Repetitorium der Mathematik

mit Beispielen aus der Physik

von

Martin Lommatzsch

2015

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Repetitorium ist aus der Motivation entstanden den naturwissenschaftlichen Unterricht an Schulen für die Schüler zu erleichtern.

1 Mengen

Zahlen können in verschiedene Kathegorien eingeordnet werden. Dabei bilden die sogenannten natürlichen Zahlen die Basis aller anderen Zahlenmengen, die in der Schule besprochen werden. Die natürlichen Zahlen werden durch das Symbol $\mathbb{N}$ beschrieben und beinhalten Zahlen wie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$ Die mathematische Schreibweise dazu wäre: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, wobei die geschweiften Klammern $\{\}$ alle Zahlen aufgelistet werden, die zur Zahlenmenge gehören. Oftmals werden die natürlichen Zahlen auch ohne Null verwendet und werden im Folgenden als $\mathbb{N}^+$ bezeichnet. Die erste Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Bei genauem Betrachten fällt auf, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, was wie folgt geschrieben wird:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind alle Zahlen, die durch Brüche dargestellt werden können. Diese Zahlen werden rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{7}, 1, 2, \frac{34}{15}, ...\right\}$ genannt.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.2}$$

Die Folgen der Einführung der ganzen Zahlen sind gravierend, da die Subtraktion damit an Wichtigkeit verliert, da zum Beispiel aus $-1 = +(-1)$ wird.

Aber es gibt auch noch Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Diese nennt man reelle Zahlen $\mathbb{R}$ und beherbergt Zahlen wie zum Beispiel $\pi, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Die letzte Erweiterung der Zahlenmengen wird die Zahl $i = \sqrt{-1}$ gegeben und führt somit die komplexen Zahlen ein $\mathbb{C}$. Komplexe Zahlen werden in der Regel nicht an Schulen besprochen, dennoch hat ihre Einführung einige Vorteile beim Beschreiben von Zusammenhängen im Bereich der Analysis.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{1.3}$$

Es ist möglich Teilmengen auf zustellen, dazu werden bestimmte Mengenoperatoren wie $\subset$ verwendet. Sei die Menge $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Menge $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$ gegeben, dann existieren folgende Mengenoperationen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad & \text{Vereinung von } \mathbb{M} \text{ mit } \mathbb{K} \\
\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 4\} \qquad & \text{Durchschnitt von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \\
\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 2\} \qquad & \text{Differenz von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \\
\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{5, 6\} \qquad & \text{Differenz von } \mathbb{K} \text{ und } \mathbb{M}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Die Vereinigung wird auch gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ oder $\mathbb{K}$ befinden“, der Durchschnitt als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ befinden“ und die Differenz als „Alle Zahlen von $\mathbb{M}$ ohne die Zahlen aus $\mathbb{K}$ “.

Wenn eine Zahl ein Element einer Zahlenmenge ist, dann wird dies mathematisch geschrieben als:

$$4 \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Weitere wichtige Abkürzungen der Mathematik werden nun aufgelistet und im Folgenden verwendet.

$$\begin{array}{ll} \forall & \text{für alle gilt} \\ \exists & \text{es existiert} \\ \exists! & \text{es existiert genau ein} \\ \wedge & \text{und} \\ \vee & \text{oder} \\ \neg & \text{nicht} \\ := & \text{definiert als} \\ \| & \text{parallel zu} \\ \perp & \text{orthogonal (senkrecht) zu} \\ \angle & \text{Winkel zwischen} \\ \varnothing & \text{leere Menge} \\ \Rightarrow & \text{daraus folgt} \end{array} \tag{1.6}$$

So würde der Satz „Die Menge $\mathbb{M}$ beinhaltet alle Zahlen x, die die Bedingung erfüllen, dass sie Element der reellen Zahlen sind und dass es genau ein Zahl e gibt durch die man die Zahl x teilen kann, sodass 1 dabei heraus kommt.“ mathematisch so aussehen:

$$\mathbb{M} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists! e \forall x \mid \frac{x}{e} = 1 \right\} \tag{1.7}$$

2 Algebraische Grundlagen

Um den naturwissenschaftlichen Unterricht und mathematischen Erklärungen besser folgen zu können, müssen die Begrifflichkeiten der Algebra geklärt werden. Dazu werden im Laufe dieses Kapitels die wichtigsten mathematischen Vokabeln und Rechenvorschriften erläutert.

2.1 Grundrechenarten und Brüche

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begrifflichkeiten der Grundrechenarten in einer Tabelle geklärt werden.

Rechenart	1. Teil	Rechenoperator	2.Teil	Ergebnis
Addition	Summand	$+$	Summand	$=$ Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	$=$ Differenz
Multiplikation	Faktor	$\cdot$	Faktor	$=$ Produkt
Division	Dividend	:	Divisor	$=$ Quotient
Division (als Bruch)	Zähler	/	Nenner	$=$ Quotient

Durch die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden die Begriffe der Subtraktion nicht länger benötigt, da ein Summand oder sogar beide Summanden negativ sein können, sodass die Addition mit ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Verallgemeinerung von Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist. Auch die Divisionsbegriffe werden nur noch im Sinne der Bruchrechnung verwendet.
Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt stellen alle Zahlen, die durch einen Bruch dargestellt werden, die Zahlenmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden. Mit jeder Zahlenmenge sind alle Rechenoperationen zulässig.

Ein Bruch setzt sich aus seinem Nenner, der definiert in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes unterteilt wird, und den Zähler, der beschreibt wie viele Teile man vom Nenner tatsächlich hat (Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$). Mittels Brüchen kann man die gleiche Zahl auf verschiedene Arten darstellen, so ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $\frac{2}{4}$. Wenn der Nenner erhöht wird spricht man vom Erweitern. Bei einer Verkleinerung des Nenners wird vom Kürzen gesprochen.
Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert mit der man den Bruch erweitern möchte. Im folgenden Beispiel wird der Bruch im ersten Schritt mit zwei und danach mit vier erweitert.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \tag{2.1}$$

Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert mit der man den Bruch kürzen möchte. Im folgenden Beispiel wird der Bruch im ersten Schritt mit zwei und danach mit acht erweitert.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Bei der Addition beziehungsweise der Subktration von Brüchen müssen die Nenner der beteiligten Brüche so erweitert oder gekürzt werden, dass sie gleich sind. Dann können die Zähler verrechnet werden. Um immer einen gemeinsamen Nenner zu finden, kann man den ersten Bruch mit dem Nenner des zweiten Bruch und den zweiten Bruch mit dem Nenner des ersten Bruchs erweitern (wie im Subtraktionsbeispiel gezeigt).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{18-4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Bei der Multiplikation von Brüchen, werden die Nenner miteinander multipliziert und bilden so den neuen Nenner. Auch die Zähler werden miteinander multipliziert.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \tag{2.4}$$

Bei der Division muss man mit dem Kehrwert, also der Vertauschung von Nenner und Zähler des Divisors, multiplizieren.

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Ferner gilt bei Berücksichtigung von Parametern oder Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{Erweitern} \\ \frac{a \cdot n}{b \cdot n} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \quad \text{Kürzen} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b} \quad \text{Addition} \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{d \cdot b} \quad \text{Subktration} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{d \cdot b} \quad \text{Multiplikation} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \quad \text{Division} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Im den folgenden Abschnitten wird der Malpunkt zwischen einer Zahl und einem Parameter beziehungsweise einer Variablen oder zwischen Parametern beziehungsweise Variablen selbst nicht mehr notiert, es sei denn dieser ist zum Verständnis von besonderer Bedeutung.

2.2 Brüche als Dezimalzahlen

Um Brüche in Dezimalzahlen umzuwandeln bedarf es der schriftlichen Division oder eines guten Zahlengefühls. Anhand eines Beispiels soll ersteres verdeutlicht werden.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{7} = 2 : 7 = 0,285... \\ -0 \\ \hline \quad 20 \\ -14 \\ \hline \quad\ 60 \\ -\ \ 56 \\ \hline \quad\quad 40 \\ -\quad 35 \\ \hline \quad\ \vdots \end{array} \tag{2.7}$$

An Gleichung (2.7) ist zu erkennen, wie jeder Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden kann. Dabei wird nach der Subtraktion immer wieder eine Nachkommastellennull nach unten gezogen, sodass die Rechnung fortgesetzt werden kann bis kein Rest mehr existiert, eine Periodizität wie bei $\frac{1}{3} = 0,3333333333... = 0,\overline{3}$ festgestellt wird oder eine genauere Dezimalzahl nicht mehr erforderlich ist.

2.3 Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren wird oftmals mit Gleichungssystemen in Verbindung gebracht, allerdings ist das dahinter liegende Prinzip von fundamentaler Bedeutung für den Umgang mit mathematischem und naturwissenschaftlichem Wissen. Bei diesem Verfahren wird entweder für einen Parameter, einer Variable oder einen Term eine Zahl oder einem weiterführender Term eingesetzt, sodass es generell zu einer Vereinfachung, einer Beispielrechnung oder der Reduzierung von unbekannten Größen kommt.

Als Beispiel für das einsetzen von Zahlen soll das Erweitern bei der Bruchrechnung aus Gleichung (2.6). Hierbei soll gelten, dass für a der Wert 2, für b der Wert 3 und für den Erweiterungsparameter n die Zahl 4 eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } a = 2 \\ \Rightarrow \frac{2}{b} &= \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } b = 3 \\ \Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n} \quad \text{mit: } n = 4 \\ \Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wie bereits oben schon erwähnt wurde, ist dieses Verfahren auch mit Termen möglich.

$$
\begin{aligned}
a+b&=c && \text{mit: } a=d-e+f\\
\Rightarrow d-e-f+b&=c && \text{mit: } c=e-f-d\\
\Rightarrow d-e-f+b&=e-f-d
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

2.4 Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist von besonderer Bedeutung in der heutigen Gesellschaft, dabei versteckt sich hinter ihr nur der Bruch $\frac{1}{100}$. Denn pro cent bedeutet übersetzt nicht viel mehr als pro hundert. Aus diesem Bruch heraus hat sich historisch dann das Prozentzeichen % entwickelt. Der rechnerische Umgang ist durch das Ersetzen von % durch $\frac{1}{100}$ gegeben.

$$4\% = 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0,04 \tag{2.10}$$

Auch andere Rechnungen sind auf diesen Fakt reduzierbar: Sei ein Kapital von 1000€ mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt, wie hoch wären die Zinsen nach einem Jahr? Diese Frage kann leicht dargestellt werden als:

$$1000€ \cdot 4\% = 1000€ \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 4000€ \cdot \frac{1}{100} = \frac{4000€}{100} = 40€ \quad , \tag{2.11}$$

wobei genauere Ausführungen zu dieser Art von Rechnungen weiter unten im Kapitel „Wirtschaftsrechnungen“ folgen werden.

Der Dreisatz zur Frage „Wieviel sind 4% von 300?“ gestaltet sich als:

$$
\begin{aligned}
300 \ \text{entsprechen:}\ & 100\%\\
3 \ \text{entsprechen:}\ & 1\%\\
12 \ \text{entsprechen:}\ & 4\%
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Allerdings ist der Dreisatz durch das Wissen, dass $\% = \frac{1}{100}$ ist, wie folgt verkürzt durchzuführen:

$$300 \cdot 4\% = \frac{4 \cdot 300}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \quad , \tag{2.13}$$

wobei in Gleichung (2.13) die Zwischenschritte weggelassen werden könnten, da $\frac{300}{100}$ und $3 \cdot 4$ nicht von besonderer Schwierigkeit sind.

2.5 Assoziativ und Kommutativ

Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz helfen beim Rechnen den Überblick selbst über sehr komplex wirkende Sachverhalte zu behalten und sollten deswegen bekannt sein. In diesem Abschnitt werden diese beiden Gesetz und ihre Auswirkungen auf die Mathematik besprochen. Auch wird nochmals motiviert, warum es lohnend sein kann mit Brüchen und negativen Zahlen zu arbeiten.

2.5.1 Kommutator

Das Kommutativgesetz besagt, dass die Vertauschung von Zahlen, Parametern oder Variablen bei einer Rechenoperation keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Zur Überprüfung des Kommutativgesetzes dient der Kommutator, welcher folgende definierte Rechenanweisung ist:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \tag{2.14}$$

Ist der Kommutator gleich Null, so gilt, dass $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Wenn man nun Zahlen für die Parameter a und b einsetzt, so ist die Gültigkeit des Kommutativgesetzes intuitiv zu erkennen:

$$[2, 3] = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \tag{2.15}$$

Der allgemeine Kommutator ist für die Multiplikation definiert - wenn nun das Kommutativgesetz zum Beispiel für die Addition überprüft werden soll, wird am Komma des Kommutator gekennzeichnet welcher Operator untersucht wird.

$$\begin{aligned} [a,_+ b] &= a + b - b + a \\ [2,_+ 3] &= 2 + 3 - 3 + 2 = 5 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Es wird deutlich, dass ohne die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung und somit die Verallgemeinerung von Addition mit Subtraktion sowie der Multiplikation mit der Division, dass Kommutativgesetz nicht für die Subtraktion und Division gelten würde.

$$\begin{aligned} [a,_- b] &= a - b - b - a \neq 0 \\ [2,_- 3] &= 2 - 3 - 3 - 2 \neq 0 \\ [a,_: b] &= a : b - b : a \neq 0 \\ [2,_: 3] &= 2 : 3 - 3 : 2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung verändert sich Gleichung (2.17) zu:

$$\begin{aligned} [a,_+ -b] &= (a + (-b)) - (-b + a) = 0 \\ [3,_+ -2] &= (3 + (-2)) - (-2 + 3) = 1 - 1 = 0 \\ \left[a, \frac{1}{b}\right] &= a \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\ \left[2, \frac{1}{3}\right] &= 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Die besondere Bedeutung und die Konsequenzen des Kommutators werden im Kapitel „Differentiation und Integration“ weiter ausgeführt. Während die Klammern im nächsten Unterabschnitt genaustens erklärt werden

2.5.2 Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Reihenfolge bei einer Rechnung keine Relevanz besitzen darf. So macht es zum Beispiel keinen Unterschied bei der Addition oder Multiplikation von drei Zahlen, welche zuerst verrechnet werden.

$$\begin{aligned} a + b + c &= (a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c) \\ a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Reihenfolge in Gleichung 2.19 wird beschrieben durch die Klammern, welche angeben welche Rechnung zu erst vollzogen werden soll. Das jeweils letzte Gleichheitszeichen konnte nur durch die Vertauschung der geschriebenen Reihenfolge der Parameter a, b und c, also dem Kommutativgesetz, geschrieben werden. Erneut zeigt sich, dass die Verallgemeinerung von Addition mit Subtraktion sowie Multiplikation mit Division seine Vorteile hat, denn die Rechenoperatoren der Subtraktion und der Division sind nicht assoziativ:

$$\begin{gathered}(a-b)-c \neq a-(b-c)\\(a:b):c \neq a:(b:c)\end{gathered} \tag{2.20}$$

Allerdings gilt durch die Einführung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und des Bruchrechnens, dass der Subtraktionsoperator umgeschrieben werden kann in $- = +(-1)$ sowie der Divisionsoperator mit nur seltenen Ausnahmen aus dem mathematischen Gebrauch verschwindet.

2.5.3 Klammersetzung

Wenn eine Rechnung mehr als nur einen Rechenoperator beinhaltet, dann lohnt es sich Klammern zu verwenden, um den Überblick zu behalten oder auf bestimmte Sachverhalte aufmerksam zu machen. Im engeren Sinne ist die Rechnung mit Klammern auf die Multiplikation reduzierbar. Dabei wirkt der außenstehende Faktor auf jeden Summanden innerhalb der Klammer:

$$\begin{gathered}a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\\16=2\cdot 8=2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5=6+10=16\end{gathered} \tag{2.21}$$

Das Beispiel aus Gleichung (2.21) zeigt, wie der Faktor auf die Summanden innerhalb der Klammern wirkt und somit das gleiche Ergebnis produziert, wie die Multiplikation des Faktors mit der Summe der Klammer.

Bei der Verrechnung von Subtraktionsoperatoren mit einer Klammer gilt, dass das vorgestellte Minus lediglich eine verkürzte Schreibweise von $(-1)\cdot$ ist:

$$-(b+c)=(-1)\cdot(b+c)=(-1)\cdot b+(-1)\cdot c=-b-c \tag{2.22}$$

Auch Terme von Summen können miteinander multipliziert werden:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d \tag{2.23}$$

In Gleichung (2.23) wirken zu erst die Summanden der ersten Klammer auf die zweite Klammer, sodass dann die zweite Klammer wie in Gleichung (2.21) ausmultipliziert werden kann. Es wird auch ersichtlich, dass die Schreibweise mit den Klammern wesentlich kürzer ist. Das Ausmultiplizieren ist trotz der verkürzten Klammerschreibweise oftmals von Vorteil.

Die Klammersetzung ist nicht nur ein Bestandteil einer verkürzten Schreibweise, sondern auch von fundamentaler Bedeutung bei komplexeren Einsetzungsverfahren. So sei zum Beispiel $a = g + h$ und soll in die folgende Gleichung eingesetzt werden.

$$a\cdot d=(g+h)\cdot d=g\cdot d+h\cdot d \tag{2.24}$$

Wie Gleichung (2.24) zeigt, sollte bei einer Ersetzung der eingesetzte Term am besten prophylaktisch umklammert werden, um Fehler zu vermeiden. Erst nach einer Reflexion der Gleichung sollten dann die Klammern, wenn möglich, fallen gelassen werden.

Allerdings sollte auch die Umkehrung des Ausmultiplizierens, das Ausklammern, beherrscht werden, da es oftmals die Übersicht verbessert, wie in diesem Beispiel:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f + g = a \cdot (b + c + d + e + f) + g \tag{2.25}$$

Die Gleichung (2.25) zeigt, dass der Faktor a, welcher sich in vielen Summanden befindet, ausgeklammert wurde um die Übersicht zu verbessern. Generell gilt, dass man gleiche Vorfaktoren bei Summen ausklammern kann.

2.6 Potenzen

Wie schon zuvor wurden viele Rechenmethoden und neue Eigenschaften eingeführt, um die Übersicht oder Handhabung von rechnerischen Ausdrücken zu vereinfachen. Aus dem selben Grund wird die Potenz eingeführt, welche als verkürzte Schreibweise der wiederholten Multiplikation einer Zahl dient.

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^5 \\ 2^6 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Für Potenzen gelten Rechenregeln, welche schnell erklärt werden können, wenn der abkürzende Charakter wie in Gleichung (2.26) verinnerlicht wurde. Im Folgenden soll eine Regel gezeigt und dann begründet werden, dass diese gilt (außer die Regel ist intuitiv).

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= a^{2+3} = a^5 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ \Rightarrow a^3 : a^2 &= a^{3-2} = a^1 = a \end{aligned} \tag{2.27}$$

Aus der Bedingung, dass $\frac{a}{a} = 1$ sein muss und mit der Regel aus Gleichung (2.27) ergibt sich daraus, dass $a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^0 = 1$ sein muss. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Des Weiteren kann aus Gleichung (2.27) abgleitet werden, dass Rechnungen mit Potenzen nicht assoziativ sind:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 &= \left(a^3\right)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \\ a^{(3)^2} &= a^{3 \cdot 3} = a^9 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Außerdem lässt sich aus Gleichung (2.27) mit Gleichung (2.29) ersehen, dass

$$\begin{aligned} (a^2)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} &:= \sqrt{a} \quad , \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei $\sqrt{a}$ die Wurzel von a genannt wird. Die Wurzel habt die Potenz ^{2} auf, wie in Gleichung (2.30) zu sehen ist.

Somit gelten zusammengefasst folgende Regeln für die Potenzrechnung:

$$\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\
a^0 &= 1 \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\
(a^n)^m &\neq a^{(n^m)}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass bei dem Ausdruck a^n es sich bei a um die Basis und bei n um den Exponenten handelt.

2.6.1 10er Potenzen

Von allen Potenzen haben 2er Potenzen 2^n in der Informatik und die 10er Potenzen 10^n eine besonders wichtige Funktion inne. Grade in der Physik werden besonders große Größen mit besonders kleinen verrechnet. Die daraus resultierenden Ergebnisse sollen dann wieder in einer Größe angegeben werden, die dem Menschen zur Vorstellung genügen. Deswegen werden viele Größen mit Hilfe der 10er Potenzen umgerechnet. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \\
10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Jede Einheit ist meistens mit einer sprachlichen Abkürzung verbunden, so steht bei 1cm das „centi“ für $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Eine Tabelle mit der Auflistung vieler dieser Abkürzungen und ihre Bedeutung als 10er Potenz befinden sich im Anhang.
Während für alle Einheiten k für Kilo also Tausend steht, steht dies sprachlich bei der Einheit Byte B auch für Tausend. Allerdings versteckt sich hier durch den Fakt, dass Computer nur die 0 (Nein) und die 1 (Ja) kennen, eine andere Zahl:

$$\begin{aligned}
10^3 m &= 1km \\
10^6 m &= 1Mm \\
2^{10} B &= 1kB = 1024B \\
2^{20} B &= 1MB = 1048576B
\end{aligned} \tag{2.33}$$

2.6.2 Binomische Formeln

Mit Hilfe der Potenzen können auch die Summen potenziert werden:

$$\begin{aligned}
(x+d)\cdot(x+d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d + d\cdot x + d^2 = x^2 + 2\cdot d\cdot x + d^2 \\
(x+d)\cdot(x-d) &= (x+d)^2 = x^2 + x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - d^2
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Die beiden Gleichungen aus Gleichung (2.33) werden Binomische Gleichungen genannt und werden in der Beschreibung der Natur immer wieder vorgefunden und nicht zu Letzt deswegen im Mathematik und naturwissenschaftlichen Unterricht in Klausur- und Übungsaufgaben verwendet.

Generell kann man diese Binomischen Formel noch für jede Potenz verallgemeinern, dazu dient das sogenannt Pascal'sche Dreieck, welches die Vorfaktoren wiedergibt.

$(x+d)^0$	1
$(x+d)^1$	$x+d$
$(x+d)^2$	$x^2+2\cdot d\cdot x+d^2$
$(x+d)^3$	$x^3+3\cdot d\cdot x^2+3\cdot d^2\cdot x+d^3$
$(x+d)^4$	$x^4+4\cdot d\cdot x^3+6\cdot d^2\cdot x^2+4\cdot d^3\cdot x+d^4$
$(x+d)^5$	$x^5+5\cdot d\cdot x^4+10\cdot d^2\cdot x^3+10\cdot d^3\cdot x^2+5\cdot d^4\cdot x+d^5$

Dabei pflanzen sich die Vorfaktoren so weiter fort in dem die benachbarten aufaddiert werden. Die Potenzen des ersten Parameters oder Variable startet stets mit der höchsten Zahl und nimmt bei jedem weiteren Summanden ab, während die Potenz des zweiten Parameters zunimmt. Die Vorfaktoren, welche sich im Pascal'schen Dreieck befinden, werden im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch die sogenannten Binominialkoeffizienten erneut auftauchen und nochmals erläutert.

2.7 Logarithmen

Da die Potenzen eingeführt wurden, sollte auch eine Rechenvorschrift eingeführt werden um den Exponenten zu bestimmen. Diese wird Logarithmus genannt, welche folgende Frage in mathematischer Art und Weise stellt: „Die Basis und das Ergebnis seien bekannt, welche Größe muss der Exponent haben?“

$$a^c = b \Leftrightarrow b = \log_a c \tag{2.35}$$

Gelesen wird $\log_a c$ als „der Logarithmus von c zur Basis a“. Wie für die Potenzen gelten auch für die Logarithmen Regeln, welche sich aus den Potenzgesetzen ableiten lassen.

$$\begin{aligned} a^{n\cdot m} = a^n\cdot a^m \Leftrightarrow \log_a(n\cdot m) &= \log_a n + \log_a m \\ \Rightarrow \log_a \frac{n}{m} &= \log_a n - \log_a m \\ \log_a n^m &= m\cdot\log_a n \\ a^{\log_a n} &= n \\ \log_a n &= \frac{\log_b a}{\log_b n} \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen für bestimme Werte der Basis verwendet:

$$\begin{aligned} \log_{10} n &= \lg n \\ \log_2 n &= \mathrm{lb}\ n \\ \log_e n &= \ln n \quad , \end{aligned} \tag{2.37}$$

wobei $e = 2,718281...$ die Euler'sche Zahl ist, deren Bedeutung im Kapitel der Funktionen im Abschnitt der Exponentialfunktionen und bei der Differentiation noch gerecht wird.

2.8 Äquivalenzumformung

Die Äquivalenzumformung stellt die Basis für den Erkenntniserwerb und steht als selbstverständliches Vorwissen aller Schüler im Zentrum des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Wort nur die Bedingung, dass auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichens „=“ immer die gleichen Operationen durchgeführt werden müssen. Dabei wird hinter dem Kommandostrich „|“ hinter der umzuformenden Gleichung die nachfolgende Operation angegeben.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad |+2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Die Gleichung (2.38) zeigt, wie auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichen die Zwei addiert wurde. Dabei steht der Pfeil $\Rightarrow$ für „daraus folgt“, und ist nicht zwingend erforderlich bei einer Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \qquad |-2 \\ 6 &= 6 \qquad |\cdot 3 \\ 18 &= 18 \qquad |:2 \\ 9 &= 9 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Die Gleichung (2.39) zeigt, wie im ersten Schritt auf beiden Seiten des Äquivalenzzeichen die Zwei subtrahiert wurde. Im zweiten Schritt werden beide Seiten mit drei multipliziert und im dritten Schritt durch zwei dividiert. In diesen beiden Beispielen sind die vier Grundrechenarten gezeigt, was nicht bedeutet, dass andere Rechenoperationen ausgeschlossen sind.

Äquivalenzumformungen dienen dazu um Gleichung umzustellen und so unbekannte Parameter zu bestimmen. Parameter sind Platzhalter für Zahlen und werden in der Regel mit Buchstaben am Anfang des Alphabets beschrieben. Wenn keine genaue Beschreibung für die Parameter angegeben sind, gilt $a, b, ... \in \mathbb{R}$. Im folgenden Beispiel soll nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{d}\cdot x + b - c \qquad |+c \\ c &= \frac{a}{d}\cdot x \qquad |-b \\ c - b &= \frac{a}{d}\cdot x \qquad |\cdot d \\ d\cdot(c-b) &= a\cdot x \qquad |:a \\ \frac{d\cdot(c-b)}{a} &= x \end{aligned} \tag{2.40}$$

Jede Rechenoperation, die den Wert nicht verändert ist zulässig! Die Addition der 0 und die Multiplikation der 1 sind solche Operationen. Dabei ist 0 das so genannte neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4} = \frac{4}{8} &\qquad \text{Multiplikation der 1} \\ 4 = 4 + 0 = 4 + 6 - 6 = 10 - 6 &\qquad \text{Addition der 0} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Die Beispiele aus Gleichung (2.41) zeigen, dass die Multiplikation des neutralen Elements mit dem Erweitern von Brüchen unmittelbar in Verbindung steht.

2.9 Substitution

Bei jeder Rechnung ist es dem Rechnenden freigestellt Abkürzungen einzuführen. Dieser Prozess wird Substitution genannt. Im folgenden Beispiel wird die Summe innerhalb der Klammer substituiert:

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \qquad \text{mit: } y := x + a \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass bei der Substitution ersetzten Variablen vollständig eliminiert werden.

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \cdot x \qquad \text{mit: } y := x + a \;\Rightarrow\; x = y - a \\ &= y^2 \cdot (y-a) = y^3 - a \cdot y^2 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Jede Substitution ist zulässig. Wichtig wird dieser Prozess besonders wenn komplexere Aufgaben dadurch wesentlich vereinfacht werden können. Aus diesem Grund wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ nochmal besonders auf die Substitution eingegangen.

2.10 Anmerkungen

Nach dem alle wichtigen Rechenoperationen und verkürzte Schreibweisen eingeführt wurden, wird von diesem Zeitpunkt an auf den Multiplikationsoperator $\cdot$, soweit es eben möglich ist, verzichtet. Nur noch in speziellen Fällen für besondere Erklärungen wird der Multiplikationsoperator $\cdot$ wieder in Erscheinung treten. Zu dieser verkürzten Notation einige Beispiele:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= ax \\ x \cdot x &= xx = x^2 \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{x} &= \frac{1}{a}\frac{b}{x} = \frac{b}{ax} \\ a \cdot \sqrt{x} &= a\sqrt{x} \\ a \cdot \log_b c &= a \log_b c \end{aligned} \tag{2.44}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Zufallsexperimente

3.2 Permutationen

3.3 Fakultäten

3.4 Binominal Koeffizienten

4 Geometrie

4.1 Rechteck

4.2 Dreieck

4.3 Winkel

4.4 Spezielle Vierecke

4.5 Volumenbestimmungen

4.6 Kreis

4.7 Kugeln

4.8 Ellipse

5 Trigonometrie

5.1 Sinus und Kosinus

5.2 Tangens und Kotangens

5.3 Sinus- und Kosinussatz

5.4 Identitäten

6 Reihen

7 Grenzwerte

8 Funktionen

8.1 Wertetabellen

8.2 Geraden

8.3 Parabeln

8.4 Umkehrfunktionen

8.5 Hyperbel

8.6 Polynome

8.7 Gebrochen rationale Funktionen

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) & : (x-2) = 2x^3+6x^2+8x+24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & & \\
\hline
 & 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 & \\
 & -(6x^3 & -12x^2) & & & \\
\hline
 & & 8x^2 & +8x & -48 & \\
 & & -(8x^2 & -16x) & & \\
\hline
 & & & 24x & -48 & \\
 & & & -(24x & -48) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

8.8 Trignometische Funktionen

8.9 Exponentialfunktion

9 Wirtschaftsrechnungen

10 Vektoren

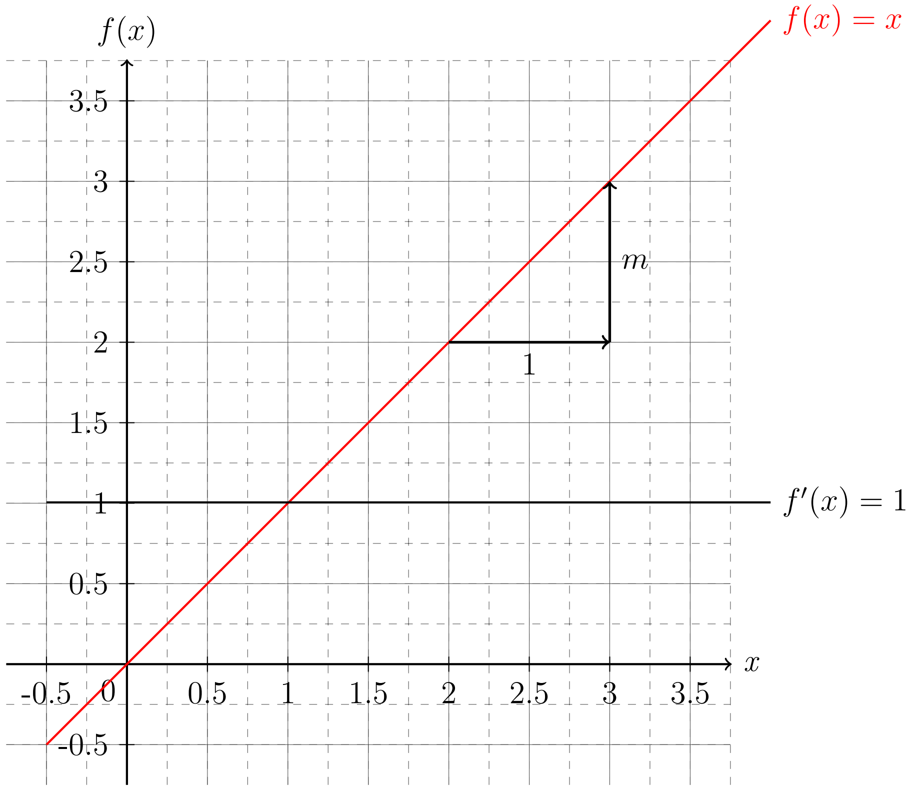
10.1 Eigenschaften

10.2 Spatprodukt

10.3 Matrizen

11 Differentiation und Integration

Die Differentiation und die Integration sind wichtige Kernelemente der Analysis. Um diese beiden Operationen effektiv einzuführen, sollte die Geradengleichung $f(x) = mx + b$ mit der Steigung der Geraden m und dem Ordinatenschnittpunkt b nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Seien die Geraden $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ gegeben, dann kann durch die Veranschaulichung im Koordinatensystem gesehen werden, dass die Steigung der Gerade $f(x)$ gleich der dem Wert der Geraden $f'(x)$ also gleich eins ist. Die Steigung der Gerade $f'(x)$ ist Null, da es sich um eine Konstante handelt wie im Koordinatensystem zu erkennen ist. Dabei ist der Begriff „Steigung“ so definiert: „Wenn man einen Einheitenschritt nach rechts von der Geraden aus geht, ist die Steigung der Geraden gleich der Einheitenschritte orthogonal zum gegangenen Schritt - folglich nach oben für positive Steigung und nach unten für negative Steigung.“



11.1 Operatoralgebra

Mathematisch lässt sich ein Ausdruck definieren, der sprachlich fordert: „*Bestimme die Steigung von der Funktion!*“ Diese Forderung wird durch den sogenannten Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ erfüllt, der „*d nach d x*“ gelesen wird. Ein solcher Operator wirkt nur nach rechts, dass heißt alle Größen die links vom Operator stehen bleiben unangetastet. Somit soll folgende Rechenvorschrift für den Operator gelten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= 1 \qquad \text{siehe Funktionenbeispiel} \\ \frac{d}{dx}1 &= 0 \qquad \text{im Koordinatensystem} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Somit würde das Kommutativgesetz, welches für normale Zahlen, Parameter und Variablen gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 0 \\ &a \cdot b - b \cdot a = 0 = [a, b] \qquad , \end{aligned} \tag{11.2}$$

wobei $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$ der sogenannte Kommutator ist, sich wie folgt verändern:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \qquad . \end{aligned} \tag{11.3}$$

Durch Äquivalenzumformung der Gleichung (11.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} &= 1 \qquad \left| +x\frac{d}{dx} \right. \\ \frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} \end{aligned} \tag{11.4}$$

Dieser Ausdruck ist von zentraler Bedeutung, der es durch ein triviales Einsetzungsverfahren ermöglicht den Operator an einer Variable vorbei zu ziehen. Sei zum Beispiel die Steigung der Funktion $g(x) = x^2$ gesucht, dann lässt sich dies mit Hilfe der Gleichung (11.4) bestimmen, indem Terme der Form $\frac{d}{dx}x$ durch den Ausdruck $\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \\ &= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \\ &= x + x\frac{d}{dx}x \\ &= x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\ &= x + x + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{11.5}$$

Ähnlich verhält sich das Prozedere mit der Funktion $h(x) = x^3$, wobei lediglich die Anzahl der Schritt zunimmt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^3 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \cdot x \\
&= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right) x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\frac{d}{dx}x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\frac{d}{dx} \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\
&= x^2 + x^2 + x^2 + x^3 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\
&= 3x^2
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Dies kann für x^4 und höhere Potenzen von x auch bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der Schritte nur weiter erhöhen würde. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse ist eine Regel für die Ableitung von Polynomen erkennbar, sodass die Prozedur des wiederholten Einsetzens überflüssig wird.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}1 &= 0 \\
\frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} = 1 \\
\frac{d}{dx}x^2 &= 2x + x^2\frac{d}{dx} = 2x \\
\frac{d}{dx}x^3 &= 3x^2 + x^3\frac{d}{dx} = 3x^2 \\
\frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3 + x^4\frac{d}{dx} = 4x^3 \\
\frac{d}{dx}x^5 &= 5x^4 + x^5\frac{d}{dx} = 5x^4
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Gleichung (11.7) zeigt deutlich, dass sich die Potenz bei der Anwendung vom Differentialoperator um eins verringert und als Vorfaktor wieder zu finden ist. Somit ergibt sich folgende allgemeine Regel für die Anwendung des Differentialoperators - es wird auch vom „Ableiten“ gesprochen - auf ein Polynom:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Als verkürzende Schreibweise soll von nun an gelten:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \qquad . \tag{11.9}$$

Dabei bedeutet der Strich bei $f'(x)$, dass es sich um die Ableitung der Funktion $f(x)$ handelt und dass der wirkende Differentialoperator nach x (also $\frac{d}{dx}$) gewirkt hat. So gilt zum Beispiel ebenso:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}f(y) = f'(y) \qquad & \text{Funktion von } y \text{ deswegen Differentialoperator nach } y \\
\frac{d}{dz}f(z) = f'(z) \qquad & \text{Funktion von } z \text{ deswegen Differentialoperator nach } z \\
\frac{d}{dt}f(t) = \dot{x}(t) \qquad & \text{Funktion von } t \text{ deswegen Differentialoperator nach } t,
\end{aligned} \tag{11.10}$$

wobei letztes ein Spezialfall der Physik ist, da nach der Zeit t abgeleitet wurde. Generell werden in der Physik immer die Ableitungen nach der Zeit mit einem Punkt über der Funktion beschrieben.

11.2 Ableitungsregeln

Die erste Ableitungsregel wurde schon in Gleichung (11.8) beschrieben und gilt für jede Art von Polynomen.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \tag{11.11}$$

Diese Ableitungsregel ist besonders nützlich im Zusammenhang mit den Potenzgesetzen, denn so lassen sich bestimme Funktionen über einer Variable als Basis mit einer Zahl im Exponenten darstellen. Mit Hilfe dieser Ableitungsregel besteht die Möglichkeit wesentlich komplexere, also zusammengesetzte, Funktionen abzuleiten. Dazu sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt unter der Verwendung der Regeln für die Klammersetzung:

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}f(x) \tag{11.12}$$

Sei nun $f(x) = g(x)h(x)$ und zum Beispiel mit $g(x) = x^n$ und $h(x) =^m$, dann gilt unter Berücksichtigung der Potenzgesetze und Gleichung (11.11) und der verkürzten Schreibweise aus Gleichung (11.9):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) &= \frac{d}{dx}x^n x^m = \frac{d}{dx}x^{n+m} = (n+m)x^{n+m-1} \\
&= \frac{d}{dx}x^n x^m = \left(nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\right)x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\frac{d}{dx}x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\left(mx^{m-1} + x^m\frac{d}{dx}\right) \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n m x^{m-1} \\
&= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\
&= nx^{n-1+m} + mx^{n+m-1} == (n+m)x^{n+m-1}
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Wie Gleichung (11.13) zeigt, kann diese Aufgabe schnell über die Potenzgesetze in einer Zeile gelöst werden. Dieses Ergebnis soll als Vergleich dienen, um die Ableitungsregel für Polynome auf die zusammengesetzte Funktion $f(x)$ anzuwenden. Dabei wird erneut wie schon beim Herleiten der Ableitungsregel für Polynome das Einsetzungsverfahren verwendet. In der vorletzten Zeile dieser Rechnung ist zu erkennen, dass

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad , \tag{11.14}$$

gilt. Diese Ableitungsregel aus Gleichung (11.14) wird Leibnizregel oder Produktregel genannt. Ihr Nutzen wird sich offenbaren wenn nicht nur Polynome zur Diskussion stehen.

Mit der Leibnizregel und der Substitution, soll nun noch eine weitere Ableitungsregel bestimmt werden. Dabei soll gelten, dass die Funktion $f(x)$ eine verkettete Funktion sein soll: $f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ mit dem Beispiel, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$ sei - mit den Ableitungen $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 2$. Wie die Verkettung fordert, wir $h(x)$ in die Funktion $g(x)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Ableitung mit der Überprüfung des Ergebnisses durch die Ableitungsregel der Polynome sowie den Binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) &= \frac{d}{dx}(2x+1)^2 = \frac{d}{dx}4x^2 + 4x + 1 = 8x + 4 \\
&= \frac{d}{dx}(2x+1)(2x+1) \quad \text{Leibnizregel} \\
&= (2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1) + (2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1) \\
&= (2x+1)\,2 + (2x+1)\,2 \\
&= 2 \cdot 2\,(2x+1) \quad \text{Vergleich mit } g'(x),\ h'(x) \text{ und } h(x) \\
&= h'(x) \cdot g'(h(x)) = 8x + 4
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Die letzte Zeile offenbart durch den Vergleich der Terme mit den Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ sowie ihren Ableitungen $g'(x)$ und $h'(x)$ die allgemeine Regel der Ableitung von verketteten Funktionen.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \tag{11.16}$$

Diese Regel wird Kettenregel genannt und wird ihre Bedeutung erst offenbaren, wenn Funktionen angenommen werden, deren abgekürzte Schreibweise ihre Herkunft aus Polynomen nicht mehr offensichtlich zeigen.
Mittels der Substitution $y := h(x)$ würde das Polynom in der Klammer ersetzt werden. Allerdings muss auch der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ nach $\frac{d}{dy}$ umgewandelt werden. Dies geschieht wie folgt (Hier sollte erwähnt werden, dass es sich lediglich um eine Nebenrechnung handelt, um die Substitution zu durchführen zu können. Die gezeigten Schritte der Rechnung sehen intuitiv aus, sind allerdings nicht ohne weitere Prüfungen und tiefer liegende Mathematik durchführbar.):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} &= h'(x) \qquad |\cdot dx \\
dy &= dx \cdot h'(x) \qquad |: h'(x) \\
\Rightarrow dx &= \frac{dy}{h'(x)} \qquad \text{eingesetzt in: } \frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} &= h'(x)\frac{d}{dy}
\end{aligned} \tag{11.17}$$

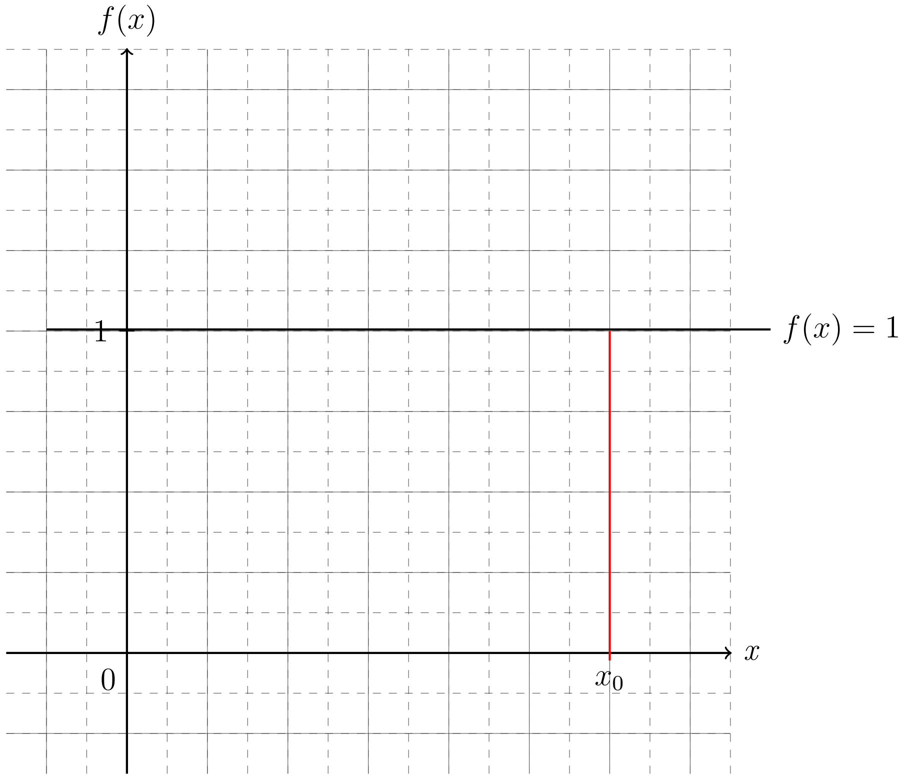
Der gefundene Ausdruck für $\frac{d}{dx}$ wird nun mit eingesetzt, wenn die Substitution durchgeführt wird.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) \qquad \text{mit: } y := h(x) \text{ und: } \frac{d}{dx} = h'(x)\frac{d}{dy} \\ &= h'(x)\frac{d}{dy}g(y) \\ &= h'(x)g'(y) \qquad \text{mit: } y = h(x) \text{ zurück eingesetzt} \\ &= h'(x)g'\left(h(x)\right)\end{aligned} \tag{11.18}$$

Gleichung (11.17) und (11.18) zeigen eine Herleitung der Kettenregel ohne Spezifizierung der Funktionen, sodass festgehalten werden kann, dass jede differenzierbare verkettete Funktion über diese Regel ableitbar ist.

11.3 Integration

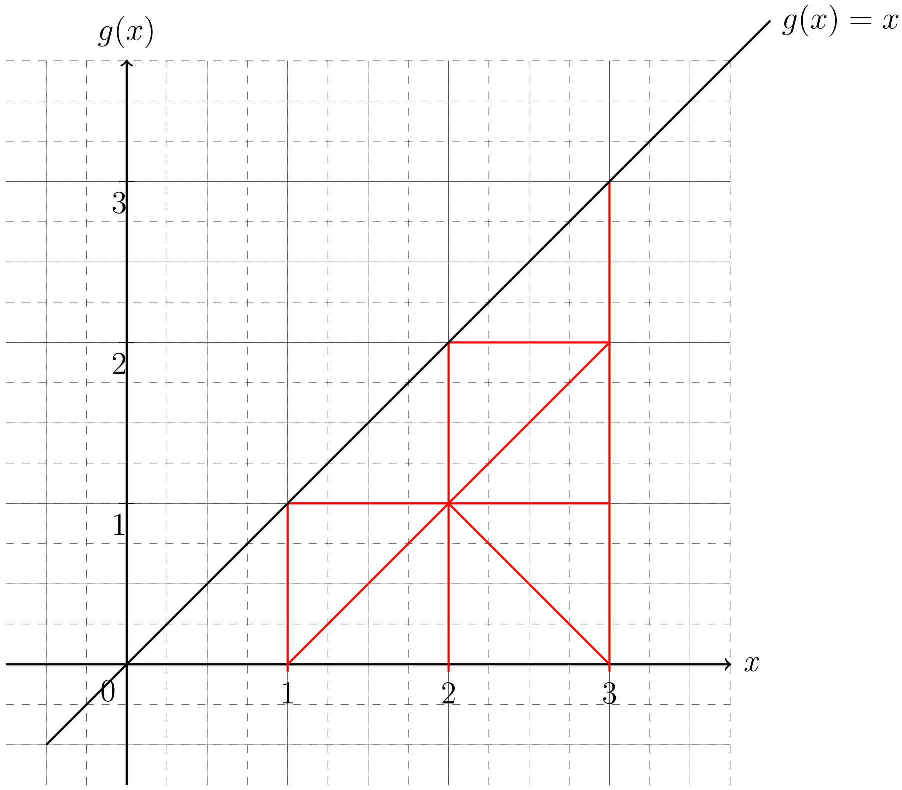
Nachdem die Differentiation zur Bestimmung der Steigung einer Funktion eingeführt wurde, soll nun eine weitere Eigenschaft der Funktion untersucht werden. Sei eine Funktion $f(x) = 1$ gegeben. Nun soll der Flächeninhalt bestimmt werden, der von der x-Achse und Funktion $f(x)$ eingeschlossen wird, von $x = 0$bis $x = x_0$ bestimmt werden.



Der Flächeninhalt als Funktion $F(x)$ wäre gegeben als:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \cdot x \qquad \text{mit: } f(x) = 1 \\ F(x) &= x \qquad \text{mit: } x = x_0 \\ \Rightarrow F(x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{11.19}$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ wäre wieder die Funktion $f(x)$. Als weiteres Beispiel soll die Funktion $g(x) = x$ gegeben sein und erneut soll der Flächeninhalt als Funktion von x, also $G(x)$, bestimmt werden.



Der Flächeninhalt unterhalb der Funktion $g(x)$ bildet ein Dreieck. Somit ist die Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ gegeben als:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{g(x) \cdot x}{2} \qquad \text{mit: } g(x) = x \\ G(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \tag{11.20}$$

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ wäre $\frac{1}{2}2x = x = g(x)$. Somit wäre erneut die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $G(x)$ die Ausgangsfunktion $g(x)$. Aus dieser Erkenntnis kann wieder aus der sprachlichen Forderung „Bestimme den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x)$ der durch die Grenzen $x = a$ bis $x = b$ und x-Achse begrenzt ist!“ einen mathematischen Formalismus entstehen lassen:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{11.21}$$

Diese Operation wird Integration genannt. Dabei wird Gleichung (11.21) gelesen als „Die Stammfunktion $F(x)$ ist gleich das Integral über die Funktion $f(x)$ nach x in den Grenz von a bis b“.

11.4 Integrationsregeln

Nachdem der Formalismus eingeführt wurde, soll ein allgemeines Polynom x^n untersucht werden. Dazu wird die Ableitung von x^n gebildet und über Äquivalenzumformung und mit Potenzgesetzen die Gleichung umgestellt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \qquad \text{substituiere: } m = n-1 \Rightarrow n = m+1 \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^{m+1} &= (m+1)x^m \qquad |: (m+1) \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1} &= x^m \qquad |\cdot dx \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1}dx &= x^m dx \qquad \Big| \int \\
\Rightarrow \int x^m dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Die letzte Zeile der Gleichung (11.22) zeigt die hergeleitete Regel für die Integration von Polynomen. Nachdem das generelle Integrationsgesetz für Polynome gefunden wurde, die Produktregel als Ausgangspunkt für die Herleitung einer weiteren Integrationsregel dienen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad |\cdot dx \\
\frac{d}{dx}f(x)g(x)dx &= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx \qquad \Big| \int \\
f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \Big| - \int f(x)g'(x)dx \\
\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx
\end{aligned} \tag{11.23}$$

Diese Integrationsregel wird „partielle Integration“ genannt. Sie wird dazu verwendet Funktionsprodukte zu integrieren bei dem eine Teilfunktion $f(x)$ leicht zu integrieren ist, während die andere Teilfunktion $g(x)$ eine Funktion ist die eine unbekannte Stammfunktion besitzt, deren Ableitung allerdings bekannt ist. Generell wird diese Integrationsregel dazu verwendet, um das Produkt eines Polynoms mit einer anderen Funktion zu integrieren. Dabei bildet in der Regel das Polynom die Funktion $g(x)$, sodass dieses nach mehrfacher Anwendung der partiellen Integration und dem Einsetzungsverfahren dieses Polynom restlos verschwindet und die Funktion $f(x)$ alleinstehend unter dem Integral vorzufinden.

Abschließend soll die Kettenregel in eine Regel der Integration überführt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) &= g'(x)f'\left(g(x)\right) \qquad |dx \\
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)dx &= g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \Big| \int \\
f\left(g(x)\right) &= \int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx
\end{aligned} \tag{11.24}$$

Durch Substitution lässt sich dieses Integral lösen, hierbei wird $y := g(x)$ gewählt:

$$\begin{aligned}
&\int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\
&= \int f'\left(y\right)dy = f(y) \qquad \text{zurück eingesetzt: } g(x) = y \\
&= f\left(g(x)\right)
\end{aligned} \tag{11.25}$$

Aus den Gleichungen (11.24) und (11.25) ist erkennbar, dass die Kettenregel der Ableitung überführt in die Integration durch Substitution bearbeitet werden kann. Aus diesem Grund wird diese Regel „Integration durch Substitution“ genannt.

Mit Grenzen würde sich bei der Integration durch Substitution die Grenzen mit verändern:

$$\begin{aligned} &\int_a^b g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy \end{aligned} \tag{11.26}$$

Dabei wird die obere Grenze und die unteren Grenze eingesetzt in die Stammfunktion und anschließend von einander subtrahiert. Für diesen Prozess gibt es zwei verschiedene Schreibweisen. Die erste Schreibweise umklammert den Term, in den einzusetzen ist, während die zweite Schreibweise einen senkrechten Strich vorsieht und aussagt, dass für alle Variablen links vom Strich eingesetzt werden soll.

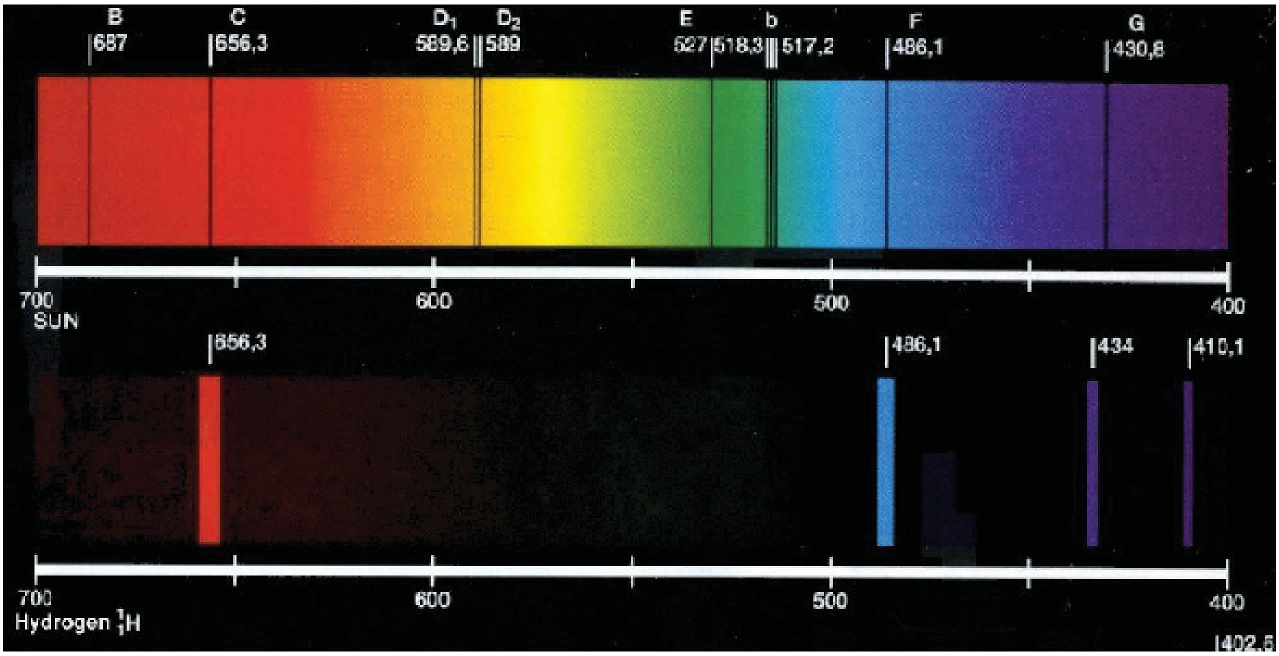
$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy &= \left[f(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \left. f(y)\right|_{x=g(a)}^{x=g(b)} \\ &= f\left(g(b)\right) - f\left(g(a)\right) \end{aligned} \tag{11.27}$$

Da nun alle Regeln für die Integration und der Differentiation bekannt sind, werden im folgenden Abschnitt beide Methoden dazu verwendet um spezielle Gleichungen zu lösen - die sogenannten Differentialgleichungen.

11.5 Differentialgleichungen 1. Ordnung

11.6 Differentialgleichungen 2. Ordnung

12 Komplexe Zahlen


B
687
C
656,3
D1
589,6
D2
589
E
527
518,3
b
517,2
F
486,1
G
430,8
700
SUN
600
500
400
656,3
486,1
434
410,1
700
600
500
400
Hydrogen ¹₁H
402,6

13 Anhang

13.1 Pascal'sches Dreieck

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

13.2 10er Potenzen

Symbol	Name	10er Potenz	Ausgeschrieben	Sprachlich
Y	Yotta	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliade
E	Exa	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	10^{15}	1.000.000.000.000.000	Billarde
T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	10^{9}	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	10^{6}	1.000.000	Million
k	Kilo	10^{3}	1.000	Tausend
h	Hekto	10^{2}	100	Hundert
da	Deka	10^{1}	10	Zehn
		10^{0}	1	Eins
d	dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	centi	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
μ	mirko	10^{-6}	0,000.001	Millionstel
n	nano	10^{-9}	0,000.000.001	Milliardstel
p	piko	10^{-12}	0,000.000.000.001	Billionstel
f	femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	zepto	10^{-21}	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	yokto	10^{-24}	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel