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot x + e - \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot \pi$
$f_f(x) \approx 0,571 \cdot x + 0,925 \quad \Rightarrow x_N = -1,620$



Aufgabe 2:

a) $f_a(x) = \frac{5}{4} \cdot x + 1$
b) $f_b(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$
c) $f_c(x) = -2 \cdot x + \frac{9}{4}$
d) $f_d(x) = 6 \cdot x - 2$
e) $f_e(x) = -\frac{1}{4} \cdot x - 5$
f) $f_f(x) = -x + \frac{1}{3}$

Aufgabe 3:

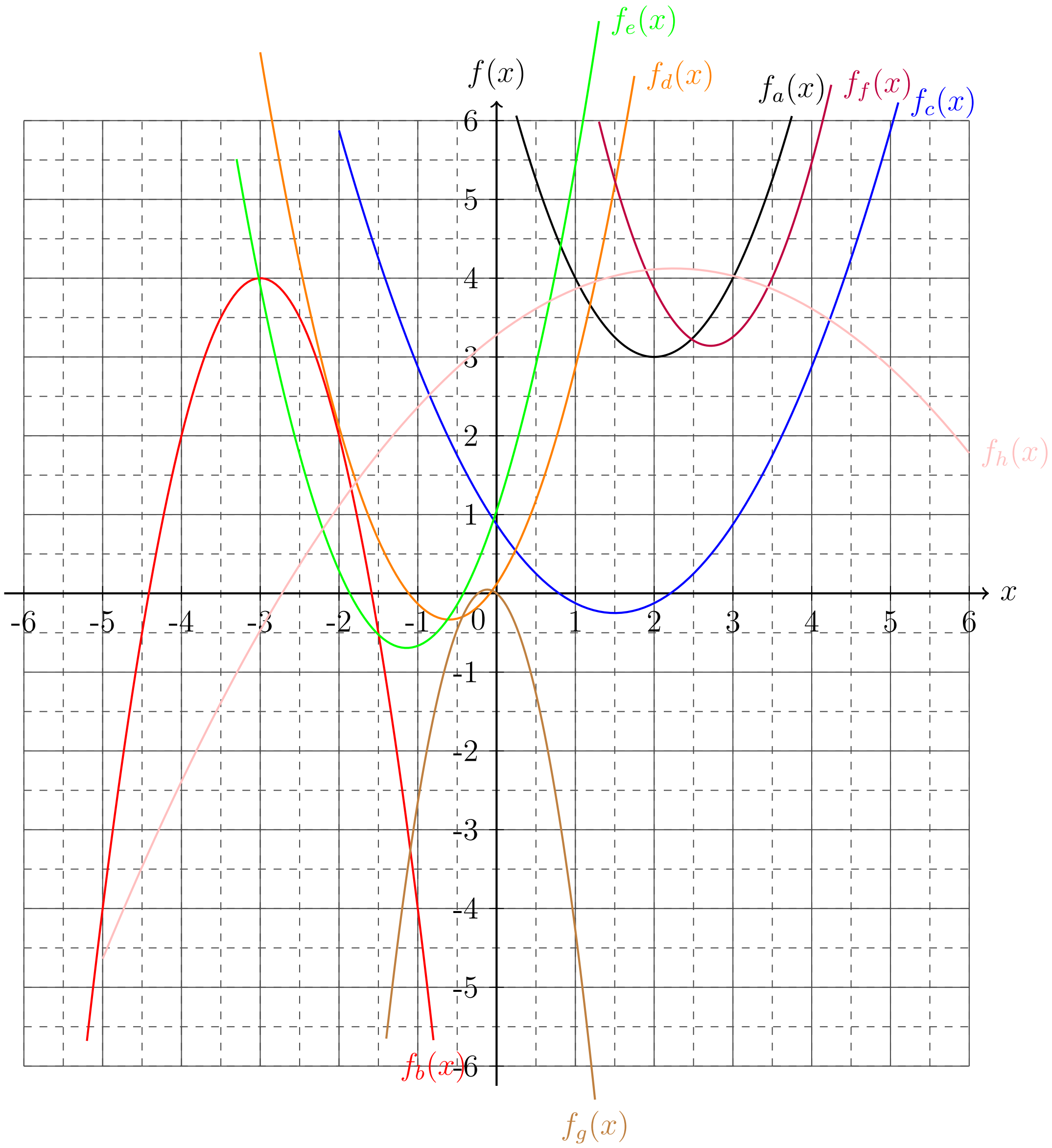
a) $P_x\left(\frac{5}{2}\left|\frac{11}{2}\right.\right)$
b) $P_x\left(\frac{54}{95}\left|-\frac{86}{95}\right.\right)$
c) $P_x\left(\frac{6}{5}\left|-\frac{18}{5}\right.\right)$
d) $P_x(1,99\,|3,64)$
e) $P_x(1,30\,|4,35)$
f) $P_x(2,85\,|-4,03)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.2.1).

13.5.22 Lösungen zu Parabeln

Aufgabe 1:

a) $f_a(x) = (x-2)^2 + 3, \Rightarrow S(2\,|3)$, Nullstellen: keine
b) $f_b(x) = -2(x+3)^2 + 4, \Rightarrow S(-3\,|4)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = -3 \pm \sqrt{2}$
c) $f_c(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}\left|-\frac{1}{4}\right.\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
d) $f_d(x) = \frac{5}{4}\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{3}, \Rightarrow S\left(-\frac{3}{5}\left|-\frac{1}{3}\right.\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm \sqrt{15}}{15}$
e) $f_e(x) = \frac{4}{3}\left(x + \frac{8}{7}\right)^2 - \ln 2, \Rightarrow S\left(-\frac{8}{7}\,|-\ln 2\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{-16 \pm 7\sqrt{3\ln 2}}{14}$
f) $f_f(x) = \sqrt{2}(x-e)^2 + \pi, \Rightarrow S(e\,|\pi)$, Nullstellen: keine
g) $f_g(x) = -\left(x - \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{5}, \Rightarrow S\left(\sqrt{3}\,\middle|-\sqrt{5}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{5}$
h) $f_h(x) = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \sqrt{17}, \Rightarrow S\left(\frac{9}{4}\,\middle|-\sqrt{17}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm 4\sqrt{6}\sqrt[4]{17}}{4}$



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.4.1).

13.5.23 Lösungen zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1:

a) $f^{-1}(x) = x - 6$

b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 3$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 64}$

d) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{41-4x}+3}{2}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x+10}-2}{2}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{12x-1}-1}{3}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.5.1).

13.5.24 Lösungen zu Hyperbeln

Aufgabe 1:
a) $x_N = \frac{1}{2}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
b) $x_N = -8$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
c) $x_N = \frac{5}{3}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$
d) $x_N = -\frac{44}{9}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}\}$
e) $x_N = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}$, $\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}\right\}$
f) $x_N = \frac{e\sqrt{2}-\pi}{e}$, $\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\}\right\}$

Aufgabe 2:
a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$
b) $f^{-1}(x) = \frac{3}{2(3x+1)}$
c) $f^{-1}(x) = \frac{9}{4(x-3)} + \frac{1}{2}$
d) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{4x-16} + 6}$
e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{2}-\frac{7}{16}} + 27}$
f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2}\sqrt{\frac{e}{x-\sqrt{2}} + \pi}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.6.1).

13.5.25 Lösungen zu Grenzwerte

Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x \nearrow 6} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 6} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 4} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \nearrow \frac{2}{5}} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \frac{2}{5}} f(x) = \infty$

d) $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -3} f(x) = \infty$

e) $\lim\limits_{x \nearrow \sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \sqrt{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty$

f) $\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.7.1).

14 Glossar

Im Glossar können die wichtigsten mathematischen Begrifflichkeiten nachgeschlagen werden. Dabei gibt der Pfeil hinter einem Wort an, unter welchem Begriff mehr Informationen zu finden ist. Befindet sich kein Wort hinter dem Pfeil kann direkt das vorangegangene Wort gesucht werden.

Ableitung: Die Ableitung ist eine Funktion $f(x)$ auf die der Differentialoperator gewirkt hat und wird mit $f'(x)$ gekennzeichnet.
Abstand: Der Abstand ist die kürzeste Strecke ($\longrightarrow$) zwischen zwei Punkten ($\longrightarrow$) und ist immer positiv.
Addition: Bei der Addition werden Summanden ($\longrightarrow$) zu einer Summe ($\longrightarrow$) zusammengezählt mit dem Operator + ($\longrightarrow$) .
Ankathete: Die Ankathete ist die Kathete ($\longrightarrow$), die sich direkt am Winkel ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) befindet.
Äquivalenzumformung: Die Äquivalenzumformung ist die Methode der Algebra ($\longrightarrow$) um Gleichungen ($\longrightarrow$) zu lösen, dabei bedient sie sich der Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).
Algebra: Die Algebra ist ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit dem lösen von Gleichungen ($\longrightarrow$). Dazu bedient sie sich der Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) und den Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).
Analysis: Die Analysis bildet ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit den Eigenschaften von Funktionen ($\longrightarrow$).
Assoziativ: Rechnungen bei denen Klammern ($\longrightarrow$ Ausmultiplizieren) nach belieben setzen kann ohne das sich das sich das Ergebnis ändert sind assoziativ.
Ausklammern: Es ist möglich Klammern zusetzen, indem gleiche Vorfaktoren ($\longrightarrow$ Koeffizienten) von mehreren Summanden ($\longrightarrow$) als Faktor ($\longrightarrow$) vor einer Klammer ($\longrightarrow$ assoziativ) gesetzt werden.
Ausmultiplizieren: Klammern können ausmultipliziert werden, dabei wirkt der Faktor ($\longrightarrow$) außerhalb der Klammern auf jeden Summanden ($\longrightarrow$) in den Klammern ($\longrightarrow$ assoziativ).

Basis: Wenn eine Term ($\longrightarrow$) mehrfach mit sich selbst multipliziert ($\longrightarrow$) wird, dann bildet der Term die Basis, während die Anzahl der Multiplikationen durch den Exponenten ($\longrightarrow$) beziehungsweise der Potenz ($\longrightarrow$) beschrieben wird.
Betrag: Der Betrag sorgt dafür, dass ein positives Ergebnis erzeugt wird.
Binomialkoeffizient: Die Binomialkoeffizienten sind eine verkürzte Schreibweise von Brüchen ($\longrightarrow$) aus Fakultäten ($\longrightarrow$).
Bogenmaß: Das Bogenmaß hat die Einheit Radiant ($\longrightarrow$) und kann aus der Einheit Grad ($\longrightarrow$) bestimmt werden.
Bruch: Ein Bruch besteht aus einem Zähler ($\longrightarrow$) und einem Nenner ($\longrightarrow$) und kann in eine Dezimalzahl ($\longrightarrow$) umgewandelt werden.

Darstellung (Zahl): Eine Zahl ($\longrightarrow$) kann verschieden dargestellt werden, so ist zum Beispiel: $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ($\longrightarrow$ Bruch).
Definition: Die Definition bildet den Anfang jeglicher Mathematik, da sie die wichtigsten Regeln festlegt.
Definitionslücke: Wenn eine Funktion ($\longrightarrow$) an einem Punkt ($\longrightarrow$) nicht definiert ($\longrightarrow$) ist und es sich dabei nicht um eine Polstelle ($\longrightarrow$) handelt, wird dies Definitionslücke genannt. Sie treten oftmals bei unecht gebrochen rationalen Funktionen auf.
Definitionsmenge: Die Definitionsmenge gibt an für welche Werte einer Variablen ($\longrightarrow$) die Gleichung ($\longrightarrow$) oder Funktion ($\longrightarrow$) berechenbar ist.
Dezimalzahlen: Ein Bruch ($\longrightarrow$) kann in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Dabei handelt es sich um eine andere Darstellung ($\longrightarrow$).
Diagonale: Diagonalen sind Strecken ($\longrightarrow$) zwischen gegenüberliegenden Eckepunkten ($\longrightarrow$) bei einem geometrischen Körper ($\longrightarrow$ Geometrie).
Differentialoperator: Der Differentialoperator wirkt nur nach rechts und kommt in zwei Formen ($\longrightarrow$ Differentation) vor. Um mit ihm zu rechnen wird der Kommutator ($\longrightarrow$) benutzt. Wirkt ein Differentialoperator auf eine Funktion ($\longrightarrow$) wird die Ableitung ($\longrightarrow$) gebildet. Die Differentialoperatoren nehmen einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.
Differentiation (partiell): Bei der partiellen Differentation werden Unterabhängigkeiten nicht berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{\partial}{\partial x}$.
Differentiation (total): Bei der totalen Differentation werden Unterabhängigkeiten berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{d}{dx}$.
Differenz: Die Differenz ist das Ergebnis einer Subtraktion ($\longrightarrow$).
Differenz (Mengen): Der Mengenoperator ($\longrightarrow$) Differenz wird auch als „Eine Menge ($\longrightarrow$) *ohne* einer anderen Menge " gelesen.
Dimension: Die Anzahl von Dimensionen gibt die Ausbreitung von Objekten an und ist ein zentraler Begriff der Geometrie ($\longrightarrow$).
Division: Bei der Division wird eine Zahl ($\longrightarrow$) oder ein Term ($\longrightarrow$) ($\longrightarrow$ Dividend) durch eine andere Zahl oder einen anderen Term ($\longrightarrow$ Divisor) geteilt und bilden den Quotienten ($\longrightarrow$).
Divisor: Der Divisor ist eine Zahl ($\longrightarrow$) oder ein Term ($\longrightarrow$) durch den geteilt wird. Bei Brüchen ($\longrightarrow$) wird der Divisor auch Nenner ($\longrightarrow$) genannt.
Drachen: Der Drachen ist ein spezielles Viereck ($\longrightarrow$ Rechteck), dass zwei gegenüberliegende gleich große Winkel ($\longrightarrow$) besitzt. Die Schenkel ($\longrightarrow$) der anderen Winkel sind jeweils gleichlang.
Dreieck: Ein Dreieck besteht aus drei Ecken ($\longrightarrow$) und drei Seiten ($\longrightarrow$). Es besitzt eine Winkelsumme ($\longrightarrow$) von 180 Grad ($\longrightarrow$).

-rechtwinkliges: Beim rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel ein rechter Winkel ($\longrightarrow$). Die gegenüberliegende Seite ($\longrightarrow$) wird Hypotenuse ($\longrightarrow$) genannt.

-gleichschenkliges: Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Winkel ($\longrightarrow$) gleich groß und zwei Seiten ($\longrightarrow$) gleich lang.

-gleichseitiges: Bei einem gleichseitigen Dreieck besitzen alle Winkel ($\longrightarrow$) 60 Grad ($\longrightarrow$) und alle Seiten ($\longrightarrow$) sind gleich lang.

Dreisatz: Der Dreisatz wird benutzt um Prozentanteile ($\longrightarrow$) einer Zahl ($\longrightarrow$) zu bestimmen.
Durchmesser: Der Durchmesser ist die Strecke ($\longrightarrow$) von einem Punkt ($\longrightarrow$) am Kreisbogen ($\longrightarrow$) durch den Mittelpunkt ($\longrightarrow$) bis zum gegenüberliegenden Punkt auf dem Kreisbogen. Dabei ist der Durchmesser doppelt so groß wie der Radius ($\longrightarrow$).
Durchschnitt: Der Mengenoperator ($\longrightarrow$) Durchschnitt bestimmt die Zahlen ($\longrightarrow$), welche

sich sowohl in einer Menge (⟶) als auch in einer anderen Menge befinden.

Ebene: Eine Ebene ist ein Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches nicht begrenzt ist.
Ecke: An einer Ecke treffen sich zwei Strecken (⟶) in einem Punkt (⟶), sodass sie einen Winkel (⟶) ungleich von 180 Grad (⟶) zu einander haben.
Eindeutigkeit: Eindeutigkeit ist die Forderung, dass zu jedem Variablenwert (⟶) nur ein Funktionswert (⟶) existiert. Erst wenn eine Funktion (⟶) eindeutig ist, ist sie auch tatsächlich eine Funktion.
Einheitskreis: Der Einheitskreis ist ein Kreis (⟶) mit Radius (⟶) $r = 1$.
Einsetzungsverfahren: Um Gleichungen (⟶) nutzen zu können, müssen Werte oder Terme (⟶) in sie eingesetzt werden. Dies wird das Einsetzungsverfahren genannt.
Element: Befindet sich eine Zahl (⟶) in einer Menge (⟶), dann ist sie Element der Menge.
Ellipse: Die Ellipse ist ein Kreis (⟶), der nicht immer den gleichen Radius (⟶) besitzt. Dabei ist die Ellipse immer symmetrisch (⟶) bezüglich zwei Achsen (⟶).
Euler'sche Zahl: $e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995\ldots$
Euler'sche Gerade: Auf der Euler'schen Geraden (⟶ Gerade) liegen die Schnittpunkte (⟶) der Höhen (⟶), der Mittelsenkrechten (⟶) und der Seitenhalbierenden (⟶) mit einem Abstandsverhältnis (⟶) von eins zu zwei.
Erweitern: Brüche (⟶) können durch Erweitern in eine andere Darstellung (⟶) überführt werden, sodass mit ihr die Addition (⟶) oder Subtraktion (⟶) leichter durchgeführt werden können.
Exponent: Ein Exponent gibt an wie oft eine Basis (⟶) mit sich selbst multipliziert (⟶) wird.
Exponentialfunktion: Bei der Exponentialfunktion steht im Exponenten (⟶) die Variable (⟶). Die bedeutendste Funktion (⟶) dieser Art hat die Euler'sche Zahl (⟶) zur Basis (⟶).
Extremstelle: Extremstellen einer Funktion (⟶) sind Minimum (⟶) oder Maximum (⟶) und besitzen eine Tangente mit der Steigung (⟶) gleich Null.

Faktor: Bei der Multiplikation (⟶) werden Faktoren miteinander verrechnet.
Fakultät: Die Fakultät ist eine Abkürzung einer Kette von Multiplikationen (⟶), wobei zum Beispiel $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist und per Definition (⟶) $0! := 1$ gilt.
Fläche: Eine Fläche ist ein geometrisches (⟶) Objekt welches einen Rand (⟶) besitzt.
Flächeninhalt: Der Flächeninhalt gibt an wieviele Quadratmeter (⟶) in eine Fläche (⟶) passen.
Funktion: Eine Funktion bildet eine Zahl (⟶) auf eine andere Zahl ab und muss dabei eindeutig (⟶) sein. Sie besitzen immer eine Definitions- (⟶) und Wertemenge (⟶).

-echt gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Polstellen (⟶), da sie für einige Zahlen (⟶) nicht definiert (⟶) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision (⟶).

-unecht gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Definitionslücken (⟶), da sie nur aufgrund ihrer Darstellung (⟶) für einige Zahlen (⟶) nicht definiert (⟶) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision (⟶).

Funktionswert: Der Funktionswert ist das Ergebnis nachdem ein Variablenwert (⟶) in die Funktionsgleichung (⟶) eingesetzt (⟶) wurde.

Ganze Zahlen: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist die Zahlenmenge (⟶) aller negativer Zahlen (⟶). Die natürlichen Zahlen (⟶) bilden dabei eine Teilmenge (⟶) der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} =$

$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
Gegenkathete: Die Gegenkathete ist die Kathete ($\longrightarrow$), die sich gegenüber des betrachteten Winkel ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) befindet.
Geometrie: Die Geometrie beschäftigt sich mit Formen wie Rechtecke ($\longrightarrow$), Kreisen ($\longrightarrow$), Quadern ($\longrightarrow$), Pyramiden ($\longrightarrow$), Zylindern ($\longrightarrow$) und vielem mehr. Dabei sind je nach Anzahl der Dimensionen ($\longrightarrow$) die gefragten Größen ($\longrightarrow$): Winkel ($\longrightarrow$), Streckenlänge ($\longrightarrow$), Umfang ($\longrightarrow$), Flächeninhalt ($\longrightarrow$), Oberfläche ($\longrightarrow$) oder Volumen ($\longrightarrow$).
Gerade: Eine Gerade ($\longrightarrow$) ist eine Funktion ($\longrightarrow$) erster Ordnung ($\longrightarrow$) und besitzt keinen Anfang und kein Ende. Sie wird beschreiben durch die Steigung ($\longrightarrow$) und dem Ordinatenschnittpunkt ($\longrightarrow$).
Gleichung: Eine Gleichung stellt einen Bezug zwischen Zahlen ($\longrightarrow$), Parametern ($\longrightarrow$), Variablen ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$) auf.
Grad: Grad ist die Einheit von Winkeln ($\longrightarrow$). Dabei hat ein Kreis ($\longrightarrow$) 360°.
Graph: Ein Graph ist die graphische Veranschaulichung einer Funktion ($\longrightarrow$) in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$).
Grenzwerte: Grenzwerte beschreiben ein Verhalten eines Terms ($\longrightarrow$) oder einer Funktion ($\longrightarrow$) in der Nähe von Definitionslücken ($\longrightarrow$), Polstellen ($\longrightarrow$) oder besonders hohen oder niedrigen Zahlen ($\longrightarrow$).
Größe: Eine Größe kann ein Parameter ($\longrightarrow$) oder eine Variable ($\longrightarrow$) sein.
Grundfläche: Bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) bildet die Grundfläche ($\longrightarrow$ Flächeninhalt) mit der Höhe ($\longrightarrow$) eine Beziehung zum Volumen ($\longrightarrow$).
Grundseite: Bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$) bildet die Grundseite ($\longrightarrow$ Seite) mit der Höhe ($\longrightarrow$) eine Beziehung zum Flächeninhalt ($\longrightarrow$).

Halbgerade: Eine Halbgrade besitzt einen Anfang aber kein Ende.
Höhe: Die Höhe spielt in der Geometrie ($\longrightarrow$) eine besonders bedeutende Rolle, da je nach Anzahl der Dimensionen ($\longrightarrow$), sie einen Bezug zu den gesuchten Größen ($\longrightarrow$) darstellt.
Höhensatz von Euklid: Der Höhensatz von Euklid beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Höhe ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) und der unterteilten Hypotenuse $c = p + q$ ($\longrightarrow$). Hierbei gilt $h^2 = qp$.
Hyperbel: Die Hyperbel ist eine Funktion ($\longrightarrow$) bei der sich die Variable ($\longrightarrow$) im Nenner ($\longrightarrow$) befindet. Sie besitzt eine Polstelle ($\longrightarrow$).
Hypotenuse: Die Hypotenuse ist die längeste Seite ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) und liegt gegenüber vom rechten Winkel ($\longrightarrow$).

Index: Ein Index gibt zusätzliche Informationen bei einen Parameter ($\longrightarrow$), einer Variable ($\longrightarrow$) oder einer Funktion ($\longrightarrow$) an. In der Regel hat dieser keinen Einfluss auf Rechnungen.
Innenkreis: Der Innenkreis ist ein Kreis ($\longrightarrow$) der alle Seiten eines Dreiecks ($\longrightarrow$) tangiert ($\longrightarrow$) und den Schnittpunkt ($\longrightarrow$) der Winkelhalbierenden ($\longrightarrow$) als Mittelpunkt ($\longrightarrow$) besitzt.
Integral: Das Integral bildet den Operator ($\longrightarrow$), um die Stammfunktion ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) zu bestimmen. Mit der Stammfunktion kann der Flächeninhalt ($\longrightarrow$) unter einem Graphen ($\longrightarrow$) bestimmt werden.
Integration: Die Integration wir durch das Integral ($\longrightarrow$) beschrieben und nimmt einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.

-partielle: Die partielle Integration wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von einem Produkt ($\longrightarrow$) von Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.

-durch Substitution: Die Integration durch Substitution ($\longrightarrow$) wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von verketteten ($\longrightarrow$ Kettenregel) Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.

Iterativ: Ein iteratives Verfahren ist eine schrittweise Annäherung an das richtige Ergebnis und wird oftmals bei besonders komplexen Rechnungen zur Vereinfachung benutzt ($\longrightarrow$ Reihen).

Kanten: Als Kanten werden bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) die Strecken ($\longrightarrow$) zwischen Eckpunkten ($\longrightarrow$) bezeichnet.
Kathete: In einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) heißen die Schenkel ($\longrightarrow$) vom rechten Winkel ($\longrightarrow$) Katheten .
Kathetensatz: Bei einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) gilt, dass die Hypotenuse ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) mit einem durch die Höhe ($\longrightarrow$) geteilten Teilstück der Hypotenuse gleich der gegenüberliegenden Kathetenlänge ($\longrightarrow$) zum Quadrat ist.
Kegel: Der Kegel besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und läuft in einem Punkt ($\longrightarrow$) in einer bestimmten Höhe ($\longrightarrow$) zusammen. Ein Kegel besitzt eine Kante ($\longrightarrow$) und einen Eckpunkt ($\longrightarrow$).
Kegelstumpf: Ein Kegelstumpf besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und einen gegenüberliegenden kleineren Kreis sowie eine Höhe ($\longrightarrow$). Dies sieht so aus als ob von einem großen Kegel ($\longrightarrow$) die Spitze abgetrennt wurde.
Kehrwert: Bei der Bildung des Kehrwerts in der Bruchrechnung ($\longrightarrow$) werden Nenner ($\longrightarrow$) und Zähler ($\longrightarrow$) vertauscht.
Kettenregel: Bei der Kettenregel werden Funktionen ($\longrightarrow$), in denen sich wiederum Funktionen befinden abgeleitet ($\longrightarrow$).
Koeffizient: Koeffizienten sind Parameter ($\longrightarrow$) oder Zahlen ($\longrightarrow$) die an einer Variable ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) sind.
Komplexe Zahlen: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden die letzte Erweiterung der Zahlenmengen ($\longrightarrow$) durch die Zahl ($\longrightarrow$) $i = \sqrt{-1}$ und spannen dabei einen Zahlenstrahl ($\longrightarrow$) auf der orthogonal ($\longrightarrow$) zu den reellen Zahlen ($\longrightarrow$) steht.
Kommandostrich: Der Kommandostrich befindet sich hinter einer Gleichung ($\longrightarrow$), die mittels Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) algebraisch ($\longrightarrow$) verändert wird. Dabei wird hinter dem Kommandostrich stets der nächste Rechenschritt angegeben.
Kommutativ: Als kommutativ werden alle Rechnungen bezeichnet, bei denen die Reihenfolge vor oder hinter dem Operator ($\longrightarrow$), das Ergebnis nicht verändert. Dies kann über den Kommutator ($\longrightarrow$) bestimmt werden.
Kommutator: Der Kommutator dient zur Überprüfung des Kommutativgesetzes ($\longrightarrow$). Dabei wird der zu überprüfende Operator ($\longrightarrow$) anstelle des Kommas des Kommutators $[a, b]$ geschrieben. Dabei gilt zum Beispiel für die Multiplikation ($\longrightarrow$) $[a.b] = a \cdot b - b \cdot a$.
Koordinate: Die Koordinate ist im Koordinatensystem ($\longrightarrow$) die Achse auf der die Variablenwerte ($\longrightarrow$) zu finden sind.
Koordinatensystem: Im Koordinatensystem können Punkt ($\longrightarrow$) und Graphen ($\longrightarrow$) eingetragen werden. Es besteht aus der Ordinate ($\longrightarrow$) und der Koordinate ($\longrightarrow$).
Kosinus: Der Kosinus ist eine trigonometrische ($\longrightarrow$) Funktion ($\longrightarrow$), die einen verschobenen Sinus ($\longrightarrow$) darstellt.
Kotangens: Der Kotangens ist der Kehrwert ($\longrightarrow$) vom Tangens ($\longrightarrow$).
Kreis: Ein Kreis ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$), das durch die Kreiszahl ($\longrightarrow$) beschrieben wird.
Kreisabschnitt: Der Kreisabschnitt ist ein Kreisstück ($\longrightarrow$), dass durch eine Sekante ($\longrightarrow$) abgeschnitten wurde.
Kreisausschnitt: Der Kreisausschnitt ist ein Bruchteil ($\longrightarrow$) eines Kreises ($\longrightarrow$).
Kreisbogen: Der Kreisbogen ist ein Teil des Umfangs ($\longrightarrow$) des Kreises ($\longrightarrow$).

Kreiszahl: $\pi = 3,14159265359$
Kubisch: Als kubisch werden Größen ($\longrightarrow$) und Objekte in drei Dimensionen ($\longrightarrow$), wie der Würfel ($\longrightarrow$), bezeichnet.
Kugel: Die Kugel ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$), dass radialsymmetrisch ($\longrightarrow$) mit einem Radius ($\longrightarrow$) ist. Eine Kugel besitzt keine Kanten ($\longrightarrow$) oder Ecken ($\longrightarrow$).
Kugelabschnitt: Der Kugelabschnitt ist ein Teilstück der Kugel ($\longrightarrow$), dass durch eine Ebene ($\longrightarrow$) abgeschnitten wurde.
Kugelausschnitt: Der Kugelausschnitt ist im Wesentlichen ein Bruchteil ($\longrightarrow$) einer Kugel ($\longrightarrow$).
Kürzen: Brüche ($\longrightarrow$) können oftmals gekürzt werden, was bedeutet, dass der Zähler ($\longrightarrow$) und der Nenner ($\longrightarrow$) durch etwas gleiches dividierbar ($\longrightarrow$) sind.

Logarithmus: Der Logarithmus wird benutzt um nach einem Exponenten ($\longrightarrow$) bei der Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) aufzulösen. Er bildet die Umkehrfunktion ($\longrightarrow$) zur Exponentialfunktion ($\longrightarrow$).
Leibnizregel: siehe Produktregel ($\longrightarrow$).

Mantelfläche: Die Mantelfläche ist die Oberfläche ($\longrightarrow$) ohne die Grundfäche ($\longrightarrow$).
Maximum: Ein Maximum ist ein Punkt ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) mit einer Tangente ($\longrightarrow$) mit der Steigung ($\longrightarrow$) gleich Null. Wobei sich der Graph ($\longrightarrow$) stets unterhalb der Tangente befindet.
Mengen: Mengen sind zusammengefasste Zahlen ($\longrightarrow$). Wenn alle Zahlen einer Art in einer Menge vorhanden sind, ist die Rede von Zahlenmengen ($\longrightarrow$).
Mengenoperatoren: Mengenoperatoren ermöglichen das Rechnen mit Mengen ($\longrightarrow$). Siehe dazu Differenz ($\longrightarrow$), Durchschnitt ($\longrightarrow$) und Vereinigung ($\longrightarrow$).
Minimum: Ein Minimum ist ein Punkt ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) mit einer Tangente ($\longrightarrow$) mit der Steigung ($\longrightarrow$) gleich Null. Wobei sich der Graph ($\longrightarrow$) stets oberhalb der Tangente befindet.
Minuend: Der Minuend ist bei der Subtraktion ($\longrightarrow$) der Term ($\longrightarrow$) von dem der Subtrahend ($\longrightarrow$) abgezogen wird.
Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade ($\longrightarrow$), die orthogonal ($\longrightarrow$) zur betrachten Seite ($\longrightarrow$) ist. Dabei ist der Schnittpunkt ($\longrightarrow$) der Seite und der Geraden direkt in der Mitte der Strecke.
Mittelwert: Der Mittelwert kann gebildet werden, indem alle Zahlen ($\longrightarrow$) aufaddiert ($\longrightarrow$) und durch die Anzahl der Zahlen dividiert ($\longrightarrow$) werden.
Multiplikation: Bei der Multiplikation werden Faktoren ($\longrightarrow$) miteinander verrechnet und bilden das Produkt ($\longrightarrow$).

Natürliche Zahlen: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine Zahlenmenge ($\longrightarrow$) mit den Zahlen ($\longrightarrow$) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Nenner: Der Nenner ist bei der Bruchrechnung ($\longrightarrow$) der Divisor.
Netz: Ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) kann aufgeklappt werden, sodass die Flächen ($\longrightarrow$) nebeneinander liegen. Dieses neue zweidimensionale Objekt aus Flächen wird Netz genannt.
Neutrales Element: Als neutrales Element werden Zahlen ($\longrightarrow$) bezeichnet, die bei einer Operation ($\longrightarrow$) das Ergebnis nicht verändern. Die Null ist das neutrale Element der Addition ($\longrightarrow$) und die Eins das neutrale Element der Multiplikation ($\longrightarrow$).

Nullstellen: Als Nullstellen werden die Punkte ($\longrightarrow$) bezeichnet, in denen der Graph ($\longrightarrow$) die Koordinate ($\longrightarrow$) schneidet.

Oberfläche: Alle Flächen ($\longrightarrow$) eines Netzes ($\longrightarrow$) aufaddiert ($\longrightarrow$) heißen zusammen Oberfläche.
Offset: siehe Ordinatenschnittpunkt ($\longrightarrow$).
Operation: Als Operation wird eine Rechnung bezeichnet, die durchgeführt wird.
Operator: Der Operator gibt eine Anweisung für eine Operation ($\longrightarrow$).
Ordinate: Die Ordinate ist der Zahlenstrahl ($\longrightarrow$) im Koordinatensystem ($\longrightarrow$), der sich orthogonal ($\longrightarrow$) zur Koordinate ($\longrightarrow$) befindet. Auf ihm sind die Funktionswerte ($\longrightarrow$) zu finden.
Ordinatenschnittpunkt: Der Ordinatenschnittpunkt ist der Punkt, an dem sich Graph ($\longrightarrow$) und Ordinate ($\longrightarrow$) schneiden.
Orthogonalität: Haben zwei Strecken ($\longrightarrow$), Halbgeraden ($\longrightarrow$), Geraden ($\longrightarrow$) oder sonstige Objekte einen rechten Winkel ($\longrightarrow$) zu einander, dann wird von Orthogonalität gesprochen.

Parabel: Die Parabel ist eine Funktion ($\longrightarrow$) zweiter Ordnung ($\longrightarrow$). Sie besitzt einen Scheitelpunkt ($\longrightarrow$), der gleichzeitig ein Extrempunkt ($\longrightarrow$) ist. Sie wird außerdem noch beschrieben durch den Ordinatenschnittpunkt ($\longrightarrow$) und der Stauchung ($\longrightarrow$).
Parallelität: Wenn zeig Strecken ($\longrightarrow$), Halbgeraden ($\longrightarrow$) oder Geraden ($\longrightarrow$) immer den gleichen Abstand ($\longrightarrow$) zu einander besitzen, dann sind die parallel zu einander.
Parallelogramm: Ein Parallelogramm ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$). Wobei die gegen überliegenden Seiten ($\longrightarrow$) parallel ($\longrightarrow$) zu einander sein müssen. Außerdem sind die gegenüberliegenden Seiten ($\longrightarrow$) gleich lang und Winkel ($\longrightarrow$) gleich groß.
Parameter: Ein Parameter ist ein Platzhalter für eine Zahl ($\longrightarrow$).
Pascal'sches Dreieck: Das Pascal'sche Dreieck gibt an wie sich die Koeffizienten ($\longrightarrow$) von binomischen Formel ($\longrightarrow$) mit höherer Potenz ($\longrightarrow$) verhalten.
Periodizität: Wiederholt sich ein Muster bei einer Zahl oder der Graph fortlaufend, dann wird von Periodizität gesprochen.
Primzahlen: Die Primzahlen sind die Zahlenmenge ($\longrightarrow$) aller natürlichen Zahlen ($\longrightarrow$), die nur durch sich selbst oder eins dividierbar ($\longrightarrow$) sind.
Produktregel: Die Produktregel dient dazu die Ableitung ($\longrightarrow$) von einem Produkt ($\longrightarrow$) von Funktionen ($\longrightarrow$) zu bilden.
Polstelle: Eine Polstelle einer Funktion ($\longrightarrow$) beschriebt ein extremales Verhalten in der Nähe einer Lücke der Definitionsmenge ($\longrightarrow$) und tritt in der Regel bei echt gebrochen rationalen Funktionen auf.
Polynom: Ein Polynom ist eine Summe ($\longrightarrow$) von verschiedenen Potenzen ($\longrightarrow$) einer Variable ($\longrightarrow$) mit ihren jeweiligen Koeffizienten ($\longrightarrow$).
Polynomdivision: Die Polynomdivision dient dazu zu überprüfen, ob es sich um eine echt oder unecht gebrochen rationale Funktion ($\longrightarrow$) handelt und wird wie die schriftliche Division ($\longrightarrow$) gehandhabt.
Potenz: Die Potenz einer Größe ($\longrightarrow$) ist die Zahl ($\longrightarrow$) wie oft die Größe mit sich selbst multipliziert ($\longrightarrow$) wird.
Prisma: Ein Prisma ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) mit eckiger Grundfläche ($\longrightarrow$). Dabei ist die Grundfläche gegenüberliegend wieder vorzufinden mit einen Abstand ($\longrightarrow$) der Höhe ($\longrightarrow$).
Produkt: Das Produkt ist das Ergebnis der Multiplikation ($\longrightarrow$).
Prozent: $\frac{1}{100} = 1\%$ ($\longrightarrow$ Bruch).
Punkt: Ein Punkt in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$) in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$) wird be-

schrieben durch den Variablenwert (⟶) und Funktionswert (⟶).
Pyramide: Eine Pyramide ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) mit einer Grundfläche (⟶). Diese läuft in einer Höhe (⟶) spitz zusammen. Eine Pyramide besitzt fünf Seiten (⟶), fünf Ecken (⟶) und acht Kanten (⟶).
Pyramidenstumpf: Bei einem Pyramidenstumpf wurde von einer Pyramide (⟶) die Spitze parallel (⟶) zur Grundfläche (⟶) abgeschnitten.

Quader: Ein Quader ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶), dessen parallelen (⟶) Kanten (⟶) gleich lang sind. Alle Seiten (⟶) sind Rechtecke (⟶), wobei die gegenüberliegenden gleichgroß sind. Ansonsten besitzt der Quader die gleichen Eigenschaften wie der Würfel (⟶), der ein Spezialfall des Quaders ist.
Quadrant: In einem Koordinatensystem (⟶) gibt es vier Quadranten, die durch die Ordinate (⟶) und Koordinate (⟶) unterteilt sind.
Quadrat: Ein Quadrat ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass alle Winkel (⟶) rechte Winkel sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Quadratische Ergänzung: Die quadratische Ergänzung ist ein Mittel der Algebra (⟶) um Gleichungen (⟶) zu lösen. Dabei wird mithilfe des neutralen Elements (⟶) eine binomische Formel (⟶) erzeugt.
Quadratmeter: Ein Quadratmeter bildet die Einheit der Flächenberechnung (⟶) und beschreibt wieviele Quadrate (⟶) mit einem Meter mal einem Meter in ein geometrisches (⟶) Objekt passen.
Quotient: Der Quotient ist das Ergebnis der Division (⟶).

Radiant: Radiant ist die Einheit von Winkeln (⟶) in Bogenmaß (⟶). Dabei gilt: $2\pi rad = 360°$.
Radius: Der Radius ist der Abstand (⟶) des Kreisbogens (⟶) zum Mittelpunkt (⟶) eines Kreises (⟶).
Rand: Der Rand ist in der Geometrie (⟶) die Begrenzung eines Objekts. **Rationale Zahlen:** Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind eine Zahlenmenge (⟶) aller Zahlen (⟶) die durch einen Bruch (⟶) dargestellt (⟶) werden können.
Raute: Die Raute ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass die gegenüberliegenden Winkel (⟶) gleich groß sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Reelle Zahlen: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle Zahlen (⟶) der Zahlenmenge (⟶) ohne die komplexen Zahlen (⟶).
Reihe: Eine Reihe ist eine verkürzte Schreibweise einer langen Reihe von Additionen (⟶) oder Multiplikationen (⟶).
-Summenreihe: Die Summenreihe beschreibt eine Kette von Additionen (⟶).
-Produktreihe: Die Produktreihe beschreibt eine Kette von Multiplikationen (⟶).
-Taylorreihe: Die Taylorreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch Ableitungen (⟶) sich einer Funktion (⟶) anzunähern.
-Fourierreihe: Die Fourierreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch trigonometische (⟶) Funktionen (⟶) sich einer periodischen (⟶) Funktion anzunähern.
Rest: Bei einer Division (⟶) mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (⟶) kann eine Zahl (⟶) nicht dividierbar durch den Divisor (⟶) sein. Diese Zahl wird Rest genannt.
Runden: Das Runden dient zur besseren Präsentation von Ergebnissen.

Satz: Ein Satz ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der nahezu immer gilt.
Satz des Pythagoras: Der Satz des Pythagoras stellt einen Zusammenhang zwischen den Katheten (⟶) und der Hypotenuse (⟶) eines recktwinkligen Dreiecks (⟶) auf.
Satz von Cavallerie: Der Satz von Cavallerie sagt aus, dass das Volumen (⟶) von zwei geometrischen (⟶) Objekten gleich ist, wenn sie in jeder Höhe (⟶) den gleichen Flächeninhalt (⟶) besitzen.
Scheitelpunkt: Der Scheitelpunkt einer Parabel (⟶) ist der Punkt (⟶), an dem eine Tangente (⟶) mit der Steigung (⟶) gleich Null angelegt werden kann.
Schenkel: Schenkel sind die Strecken (⟶) oder Halbgeraden (⟶) die von einem Schnittpunkt (⟶) bezüglich des betrachteten Winkels (⟶) ausgehen.
Schwerpunkt: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt (⟶) der Seitenhalbierenden (⟶).
Seite: Eine Seite ist bei einem geometrischen (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶) eine Strecke (⟶) zwischen zwei Eckpunkten (⟶). Während in drei Dimensionen oftmals damit eine Fläche (⟶) gemeint ist.
Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierden ist eine Gerade (⟶) durch die Mitte einer Seite (⟶) und dem gegenüberliegenden Punkt (⟶).
Sekante: Eine Sekante ist eine Gerade (⟶), die ein geometrisches (⟶) Objekt genau zwei mal schneidet.
Sinus: Der Sinus ist eine trigonometrische (⟶) Funktion (⟶), die durch den Quotient (⟶) Gegenkathete (⟶) durch Hypotenuse (⟶) bei einem rechtwinkligen Dreieck (⟶) beschrieben wird.
Spiegelung: Eine Spiegelung kann an einer Geraden (⟶) oder einem Punkt (⟶) durch geführt werden, dabei wird das geometische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) neu abgebildet, wobei der Abstand (⟶) zum Punkt (⟶) oder zur Geraden (⟶) gleich bleiben muss, sich allerdings auf der anderen Seite befindet.
Stammfunktion: Die Stammfunktion ist die integierte (⟶) Funktion (⟶).
Stauchungsparameter: Der Stauchungsparameter ist ein Koeffizient (⟶) der die Steigung (⟶) von Funktionen (⟶) beeinflusst.
Steigung: Die Steigung gibt an um wieviel sich der Funktionswert (⟶) erhöhen würde bei einem weiteren Schritt beim Variablenwert (⟶).
Strecke: Eine Strecke ist beschreibt einen Abstand (⟶) zwischen zwei Punkten (⟶).
Substitution: Die Substitution ist die Umkehrung des Einsetzverfahren (⟶).
Subtrahend: Von einem Subtrahenden wird bei der Subtraktion (⟶) abgezogen.
Subtraktion: Bei der Subtraktion wird von einem Subtrahend (⟶) der Minuend (⟶) abgezogen und der Ergebnis wird Differenz (⟶) genannt.
Summand: Wenn Summanden zusammengezählt werden entsteht die Summe (⟶). Diese Rechnung wird Addition (⟶) genannt.
Summe: Die Summe ist das Ergebnis der Addition (⟶) von Summanden (⟶).
Symmetrie: Es wird von einer Symmetrie gesprochen wenn nach einer Spiegelung (⟶) sich das geometrische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) nicht verändert hat.

-Achsensymmetrie: Spiegelung (⟶) an einer Geraden (⟶) ohne Veränderung wird achsensymmetrisch genannt.

-Punktsymmetrie: Spiegelung (⟶) an einem Punkt (⟶) ohne Veränderung wird punktsymmetrisch genannt.

-Radiale Symmetrie: Drehung um einen beliebigen Winkel (⟶) ohne Veränderung wird radialsymmetrisch genannt.

Tangens: Der Tangens ist der Quotient (⟶) von Sinus (⟶) durch Kosinus (⟶).

Tangente: Eine Tangente berührt aber schneidet ein geometrisches (⟶) Objekt oder einen Graphen (⟶) nicht.
Teilmengen: Eine Teilmenge ist ein Teil einer anderen Menge (⟶).
Term: Ein Term ist ein Block von Operationen (⟶).
Tetraeder: Ein Tetraeder ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) mit vier Eckpunkten (⟶), sechs Kanten (⟶) und vier Seiten (⟶), die jeweils gleichschenklige Dreiecke (⟶) sind.
Theorem: Ein Theorem ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der immer gilt.
Trapez: Ein Trapez ist ein Viereck (⟶ Rechteck), dass zwei parallel Seiten besitzt.
Trigonometrie: Die Trigonometrie stellt werden Zusammenhang zwischen Winkeln (⟶) und Seitenlängen (⟶) auf.

Unbekannte: siehe Parameter (⟶) und Variable (⟶).
Umfang: Der Umfang eines geometrischen (⟶) Objekts in zwei Dimensionen (⟶) ist gegeben als die Summe (⟶) der Strecken (⟶) des Randes (⟶).
Umkehrfunktion: Zu jeder Funktion (⟶) gibt es eine Umkehrfunktion, die die Funktion wieder aufhebt.
Umkreis: Der Umkreis ist ein Kreis (⟶) der alle Eckpunkte eines Dreiecks (⟶) schneidet mit dem Mittelpunkt (⟶) der Schnittpunkt (⟶) der Mittelsenkrechten (⟶) entspricht.

Variable: Eine Variable ist eine Veränderlich und beschreibt bei einer Funktion (⟶) alle Zahlen (⟶) der Definitionsmenge (⟶).
Variablenwert: Der Variablenwert ist ein spezieller Wert einer Variablen (⟶) und wird auf der Koordinate (⟶) gefunden.
Vereinigung: Die Vereinigung ist ein Mengenoperator (⟶), der die Zahlen (⟶) von zwei Mengen (⟶) zusammenfasst.
Vorfaktor: siehe Koeffizienz (⟶).
Volumen: Das Volumen ist eine Größe (⟶) in drei Dimensionen (⟶) und wird von Flächen (⟶) umrandet (⟶). Das Volumen beschreibt wieviele Würfel (⟶) mit der Kantenlänge (⟶) von einem Meter in ein geometrisches (⟶) Objekt passen.

Wendestelle: Die Wendestelle einer Funktion (⟶) beschreibt den Punkt (⟶), an dem die Steigungsänderung (⟶) ihr Vorzeichen wechselt.
Wertemenge: Alle Funktionswerte (⟶) werden in der Wertemenge zusammengefasst.
Wertepaar: Zu jedem Variablenwert (⟶) passt genau ein Funktionswert (⟶). Diese beiden Werte bilden ein Wertepaar.
Wertetabelle: In einer Wertetabelle können Wertepaare (⟶) berechnet werden.
Winkel: Ein Winkel beschreibt wie groß der Anteil eines Kreises (⟶) zwischen zwei Strecken (⟶) oder Halbgeraden (⟶) ist.
-überspitz: Als überspitzer Winkel wird ein Winkel zwischen 0° und 45° bezeichnet.
-spitz: Als spitzer Winkel wird ein Winkel zwischen 45° und 90° bezeichnet.
-recht: Als rechter Winkel wird ein Winkel von genau 90° bezeichnet.
-stumpf: Als stumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen 90° und 180° bezeichnet.
-gestreckt: Als gestreckter Winkel wird ein Winkel von genau 180° bezeichnet.
-überstumpf: Als überstumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen 180° und 360° bezeichnet.
-voll: Als voller Winkel wird ein Winkel von genau 360° bezeichnet.
Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende ist eine Gerade (⟶), die einen Winkel (⟶) genau halbiert.

Winkelsumme: Die Winkelsumme ist die Summe ($\longrightarrow$) aller Winkel ($\longrightarrow$) in einem geometrischen ($\longrightarrow$) Objekt in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$).
Würfel: Ein Würfel besitzt acht Ecken ($\longrightarrow$), zwölf Kanten ($\longrightarrow$) und sechs Seiten ($\longrightarrow$). Alle Seiten sind gleich lang und haben einen rechten Winkel ($\longrightarrow$) zu einander. Der Würfel ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$).
Wurzel: Die Wurzel hebt die Potenz ($\longrightarrow$) auf. Dabei hebt die Quadratwurzel die Potenz zweiter Ordnung ($\longrightarrow$) auf.

Zahl: Eine Zahl besteht aus Ziffern ($\longrightarrow$).
Zahlenmengen: Eine Zahlenmenge ist eine Menge ($\longrightarrow$) in der sich Zahlen ($\longrightarrow$) einer Art befinden.
Zahlenstrahl: Ein Zahlenstrahl ist eine Gerade ($\longrightarrow$), die in gleichbleibenden Abständen ($\longrightarrow$) wachsende Zahlen vorzuweisen hat.
Zähler: Der Zähler ist bei der Darstellung ($\longrightarrow$) als Bruch ($\longrightarrow$) der Dividend ($\longrightarrow$).
Ziffer: Ziffern sind die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Aus ihnen setzen sich weitere Zahlen ($\longrightarrow$) zusammen.
Zylinder: Ein Zylinder hat einen Kreis ($\longrightarrow$) zur Grundfläche ($\longrightarrow$), der ebenso der Grundfläche gegenüberliegt. Die Kreise sind in der Höhe ($\longrightarrow$) mit einander verbunden und bilden den Rand ($\longrightarrow$) eines Volumens ($\longrightarrow$). Der Zylinder besitzt drei Flächen ($\longrightarrow$), zwei Kanten ($\longrightarrow$) und keine Ecke ($\longrightarrow$).

Implementierungsnotizen

Wurzeln ziehen
Erklärendes mathematische Wörter Verzeichnis