Repetitorium der Mathematik

mit Beispielen aus der Physik

von

Martin Lommatzsch

8. April 2016

Diese Version kann inhaltliche und sprachliche Tippfehler enthalten und hat somit keinen Anspruch auf Richtigkeit. Außerdem kann nicht gewährleistet werden, dass der „Lehrplan“ jedes Bundeslandes abgedeckt ist.

Neueste Version des Buches, durch einen Klick, immer hier zu finden!

Mehr als 525 Onlineübungsaufgaben des Buches sind nach Themengebieten sortiert, durch einen Klick, immer hier zu finden!

Vorwort

Dieses Repetitorium ist aus der Motivation entstanden den naturwissenschaftlichen Unterricht an Schulen für die Schüler zu erleichtern. Dazu werden in den ersten Kapiteln mathematische Grundlagen in Form von Vokabeln, Zahleneigenschaften, Rechenoperationen und Abkürzungen eingeführt. Da viele Schüler von der gesellschaftlichen Meinung, Mathematik und Naturwissenschaften seien schwer, zu Ausreden in der Leistung inspiriert werden, soll in diesem Buch explizit auf die Einfachheit der mathematischen Sprache hingewiesen werden. Dieser Trivialität gehen allerdings einige Dinge voraus, die dem durchschnittlichen Schüler erst nach seiner Schullaufbahn bewusst werden - das Mathematik vom Vokabular legt, da Wörter und ihre Abkürzungen eindeutige Bedeutungen erhalten, welche in anderen Sprachen, wie Deutsch oder Englisch, oftmals erst durch den Satz eine genauere Bedeutung erhalten. Auch soll dargestellt werden, dass es in der Mathematik im Vergleich zu anderen Sprachen keine Ausnahmen gibt.

Dieses Buch soll ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht werden und als Wiederholungswerk für die naturwissenschaftlichen Fächer dienen. Aus diesem Grund wird sich dieses Werk ständig weiterentwickeln und dabei auf das Verständnis der Schüler ausgerichtet werden. Als Grundlage zum Verständnis dieses Buches soll der Umgang mit Zahlen und Grundrechenoperationen genügen, sodass es für jeden Schüler einer weiterführenden Schule geeignet ist. In diesem Buch wird schnell deutlich, dass das mathematische Verständnis stark verknüpft mit der korrekten Verwendung von definierten Begriffen ist. Deswegen sollte jeder Schüler angeregt werden die jeweiligen eingeführten Vokabeln zu verinnerlichen.

Zu jedem Abschnitt werden Übungsaufgaben existieren, welche mit den Lösungen im Anhang verglichen werden können. Die Aufgaben sind so gestellt, dass sie das Verständnis überprüfen und vertiefen. Deswegen ist es ratsam, wenn alle Aufgaben bearbeitet und erst danach mit den Lösungen verglichen werden. In der Geometrie werden auch Aufgaben zum Zeichnen von Körpern gestellt. In den Lösungen werden allerdings keine Lösungen zu diesen Zeichnungen vorhanden sind. Auch werden Aufgaben gestellt, die erst mit Wissen aus den nachfolgenden Kapiteln zu lösen sind. Diese Aufgaben sollten bearbeitet werden, wenn das Wissen mit dem Umgang der Abkürzungen oder Operatoren bekannt ist, um das schon bestehende Wissen zu reaktivieren und weiter zu vertiefen. Bei der Betrachtung der Unteraufgaben wird auffallen, dass die Unteraufgaben an Schwierigkeit gewinnen, sodass eine Binnendifferenzierung hierüber erlangt werden kann. Den Schülern besteht somit auch die Möglichkeit ihre Kompetenzen und Fähigkeiten auszureizen, sodass jeder Schüler gefordert und gefördert werden kann, da von jedem Schwierigkeitsgrad genügend Aufgaben vorhanden sein werden.

Alle Wörter die leicht *schräggestellt* sind, können im Anhang des Buches in einem mathematischen Wörterverzeichnis mit einer kurzen Erklärung nachgeschlagen werden. Der Abschnitt zum Nachschlagen der Wörter soll dem Schüler den Umgang mit der mathematischen Sprache erleichtern und auch aufzeigen, wie aufbauend die mathematische Sprache ist.

Zu Letzt sei angemerkt, dass in absehbarer Zeit wesentlich mehr Aufgaben mit Lösungen es in dieses Buch schaffen werden. Des Weiteren werden auch Aufgaben folgen, die Abschnitte voraussetzen, welche weiter hinten im Buch sind. Zu diesen Aufgaben werden Hinweise auf die betreffenden Abschnitte geliefert, sodass je nach Vorwissen auch komplexere Aufgaben bearbeitet werden können. Generell sollten die Schüler die Aufgaben mit den Rechenmethoden lösen wie es ihnen beliebt, da das Ergebnis das wichtigste an einer Rechnung ist. Folglich sind alle Rechenwege zugelassen, die keine Fehler beinhalten.

„Die Bildung kommt nicht vom Lesen, sondern vom Nachdenken über das Gelesene.“

-Carl Hilty

„Gebildet ist der Mensch, der die höchsten Ergebnisse des Geistes in physiologische Reflexe umformt.“

-Nicolás Gómez Dávila

Besonderen Dank gebührt den Menschen, die bei der Erstellung dieses Buches geholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen **8**

2 Algebraische Grundlagen **15**
2.1 Grundrechenarten . . . 15
2.2 Bruchrechnung . . . 23
2.3 Brüche als Dezimalzahlen . . . 36
2.4 Parameter . . . 43
2.5 Einsetzungsverfahren . . . 47
2.6 Prozentrechnung . . . 50
2.7 Negative Zahlen . . . 61
2.8 Assoziativ und Kommutativ . . . 67
2.9 Potenzen . . . 76
2.10 Logarithmen . . . 83
2.11 Äquivalenzumformung . . . 85
2.12 Quadratische Ergänzung . . . 97
2.13 Substitution . . . 102
2.14 Gleichungssysteme . . . 104
2.15 Fakultäten und Binominalkoeffizienten . . . 107
2.16 Gemischte Algebraaufgaben . . . 109

3 Geometrie **117**
3.1 Zahlenstrahl . . . 117
3.2 Winkel . . . 121
3.3 Strahlensatz . . . 127
3.4 Rechteck . . . 129
3.5 Dreieck . . . 132
3.6 Symmetrien und Spiegelungen . . . 144
3.7 Spezielle Vierecke . . . 149
3.8 Mehrdimensionale Vielecke . . . 158
3.9 Kreis . . . 173
3.10 Zylinder und Kegel . . . 180
3.11 Kugeln . . . 185
3.12 Tangenten und Sekanten . . . 192
3.13 Zirkelkonstruktionen . . . 193
3.14 Gemischte Geometrieaufgaben . . . 197

4 Trigonometrie **206**
4.1 Gemischte Trigonometrieaufgaben . . . 219

5 Funktionen **224**
5.1 Wertetabellen und Punkte . . . 227
5.2 Geraden . . . 232
5.3 Stufenfunktionen . . . 240
5.4 Parabeln . . . 243
5.5 Umkehrfunktionen . . . 250
5.6 Hyperbeln . . . 253
5.7 Grenzwerte . . . 256
5.8 Polynomfunktionen . . . 259
5.9 Reihen . . . 262
5.10 Gebrochen rationale Funktionen . . . 266
5.11 Trigonometrische Funktionen . . . 270
5.12 Trigonometrische Identitäten . . . 272
5.13 Exponentialfunktion . . . 275
5.14 Proportionalitäten . . . 285
5.15 Darstellungen durch Diagramme . . . 288
5.16 Gemischte Funktionenaufgaben . . . 290

6 Differentiation und Integration **301**
6.1 Operatoralgebra . . . 301
6.2 Ableitungsregeln . . . 307
6.3 Integration . . . 312
6.4 Integrationsregeln . . . 318
6.5 Partielle und totale Differentiation . . . 322
6.6 Kurvendiskussion . . . 326
6.7 Rotationskörper . . . 338
6.8 Gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben . . . 341

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung **342**
7.1 Permutationen . . . 351
7.2 Verteilungen . . . 354

8 Vektoren **357**
8.1 Länge von Vektoren . . . 361
8.2 Skalarprodukt . . . 364
8.3 Matrizen und Tensoren . . . 367
8.4 Kreuz- und Spatprodukt . . . 370
8.5 Vektorielle Geraden . . . 373
8.6 Vektorielle Ebenen . . . 375
8.7 Vektorielle Geometrie . . . 377
8.8 Gemischte Aufgaben zu Vektoren . . . 379

9 Komplexe Zahlen **380**
9.1 Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 380
9.2 Komplexe Matrizen . . . 387

10 Weiterführende Analysis **389**
10.1 Taylorentwicklung . . . 389
10.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 392

10.3 Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . 395
10.4 Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . 398
10.5 Distributionen . . . 400
10.6 Kurvenintegral . . . 402
10.7 Ringintegral . . . 404
10.8 Fourier-Transformation . . . 406
10.9 Faltung . . . 408
10.10 Gemischte Aufgaben zur Analysis . . . 410

11 Vektoranalysis 411
11.1 Gradient . . . 412
11.2 Divergenz . . . 414
11.3 Rotation . . . 416
11.4 Koordinatenwechsel . . . 418
11.5 Satz von Gauß . . . 420
11.6 Satz von Stokes . . . 422

12 Fehlerrechnung 424
12.1 Standardabweichungen . . . 424
12.2 Lineare Regression . . . 425
12.3 Fehlerfortpflanzung . . . 426

13 Nährungsverfahren 427
13.1 Newton . . . 427

14 Physikalische Anwendungen 428
14.1 Lagrange Formalismus . . . 428
14.2 Fourier-Reihe . . . 431
14.3 Ellipse und Ellipsoid . . . 432
14.4 Maxwell-Gleichungen . . . 433

15 Ökonomische Anwendungen 434

16 Anhang 435
16.1 Alphabete . . . 435
16.2 Pascal'sches Dreieck . . . 436
16.3 10er Potenzen . . . 437
16.4 Geometrische Eigenschaften von Körpern . . . 438
16.5 Wichtige Brüche als Dezimalzahlen . . . 439
16.6 Wichtige Stammfunktionen und Ableitungen . . . 440
16.7 Lösungen . . . 443

17 Glossar 618

1 Mengen

Zahlen können in verschiedene Kategorien, sogenannte *Mengen*, eingeordnet werden. Dabei bilden die sogenannten *natürlichen Zahlen* die Basis aller anderen Zahlenmengen, die in der Schule besprochen werden. Die natürlichen Zahlen werden durch das Symbol $\mathbb{N}$ beschrieben und beinhalten Zahlen wie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$ Die mathematische Schreibweise dazu wäre: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, wobei in den geschweiften Klammern $\{\}$ alle Zahlen aufgelistet werden, die zur *Zahlenmenge* gehören. Oftmals werden die *natürlichen Zahlen* auch ohne Null verwendet und werden im Folgenden als $\mathbb{N}^+$ bezeichnet. Die erste Erweiterung der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Bei genauem Betrachten fällt auf, dass die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ eine *Teilmenge* der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, was mit dem *Mengenoperator* $\subset$ („ist *Teilmenge* von“) wie folgt geschrieben wird:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

Die Folgen der Einführung der *ganzen Zahlen* sind gravierend, da die *Subtraktion* damit an Wichtigkeit verliert, da zum Beispiel aus $-1 = +(-1)$ wird.
Die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind alle Zahlen, die durch *Brüche* dargestellt werden können. Diese Zahlen werden *rationale Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{7}, 1, 2, \frac{34}{15}, ...\right\}$ genannt.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.2}$$

Aber es gibt auch noch Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Diese werden *reelle Zahlen* $\mathbb{R}$ genannt und beherbergen Zahlen wie zum Beispiel $\pi, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Die letzte Erweiterung der Zahlenmengen wird durch die Zahl $i = \sqrt{-1}$ gegeben und führt somit die *komplexen Zahlen* ein $\mathbb{C}$. *Komplexe Zahlen* werden in der Regel nicht an Schulen besprochen, dennoch hat ihre Einführung einige Vorteile beim Beschreiben von Zusammenhängen im Bereich der *Analysis*[1].

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{1.3}$$

Es ist möglich *Teilmengen* auf zustellen, dazu werden bestimmte *Mengenoperatoren* wie $\subset$ verwendet. Sei die *Menge* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die *Menge* $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$ gegeben, dann existieren folgende *Mengenoperationen*:

[1] Die *Analysis* ist eines der großen Teilgebiete der Mathematik neben der *Algebra*. Der Begriff rührt von analysieren her.

Die *Vereinigung* $\cup$, welche wie folgt dargestellt wird:

$$\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \textit{Vereinigung} \text{ von } \mathbb{M} \text{ mit } \mathbb{K} \tag{1.4}$$

Die *Vereinigung* wird auch gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ oder $\mathbb{K}$ befinden“, damit ist gemeint, dass alle Zahlen der ersten *Menge* $\mathbb{M}$ und alle Zahlen der zweiten *Menge* $\mathbb{K}$ eine neue *Menge* bilden in der alle Zahlen aus der *Menge* $\mathbb{M}$ und der *Menge* $\mathbb{K}$ vorkommen. Das mathematische „oder“ ist anders zu gebrauchen als das „oder“ im normalen Sprachgebrauch, da es in der Sprache im Zusammenhang betrachtet werden muss, während es immer die selbe Vorgehensweise in der Mathematik fordert.

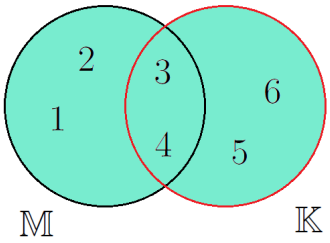


Abbildung 1.1: *Vereinigung* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Vereinigung* der beiden *Mengen*.

Die Abbildung (1.1) zeigt wie in der *Menge* $\mathbb{M}$ die Zahlen $1, 2, 3$ und 4 und in der *Menge* $\mathbb{K}$ die Zahlen $3, 4, 5$ und 6 enthalten sind, da $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eine weitere *Mengenoperation* ist der sogenannte *Durchschnitt* $\cap$:

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 4\} \qquad \textit{Durchschnitt} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.5}$$

Der *Durchschnitt* wird gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ befinden“. Auch hier ist zu unterscheiden zwischen dem mathematischen und sprachlichen „und“.

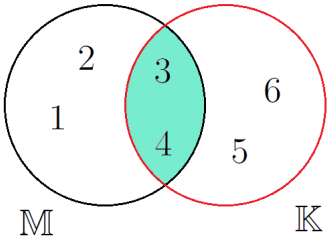


Abbildung 1.2: *Durchschnitt* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet den *Durchschnitt* der beiden *Mengen*.

Die Abbildung (1.2) zeigt, was sich hinter dem mathematischen logischen *Operator* „und“ verbirgt. Der *Durchschnitt* ist gegeben als alle Zahlen einer *Menge*, die auch in der anderen *Menge*

vorhanden sind. Somit sind nur die 3 und die 4 in diesem Fall in der resultierenden *Durchschnittsmenge*.

Die letzte wichtige *Mengenoperation* ist die *Differenz* \:

$$\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 2\} \qquad \textit{Differenz} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{1.6}$$

Dabei wird die *Differenz* gelesen als „Alle Zahlen von $\mathbb{M}$ ohne die Zahlen aus $\mathbb{K}$ “. Grafisch veranschaulicht würde dies wie folgt aussehen:

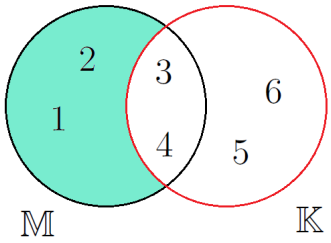


Abbildung 1.3: *Differenz* von $\mathbb{M}$ ohne $\mathbb{K}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{M}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{K}$ enthalten sind.

Deutlich zu erkennen ist, dass die Zahlen, welche in beiden *Mengen* $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ vorkommen nicht Teil der resultierenden *Menge* sind. Außerdem wird deutlich, dass die resultierende *Menge* sich unterscheidet wenn die *Mengen* bei dieser *Operation* umdrehen würde.

$$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{5, 6\} \qquad \text{Differenz von } \mathbb{K} \text{ und } \mathbb{M} \tag{1.7}$$

Diese Umkehrung der *Mengen* bei der *Operation* hätte ein vollkommen anderes Ergebnis, wie auch in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

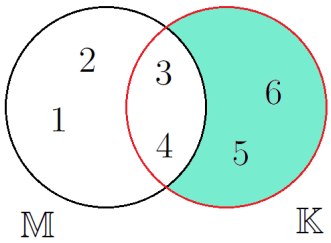


Abbildung 1.4: *Differenz* von $\mathbb{K}$ ohne $\mathbb{M}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{K}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{M}$ enthalten sind.

Es wird deutlich, dass bei der *Differenz* von *Mengen* \ die Reihenfolge entscheidender Natur ist, während sich der *Durchschnitt* und die *Vereinigung* nicht verändern würden.

Nun da alle wichtigen *Mengenoperationen* eingeführt wurden, werden noch einige wichtige mathematische Abkürzungen eingeführt, welche zur Beschreibung einer *Menge* des Öfteren von Nöten sein. Diese Abkürzungen können als Vokabeln angesehen werden, welche jeder Schüler beherrschen sollte.
Wenn eine Zahl ein *Element* einer *Zahlenmenge* ist, dann wird dies mathematisch geschrieben als:

$$4 \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

Weitere wichtige Abkürzungen der Mathematik werden nun aufgelistet und im Folgenden verwendet.

$\forall$	für alle gilt
$\exists$	es existiert
$\exists!$	es existiert genau ein
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$:=$	definiert als
$\parallel$	parallel zu
$\perp$	orthogonal (senkrecht) zu
$\measuredangle$	Winkel zwischen
$\varnothing$	leere Menge
$\Rightarrow$	daraus folgt
$<$	kleiner als
$>$	größer als
$\overset{!}{=}$	setze gleich
$\overset{\wedge}{=}$	entspricht

(1.9)

So würde der Satz „Die *Menge* $\mathbb{M}$ beinhaltet alle Zahlen x, die die Bedingung erfüllen, dass sie *Element* der *reellen Zahlen* sind und dass es genau ein Zahl e gibt durch die man die Zahl x teilen kann, sodass 1 dabei heraus kommt.“ mathematisch so aussehen:

$$\mathbb{M} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists! e \forall x \mid \frac{x}{e} = 1 \right\} \tag{1.10}$$

Mittels dieser Abkürzungen ist es möglich eine *Zahlenmenge* einzuführen, welche von besonderer Bedeutung ist - die *Primzahlen*. Also die Zahlen die nur durch selbst oder durch Eins teilbar sind. Diese *Zahlenmenge* kann wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{P} = \left\{ p \in \mathbb{N} | \nexists \frac{p}{n} \in \mathbb{N} \forall n \neq \{1, p\} \right\} \tag{1.11}$$

1.0.1 Übungsaufgaben zu Mengen

Aufgaben mit Zahlen, die noch unbekannt sind, können vorerst ausgelassen werden. Allerdings sollten diese nach der jeweiligen Einführung nachgeholt werden.

Aufgabe 1: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $4 \in$	*b)* $-1 \in$	*c)* $9 \in$	*d)* $0,45 \in$
e) $\frac{1}{2} \in$	*f)* $-6 \in$	*g)* $4,75 \in$	*h)* $0,\bar{3} \in$
i) $\frac{1}{81} \in$	*j)* $-\frac{3}{7} \in$	*k)* $3 \in$	*l)* $0,125 \in$
m) $0,01 \in$	*n)* $\frac{1}{11} \in$	*o)* $3,141 \in$	*p)* $-0,75 \in$

Aufgabe 2: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $0,\bar{6} \in$	*b)* $-\sqrt{4} \in$	*c)* $0 \in$	*d)* $\sqrt{3} \in$
e) $\frac{7}{8} \in$	*f)* $\sqrt{13} \in$	*g)* $\frac{2}{\sqrt{16}} \in$	*h)* $1\% \in$
i) $\frac{1}{\sqrt{5}} \in$	*j)* $-42 \in$	*k)* $\sqrt{144} \in$	*l)* $\frac{16}{2} \in$
m) $5,01 \in$	*n)* $17 \in$	*o)* $1,1\bar{6} \in$	*p)* $-\sqrt{64} \in$

Aufgabe 3: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $\lg 10 \in$	*b)* $\sqrt{9} \in$	*c)* $-7 \in$	*d)* $\pi \in$
e) $\frac{e^2}{2} \in$	*f)* $-\frac{1}{6} \in$	*g)* $1 \in$	*h)* $0,597813553 \in$
i) $\ln 2 \in$	*j)* $-e^{\ln \frac{1}{3}} \in$	*k)* $\log_3 9 \in$	*l)* $0,1 \in$
m) $28\% \in$	*n)* $\frac{\pi}{4} \in$	*o)* $\sqrt{17} \in$	*p)* $-\frac{1}{\ln e} \in$

Aufgabe 4: *Bestimme die Vereinigung, den Durchschnitt und jede mögliche Differenz der jeweiligen Mengen.*

a) $\mathbb{M} = \{1, 5, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8\}$
b) $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
c) $\mathbb{M} = \{5, 7, 9, 11\}$ und: $\mathbb{K} = \{4, 6, 8, 10\}$
d) $\mathbb{M} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
e) $\mathbb{M} = \{3, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$
f) $\mathbb{M} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Aufgabe 5: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 6\}$, $\mathbb{L} = \{4, 5, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} =$
b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) =$
e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) =$
f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$
g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L} \Delta \mathbb{K} =$
h) $\mathbb{M} \Delta \mathbb{K} =$

Aufgabe 6: *Bestimme* $\mathbb{M} \Delta \mathbb{K}$ *wie in Aufgabe 5 definiert und zeichne wie in den Abbildungen (1.1) bis (1.4) und kennzeichne die Fläche der resultierenden Menge. Hierbei soll* $\mathbb{M} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ *sein.*

Aufgabe 7: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ *und* $\mathbb{K} = \{\} = \varnothing$ *die jeweils resultierenden Mengen.*

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} =$
b) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} =$
c) $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.1) Lösungen zu Mengen.

2 Algebraische Grundlagen

Um den naturwissenschaftlichen Unterricht und mathematischen Erklärungen besser folgen zu können, müssen die Begrifflichkeiten der *Algebra* geklärt werden. Dazu werden im Laufe dieses Kapitels die wichtigsten mathematischen Vokabeln, Abkürzungen und Rechenvorschriften erläutert.

2.1 Grundrechenarten

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begrifflichkeiten der Grundrechenarten und ihre schriftlichen Rechenverfahren erklärt werden. Dazu wird zunächst ein Beispiel betrachtet, um die Art dieser Rechnung zu verdeutlichen. Anschließend wird anhand eines weiteren Beispiels die Rechenvorschrift in ihrer schriftlichen Anwendung beschrieben.

- *Addition*: Die *Addition* ist die wichtigste Grundrechenart. Mit ihr werden Zahlen zusammengezählt, was immer durch den *Additionsoperator* + beschrieben wird. Das Ergebnis, die sogenannte *Summe*, wird immer auf der anderen Seite eines Gleichheitszeichen = geschrieben.

$$2 + 4 = 6 \tag{2.1}$$

  Im Beispiel aus Gleichung (2.1) ist zu sehen, dass die Zwei mit der Vier zusammengezählt wurde, wie es der *Additionsoperator* + (gesprochen „plus“) gefordert hat. Für größere Zahlen lohnt sich eine Schreibweise, die die Zahlen, die addiert werden sollen, untereinander schreibt. Dabei wird das Ergebnis unter einem Strich ausgerechnet.

$$\begin{array}{r} 1337 \\ +4265 \\ \color{red}{11} \\ \hline 5602 \end{array} \tag{2.2}$$

  Bei dieser Art der Schreibweise, werden die Zahlen die untereinander stehen einzeln *addiert*. Dabei wird immer bei den hintersten Zahlen begonnen. Wenn die *addierte* Zahl höher ist als Neun, dann wird die Eins der Zehn zur nächsten Zahlenspalte hinzugezählt. Diese Eins wird auch oft Merkeins genannt und ist in der Beispielrechnung rot eingefärbt. Der Vorteil dieser Schreibweise ist es, dass niemals höhere Zahlen als 9 und 9 *addiert*

werden können. Folglich benötigt der Schüler nur ein sehr gutes Zahlenverständnis von der Zahl 0 bis 18 um jegliche Additionsaufgabe zu lösen. Falls mehr als zwei *Summanden* (im Beispiel sind 1337 und 4265 die *Summanden*) vorkommen ist es immer erlaubt in einer Nebenrechnung zunächst nur zwei *Summanden* zu *addieren* um dann anschließend die *Summe* der ersten beiden *Summanden* mit der nächsten *Summanden* zu verrechnen.

- *Subtaktion*: Die *Subtraktion* ist das Gegenteil der *Addition* und wird durch den *Subtraktionsoperator* $-$ (gesprochen „minus“) beschrieben.

$$5 - 2 = 3 \tag{2.3}$$

Wie die Gleichung (2.3) zeigt, wird von der Zahl 5, dem sogenannten *Minuend*, die Zahl 2, dem *Subtrahend*, abgezogen. Das Ergebnis wird dabei *Differenz* genannt. Wie schon bei der *Addition* lohnt sich die Schreibweise, in der alle Zahlen untereinander aufgeführt werden.

$$\begin{array}{r} 6337 \\ -4265 \\ \color{red}{1} \\ \hline 2072 \end{array} \tag{2.4}$$

Auch bei der *Subtraktion* werden die Zahlen startend von hinten bearbeitet. Dabei kann die Zahl des *Subtrahenden* größer sein als die des *Minuenden*, wie in der zweiten Zahlenspalte. Hierbei ist die Zahl 6 statt von der 3 von der 13 zu subtrahieren. Die dazu geschriebene Zehn muss anschließend von der nächsten Zahlenspalte abgezogen werden, was durch die Merkeins in rot wieder symbolisiert wird. Auch bei der *Subtraktion* kann es vorkommen, dass mehrere *Subtrahenden* vorzufinden sind. Dabei sind zwei Arten von Nebenrechnungen zulässig: Die erste Variante sieht vor, dass die *Subtrahenden* nacheinander vom *Minuenden subtrahiert* werden, während die zweite Variante vorsieht, dass die *Subtrahenden addiert* werden und anschließend die *Summe* der *Subtrahenden* vom *Minuend* abgezogen werden.
Beim schriftlichen *Subtrahieren* kann maximal die Zahl 9 als *Subtrahend* der einzelnen Spalten auftauchen. Somit ist die größte Zahl von der abgezogen werden kann die 18. Folglich braucht der Schüler lediglich ein gutes Zahlenverständnis bei der *Subtraktion* von den Zahlen 0 bis 18.

- *Multiplikation*: Die *Multiplikation* ist die erste abkürzende Schreibweise, die ein der Schule eingeführt wird. Dabei wird die Rechnung $3 + 3 + 3 + 3$ abgekürzt zu $4 \cdot 3$, also vier mal die Drei, was durch den *Multiplikationsoperator* $\cdot$ beschrieben wird. Die schriftliche *Multiplikation* sieht Zahlen von 0 bis $9 \cdot 9 = 81$ vor, da auch hier die einzelnen *Ziffern* der Zahl nacheinander bearbeitet werden.

$$\begin{array}{r} 1337 \cdot 23 \\ \hline 2674 \\ +\ 3011 \\ \hline 29751 \end{array} \tag{2.5}$$

Aus der Gleichung (2.5) ist zu erkennen, dass die Zwei auf die Zahl 7 wirkt und danach auf die 3. Dabei wird die Zehn der Rechnung $2 \cdot 7 = 14$ mit zur nächsten Ziffer von rechts gezählt. Das Ergebnis wird so notiert, dass die am weitest stehende *Ziffer* direkt unter der betrachten Zahl steht (im Beispiel unter der 2). Anschließend wird dies mit der nächsten *Ziffer*, hier die Drei, wiederholt. Die untereinander geschriebenen Zahlen werden dann *addiert*, sodass sich das Ergebnis, das sogenannte *Produkt*, dann ergibt. Die Zahlen die *multipliziert* werden heißen dabei *Faktoren*.

- *Division*: Die *Division* stellt die umkehrende Frage der *Multiplikation*: „Wie oft passt die Zahl in die andere Zahl?“. Da es sich um die Umkehrung der *Multiplikation* handelt sollten auch wiederum alle Zahlen von 0 bis 81 beherrscht werden.

$$\begin{array}{l} 2\ \ 43\ 69 : 3 = 08123 \\ -0 \\ \hline 2\ \ 4 \\ -2\ \ 4 \\ \hline \ \ \ 03 \\ -\ \ 3 \\ \hline \ \ \ \ 0\ 6 \\ -\ \ 6 \\ \hline \ \ \ \ \ \ 09 \\ -\ 9 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array} \tag{2.6}$$

Bei der schriftlichen *Division* wird zunächst gefragt „Wie oft passt der *Divisor* (3) in die erste *Ziffer* des *Dividenden* (2)?“ Die Antwort wäre „Null mal“ und somit ist die Null die erste *Ziffer* des Ergebnisses, dem sogenannten *Quotienten*. Anschließend wir die gefundene Ziffer des *Quotienten* mit dem *Divisor multipliziert* und das Ergebnis dieser Rechnung von der ersten *Ziffer subtrahiert*. Dann wird die nächste *Ziffer* zur Betrachtung mit nach unten gezogen (im Beispiel die Zahl 4) und nun die sich danach immer wiederholende Frage „Wie

oft passt der *Divisor* in diese Zahl?“ gestellt. Die Antwort wird beim Ergebnis notiert (im Beispiel 8) und diese *Ziffer* des *Quotienten* dann wieder *multipliziert* mit dem *Divisor* von der besagten Zahl *subtrahiert* und anschließend die nächste *Ziffer* des *Dividenden* zur Betrachtung nach unten gezogen. Dieses Prozedur wiederholt sich solange bis alle Zahlen betrachtet wurden.
Bei höheren Zahlen im *Divisor* lohnt es sich diesen in zwei Zahlen zu zerlegen. So kann zum Beispiel der *Divisor* 72 in zwei *Divisoren* 8 und 9 zerlegt werden. Dann muss zu erst durch eine Zahl *dividiert* werden und anschließend der *Quotient* aus der ersten *Division* durch die zweite Zahl dividiert werden. Da die *Division* mit am zeitaufwendigsten ist, wird später die Bruchrechnung eingeführt, welche eine *Division* bis zum Ergebnis hin herauszögern kann.

Die mathematischen Vokabeln der Grundrechenarten sind in der folgenden Tabelle noch einmal zusammen gefasst.

Rechenart	1. Teil	Rechenoperator	2.Teil	Ergebnis
Addition	Summand	+	Summand	= Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	= Differenz
Multiplikation	Faktor	$\cdot$	Faktor	= Produkt
Division	Dividend	:	Divisor	= Quotient
Division (als Bruch)	Zähler	/	Nenner	= Quotient

Generell gilt, dass die Rechnungen der *Multiplikation* und die der *Division* immer vor jeglicher *Addition* oder *Subtraktion* durchgeführt werden müssen (Punkt- vor Strichrechnung)!
Die Regel „Punkt- vor Strichrechnung“ wird offensichtlich, wenn die Abkürzung hinter der Multiplikation ausgeschrieben wird:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 &= 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ &= 15 + 28 \\ &= 43 \end{aligned} \tag{2.7}$$

An diesem Demonstrationsbeispiel ist auch zu erkennen, dass Rechnungen mit Zwischenschritten gerechnet werden können und was dabei beachtet werden muss. Dabei gilt, dass ein Gleichheitszeichen aussagt, dass was links steht gleich ist zu dem was rechts steht. Das heißt wiederum, dass kein Teil ausgelassen werden darf, wenn ein Gleichheitszeichen benutzt wird. Nebenrechnungen, also Teilrechnungen, können in separaten Rechnungen durchgeführt werden und deren Ergebnisse dann wieder in die komplette Rechnung eingesetzt werden.

Durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ werden die Begriffe der *Subtraktion* nicht länger benötigt, da ein *Summand* oder sogar beide *Summanden* negativ sein können, sodass die *Addition* mit *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ die Verallgemeinerung von Addition und *Subtraktion* der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist. Auch die Divisionsbegriffe werden nur noch im Sinne der Bruchrechnung verwendet.

2.1.1 Übungsaufgaben zu Grundrechenarten

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)\ 3821 + 1347 =$	$b)\ 5962 + 8912 =$	$c)\ 2512 + 3246 =$	$d)\ 2353 + 4636 =$
$e)\ 4462 + 9543 =$	$f)\ 4156 + 3737 =$	$g)\ 9948 + 5499 =$	$h)\ 4784 + 8377 =$
$i)\ 9745 + 3726 =$	$j)\ 3269 + 9289 =$	$k)\ 4577 + 6201 =$	$l)\ 5031 + 5768 =$
$m)\ 5465 + 1202 =$	$n)\ 8415 + 2560 =$	$o)\ 8762 + 7355 =$	$p)\ 7437 + 1221 =$
$q)\ 4578 + 7377 =$	$r)\ 5786 + 4532 =$	$s)\ 1057 + 7800 =$	$t)\ 4204 + 4621 =$
$u)\ 9424 + 8054 =$	$v)\ 4438 + 4575 =$	$w)\ 7873 + 9724 =$	$x)\ 3432 + 7387 =$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)\ 3821 - 1347 =$	$b)\ 5962 - 1912 =$	$c)\ 4512 - 3246 =$	$d)\ 9353 - 4636 =$
$e)\ 4462 - 2543 =$	$f)\ 4156 - 3737 =$	$g)\ 9948 - 5499 =$	$h)\ 4784 - 3377 =$
$i)\ 9745 - 3726 =$	$j)\ 7269 - 3289 =$	$k)\ 6201 - 4513 =$	$l)\ 5931 - 5768 =$
$m)\ 5465 - 1202 =$	$n)\ 8415 - 2560 =$	$o)\ 8762 - 7355 =$	$p)\ 7437 - 1221 =$
$q)\ 8578 - 7377 =$	$r)\ 5786 - 4532 =$	$s)\ 9057 - 7800 =$	$t)\ 7204 - 4621 =$
$u)\ 9424 - 8054 =$	$v)\ 7838 - 4575 =$	$w)\ 9873 - 9724 =$	$x)\ 8432 - 7387 =$

Aufgabe 3: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)\ 3821 \cdot 1347 =$	$b)\ 5962 \cdot 1912 =$	$c)\ 4512 \cdot 3246 =$	$d)\ 9353 \cdot 4636 =$
$e)\ 4462 \cdot 2543 =$	$f)\ 4156 \cdot 3737 =$	$g)\ 9948 \cdot 5499 =$	$h)\ 4784 \cdot 3377 =$
$i)\ 9745 \cdot 3726 =$	$j)\ 7269 \cdot 3289 =$	$k)\ 6201 \cdot 4513 =$	$l)\ 5931 \cdot 5768 =$
$m)\ 5465 \cdot 1202 =$	$n)\ 8415 \cdot 2560 =$	$o)\ 8762 \cdot 7355 =$	$p)\ 7437 \cdot 1221 =$
$q)\ 8578 \cdot 7377 =$	$r)\ 5786 \cdot 4532 =$	$s)\ 9057 \cdot 7800 =$	$t)\ 7204 \cdot 4621 =$
$u)\ 9424 \cdot 8054 =$	$v)\ 7838 \cdot 4575 =$	$w)\ 9873 \cdot 9724 =$	$x)\ 8432 \cdot 7387 =$

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $7095 : 3 =$	$b)$ $2568 : 6 =$	$c)$ $4512 : 2 =$	$d)$ $5033 : 7 =$
$e)$ $7389 : 9 =$	$f)$ $9475 : 5 =$	$g)$ $9872 : 8 =$	$h)$ $6024 : 8 =$
$i)$ $9416 : 4 =$	$j)$ $7273 : 7 =$	$k)$ $7587 : 9 =$	$l)$ $3682 : 7 =$
$m)$ $7578 : 3 =$	$n)$ $6738 : 2 =$	$o)$ $8638 : 7 =$	$p)$ $8464 : 8 =$
$q)$ $8231 : 1 =$	$r)$ $4755 : 5 =$	$s)$ $6024 : 8 =$	$t)$ $5112 : 6 =$
$u)$ $6840 : 15 =$	$v)$ $9468 : 12 =$	$w)$ $7704 : 24 =$	$x)$ $5904 : 16 =$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $3821 + 1347 \cdot 43 =$	$b)$ $4525 - 2070 : 6 =$
$c)$ $8124 + 1347 - 4371 =$	$d)$ $7124 - 2070 + 1392 =$
$e)$ $4284 : 2 + 1347 \cdot 43 =$	$f)$ $8285 : 5 - 5256 : 8 =$
$g)$ $3482 \cdot 3 - 7432 : 4 =$	$h)$ $8285 \cdot 8 : 5 - 5256 + 4361 =$
$i)$ $1288 \cdot 2 \cdot 4 + 5416 : 4 : 2 =$	$j)$ $4265 \cdot 3 - 3236 \cdot 2 + 1454 \cdot 4 =$
$k)$ $822 \cdot 9 \cdot 6 : 3 - 632 \cdot 11 : 2 =$	$l)$ $4265 : 5 + 6438 : 6 + 17848 : 8 =$

Aufgabe 6: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ $1203 + 6799 + 5684 + 2156 + 9852 =$
$b)$ $9982 - 595 - 651 - 3197 - 1637 =$
$c)$ $11 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 =$
$d)$ $1587 + 9613 + 9477 + 2674 + 2987 =$
$e)$ $8745 - 2971 - 841 - 1052 - 681 =$
$f)$ $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 =$
$g)$ $8461 + 5625 + 1098 + 6950 + 8509 =$
$h)$ $7894 - 412 - 753 - 951 - 456 =$
$i)$ $12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 =$

Aufgabe 7: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2 + 6 \cdot 3 - 5 =$
b) $12 - 20 : 5 + 8 \cdot 2 =$
c) $2 \cdot 8 : 4 + 2 - 6 : 2 =$
d) $63 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 15 =$
e) $12 \cdot 4 - 6 \cdot 5 + 33 \cdot 7 - 43 \cdot 4 =$
f) $10 \cdot 45 - 15 : 5 \cdot 60 + 34 =$
g) $7 + 3 \cdot 17 + 56 \cdot 6 - 123 =$
h) $55 \cdot 48 : 4 : 3 - 12 \cdot 3 =$
i) $54 \cdot 11 - 9 \cdot 47 - 72 : 2 \cdot 3 =$
j) $74 \cdot 3 - 4 \cdot 8 + 32 \cdot 5 =$
k) $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 12 \cdot 5 =$
l) $864 : 8 : 3 + 23 \cdot 7 - 12 \cdot 4 =$
m) $142 \cdot 13 - 24 \cdot 82 : 4 + 91 \cdot 12 =$
n) $1249 \cdot 34 - 2135 : 5 + 235 \cdot 5 =$

Aufgabe 8: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 11 =$
b) $4 \cdot 12 : 3 - 5 \cdot 2 + 3 =$
c) $75 : 5 - 5 + 72 : 8 \cdot 3 =$
d) $10 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 9 =$
e) $6 + 6 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 6 =$
f) $81 : 3 : 3 + 6 \cdot 7 - 5 \cdot 7 =$
g) $55 - 3 \cdot 7 + 32 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$
h) $15 \cdot 4 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 2 =$
i) $60 : 5 : 6 + 24 \cdot 5 - 7 \cdot 9 =$
j) $11 \cdot 99 - 2 \cdot 6 : 4 \cdot 8 =$
k) $54 : 9 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \cdot 3 =$
l) $5 \cdot 5 \cdot 4 : 10 + 9 \cdot 4 : 3 =$
m) $42 - 11 \cdot 3 + 3 \cdot 12 =$
n) $49 \cdot 5 : 7 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 7 =$

Aufgabe 9: *Berechne das Ergebnis.*

a) $4731 + 3772 + 9141 + 1156 + 11278 + 3731 + 7542 + 1127 + 9346 =$
b) $156 + 59342 + 3482 + 45642 + 284921 + 6432 + 25 + 27381 + 22833 =$
c) $826265 - 1661 - 5683 - 34667 - 3727 - 8790 - 5204 - 4267 =$
d) $438693 - 2362 - 2677 - 6431 - 6530 - 3256 - 1354 - 7532 - 2637 =$
e) $36377 + 2367 + 2326 - 2362 - 6432 + 3467 - 9032 + 9463 - 7524 - 7345 =$
f) $89349 + 3256 - 8347 + 8939 \cdot 11 - 4578 + 3250 - 6784 \cdot 5 =$
g) $3422 \cdot 312 - 26806 + 6 \cdot 7846 - 92357 + 8356 \cdot 8 - 4362 =$
h) $29857 - 23658 + 26 \cdot 366 - 543 + 23568 - 485 \cdot 38 - 436 + 326 - 2666 - 735 =$

Aufgabe 10: *Berechne das Ergebnis.*

a) $82 \cdot 24 - 3528 : 9 \cdot 3 =$

b) $52347 - 45 \cdot 23 - 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 4 =$

c) $541 \cdot 24 : 4 + 72 \cdot 12 - 83 \cdot 4 =$

d) $5670 : 6 : 7 + 23 \cdot 17 - 13 \cdot 11 =$

e) $55 \cdot 67 - 6460 : 6 \cdot 2 =$

f) $14280 : 8 \cdot 2 - 14 \cdot 71 - 44 \cdot 5 =$

g) $40 \cdot 70 \cdot 30 : 1000 - 450 : 10 + 80000 : 10000 =$

h) $75 \cdot 25 - 7 \cdot 34 - 89 + 43 \cdot 21 =$

Aufgabe 11: *Schreibe die Rechnung auf und berechne das Ergebnis.*

a) Die Summe ist gegeben aus den Zahlen 324 und 579.
b) Die Zahl 3960 bildet den Minuenden und die Zahl 1492 der Subtrahend.
c) Das Produkt aus 23 und 54 wird subtrahiert von 4930.
d) Der Dividend 49565 mit dem Divisor 5 bildet der Quotient, welcher auch ein Summand ist, der mit 1 addiert wird.
e) Vom Bruch mit dem Nenner 250 und dem Zähler 150000 wird das Produkt aus 111 und 3 subtrahiert.
f) Zwei gleiche Summanden, welche jeweils aus einem Produkt bestehen, werden addiert. Dabei sind alle vier Faktoren gleich und bestehen aus der Zahl 10.

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.2) Lösungen zu den Grundrechenarten.

2.2 Bruchrechnung

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt stellen alle Zahlen, die durch einen *Bruch* dargestellt werden, die *Zahlenmenge* der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ dar. Mit jeder *Zahlenmenge* sind alle Rechenoperationen zulässig.

Ein *Bruch* setzt sich aus seinem *Nenner*, der definiert in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes unterteilt wird, und den *Zähler*, der beschreibt wie viele Teile vom *Nenner* tatsächlich vorzufinden sind
(Bruch = $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$). Mittels *Brüchen* kann man die gleiche Zahl auf verschiedene Arten darstellen, so ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $\frac{2}{4}$. Wenn der *Nenner* erhöht wird spricht man vom *Erweitern*. Bei einer Verkleinerung des *Nenners* wird vom *Kürzen* gesprochen.
Dabei muss beachtet werden, dass der *Bruchstrich* nichts weiter als ein *Divisionsoperator* darstellt:

$$3 : 4 = \frac{3}{4} \quad . \tag{2.8}$$

Beim *Erweitern* werden *Zähler* und *Nenner* mit der Zahl *multipliziert* mit der man den *Bruch* erweitern möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit vier *erweitert*.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \tag{2.9}$$

Beim *Kürzen* werden *Zähler* und *Nenner* durch die Zahl *dividiert* mit der man den *Bruch kürzen* möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit acht erweitert.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

Bei der *Addition* beziehungsweise der *Subtraktion* von *Brüchen* müssen die *Nenner* der beteiligten *Brüche* so *erweitert* oder *gekürzt* werden, dass sie gleich sind. Dann können die *Zähler* verrechnet werden. Um immer einen gemeinsamen *Nenner* zu finden, kann man den ersten *Bruch* mit dem *Nenner* des zweiten *Bruch* und den zweiten *Bruch* mit dem Nenner des ersten *Bruchs* erweitern (wie im Subtraktionsbeispiel gezeigt).

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{18-4}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Bei der *Multiplikation* von *Brüchen*, werden die *Nenner* miteinander *multipliziert* und bilden so den neuen *Nenner*. Auch die *Zähler* werden miteinander *multipliziert*.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8} \tag{2.12}$$

Bei der *Division* muss man mit dem *Kehrwert*, also der Vertauschung von *Nenner* und *Zähler* des *Divisors*, *multiplizieren*.

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

Ferner gilt bei Berücksichtigung von *Parametern* oder *Variablen*:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} && \text{Erweitern} \\
\frac{a \cdot n}{b \cdot n} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} && \text{Kürzen} \\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b} && \text{Addition} \\
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{d \cdot b} && \text{Subtraktion} \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{d \cdot b} && \text{Multiplikation} \\
\frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} && \text{Division}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Im den folgenden Abschnitten wird der Malpunkt zwischen einer Zahl und einem *Parameter* beziehungsweise einer *Variablen* oder zwischen *Parametern* beziehungsweise *Variablen* selbst nicht mehr notiert, es sei denn dieser ist zum Verständnis von besonderer Bedeutung. Aus diesem Grund soll auch auf die Schreibweise für *gemischte Brüche* vollständig verzichtet werden, da in dieser Schreibweise $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ das *Additionszeichen* eingespart wird. Sobald das *Multiplikationszeichen* durch eine Konvention im Unterricht fallen gelassen wird, würde es zu Verwirrungen und Missverständnissen kommen, sodass entweder $2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$ oder $2\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}$ gilt. Dieses *Buch* orientiert sich an der Konvention, welche in der höheren Mathematik verwendet wird. Deswegen sollte auf die Schreibweise von gemischten *Brüchen* vollständig verzichtet werden und ausschließlich nur eine einzige Konvention - die des Weglassens des *Multiplikationsoperators* - verwendet werden.

Zur Bruchrechnung ist anzumerken, dass es nicht möglich ist durch die Zahl Null zu *dividieren*. Diese Rechenoperation würde jeder Logik widersprechen und ist damit in der Mathematik nicht vorgesehen. Es existieren Beschreibungen, welche sich damit beschäftigen was in der unmittelbaren Umgebung dieser nicht definierten Rechenoperation geschieht und welche im Abschnitt „Grenzwerte“ und „Komplexe Zahlen“ vorgestellt werden.

2.2.1 Übungsaufgaben zur Bruchrechnung

Aufgabe 1: *Welcher Bruch ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Brüchen ein.*

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$	*b)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{4}$	*c)* $\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{2}$	*e)* $\frac{5}{6} \quad \frac{3}{4}$	*f)* $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} \quad \frac{1}{4}$	*h)* $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{15}$	*i)* $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} \quad \frac{7}{8}$	*k)* $\frac{6}{7} \quad \frac{3}{4}$	*l)* $\frac{4}{5} \quad \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{3}$	*n)* $\frac{5}{9} \quad \frac{3}{7}$	*o)* $\frac{5}{25} \quad \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{8}$	*q)* $\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3}$	*r)* $\frac{14}{8} \quad \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} \quad \frac{24}{64}$	*t)* $\frac{81}{9} \quad \frac{36}{4}$	*u)* $\frac{55}{5} \quad \frac{131}{11}$

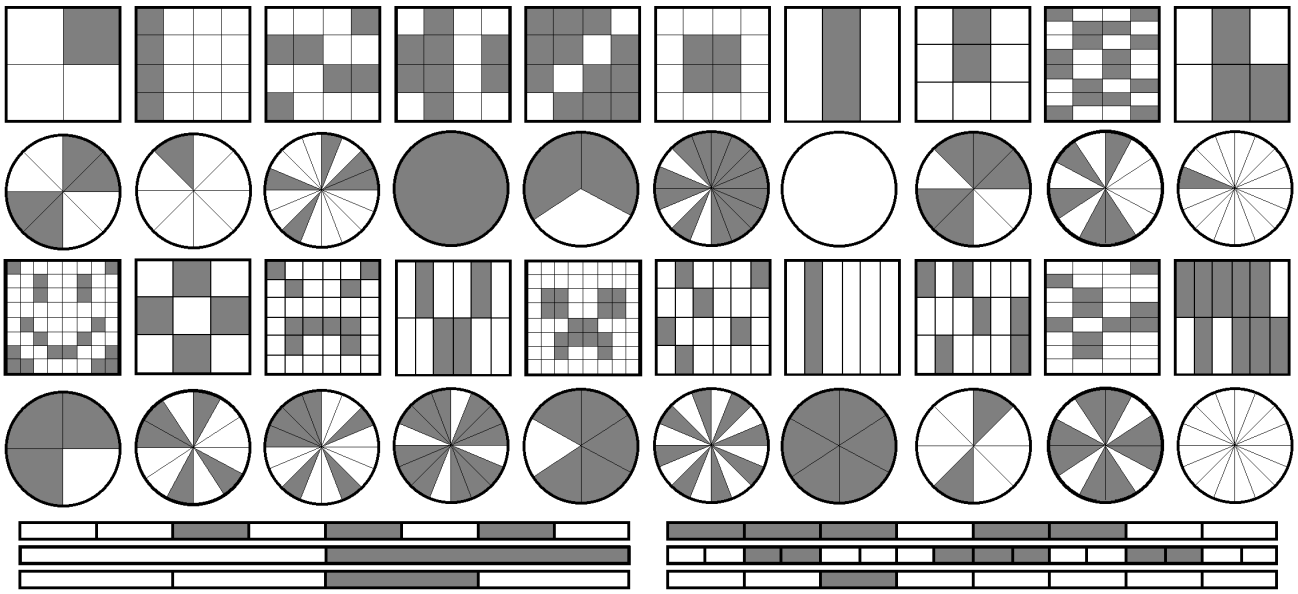
Aufgabe 2: *Kürze die Brüche bis man sie nicht weiter kürzen kann.*

a) $\frac{8}{16} =$	*b)* $\frac{6}{14} =$	*c)* $\frac{9}{15} =$
d) $\frac{6}{24} =$	*e)* $\frac{48}{64} =$	*f)* $\frac{12}{144} =$
g) $\frac{75}{125} =$	*h)* $\frac{30}{75} =$	*i)* $\frac{72}{108} =$
j) $\frac{16}{48} =$	*k)* $\frac{6}{18} =$	*l)* $\frac{24}{8} =$
m) $\frac{12}{96} =$	*n)* $\frac{16}{64} =$	*o)* $\frac{48}{144} =$
p) $\frac{33}{3} =$	*q)* $\frac{54}{72} =$	*r)* $\frac{5000}{10000} =$
s) $\frac{24}{72} =$	*t)* $\frac{36}{66} =$	*u)* $\frac{63}{108} =$

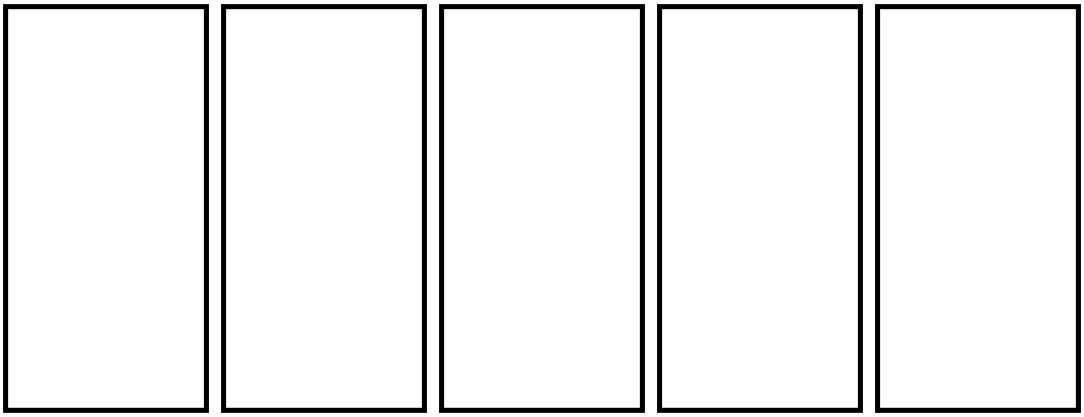
Aufgabe 3: *Erweitere die Brüche mit der angegebenen Zahl.*

a)	$\frac{3}{4}$	mit: 9	*b)*	$\frac{5}{7}$	mit: 7	*c)*	$\frac{1}{12}$	mit: 8
d)	$\frac{1}{2}$	mit: 24	*e)*	$\frac{7}{8}$	mit: 6	*f)*	$\frac{4}{6}$	mit: 11
g)	$\frac{5}{7}$	mit: 8	*h)*	$\frac{5}{13}$	mit: 9	*i)*	$\frac{4}{11}$	mit: 7
j)	$\frac{7}{4}$	mit: 9	*k)*	$\frac{6}{11}$	mit: 5	*l)*	$\frac{3}{12}$	mit: 4
m)	$\frac{2}{3}$	mit: 21	*n)*	$\frac{7}{8}$	mit: 3	*o)*	$\frac{4}{6}$	mit: 13
p)	$\frac{3}{9}$	mit: 8	*q)*	$\frac{5}{12}$	mit: 6	*r)*	$\frac{7}{12}$	mit: 7
s)	$\frac{3}{4}$	mit: 17	*t)*	$\frac{5}{6}$	mit: 4	*u)*	$\frac{13}{6}$	mit: 1000

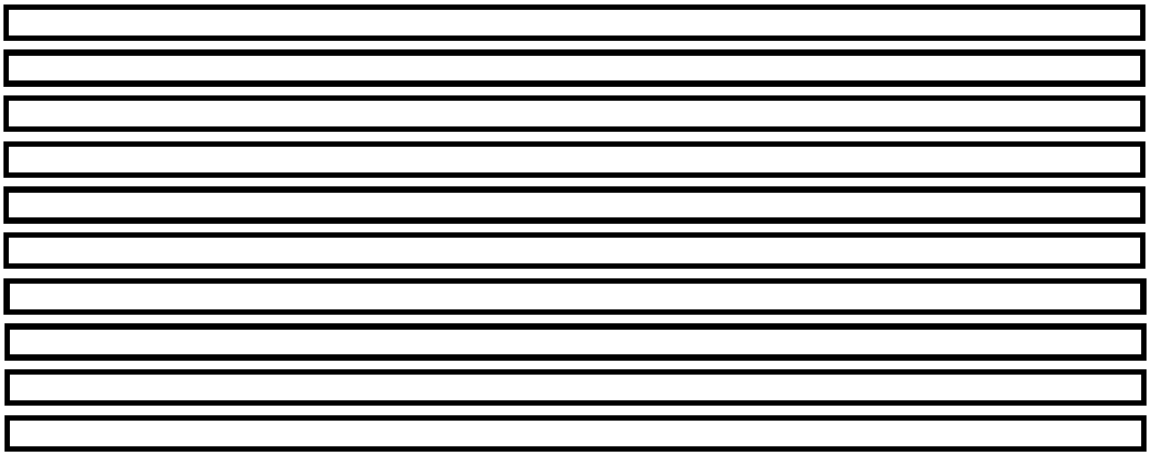
Aufgabe 4: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



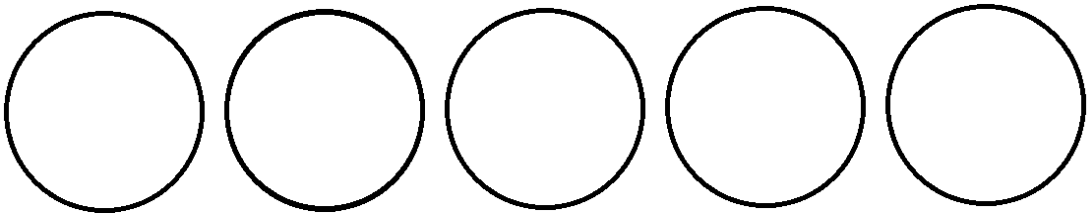
Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{9}$ *und* $\frac{3}{7}$



Aufgabe 7: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 8: *Addiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$ *c)* $\frac{7}{12} + \frac{4}{12} =$

d) $\frac{25}{9} + \frac{43}{9} =$ *e)* $\frac{7}{3} + \frac{1}{3} =$ *f)* $\frac{7}{11} + \frac{14}{11} =$

g) $\frac{6}{32} + \frac{5}{32} =$ *h)* $\frac{33}{9} + \frac{29}{9} =$ *i)* $\frac{83}{39} + \frac{23}{39} =$

Aufgabe 9: *Addiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{7} + \frac{1}{14} =$ *c)* $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$

d) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$ *e)* $\frac{5}{16} + \frac{3}{8} =$ *f)* $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} =$

g) $\frac{1}{4} + \frac{3}{32} =$ *h)* $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} =$ *i)* $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$

Aufgabe 10: *Subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{7}{2} - \frac{4}{2} =$ *b)* $\frac{9}{8} - \frac{4}{8} =$ *c)* $\frac{12}{9} - \frac{5}{9} =$

d) $\frac{31}{5} - \frac{23}{5} =$ *e)* $\frac{6}{17} - \frac{5}{17} =$ *f)* $\frac{8}{13} - \frac{2}{13} =$

g) $\frac{86}{23} - \frac{45}{23} =$ *h)* $\frac{55}{19} - \frac{21}{19} =$ *i)* $\frac{65}{83} - \frac{15}{83} =$

Aufgabe 11: *Subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{7} - \frac{1}{14} =$ *c)* $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$

d) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} =$ *e)* $\frac{3}{8} - \frac{5}{16} =$ *f)* $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$

g) $\frac{1}{4} - \frac{3}{32} =$ *h)* $\frac{2}{5} - \frac{2}{15} =$ *i)* $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$

Aufgabe 12: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} =$ *b)* $\frac{13}{7} - \frac{15}{14} =$ *c)* $\frac{9}{5} + \frac{13}{10} =$

d) $\frac{21}{2} - \frac{31}{8} =$ *e)* $\frac{9}{8} + \frac{19}{16} =$ *f)* $\frac{5}{3} - \frac{11}{9} =$

g) $\frac{7}{4} + \frac{67}{32} =$ *h)* $\frac{13}{5} - \frac{25}{15} =$ *i)* $\frac{13}{3} + \frac{11}{6} =$

j) $\frac{1}{4} - \frac{3}{16} =$ *k)* $\frac{13}{4} - \frac{9}{6} =$ *l)* $\frac{9}{5} + \frac{3}{4} =$

m) $\frac{21}{4} - \frac{11}{8} =$ *n)* $\frac{3}{8} + \frac{9}{32} =$ *o)* $\frac{4}{3} - \frac{10}{9} =$

p) $\frac{7}{8} - \frac{11}{32} =$ *q)* $\frac{13}{5} - 2 =$ *r)* $14 + \frac{11}{6} =$

s) $\frac{1}{8} + \frac{9}{16} =$ *t)* $\frac{15}{6} - \frac{7}{3} =$ *u)* $\frac{9}{5} - \frac{3}{4} =$

v) $\frac{23}{4} + \frac{17}{8} =$ *w)* $\frac{7}{9} - \frac{11}{18} =$ *x)* $\frac{1}{10} - \frac{1}{1000} =$

y) $\frac{5}{20} - \frac{1}{1000} =$ *z)* $\frac{13}{15} + 6 =$

Aufgabe 13: *Multipliziere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{14} =$ *c)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} =$

d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} =$ *e)* $\frac{5}{16} \cdot \frac{3}{8} =$ *f)* $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} =$

g) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{32} =$ *h)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{15} =$ *i)* $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} =$

j) $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{6} =$ *k)* $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} =$ *l)* $\frac{9}{7} \cdot \frac{10}{11} =$

m) $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{4} =$ *n)* $\frac{2}{12} \cdot \frac{4}{5} =$ *o)* $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{3} =$

p) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{13} =$ *q)* $\frac{2}{8} \cdot \frac{8}{20} =$ *r)* $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} =$

s) $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{5} =$ *t)* $\frac{9}{15} \cdot \frac{7}{5} =$ *u)* $\frac{7}{9} \cdot \frac{9}{4} =$

v) $\frac{2}{8} \cdot \frac{6}{11} =$ *w)* $\frac{0}{1} \cdot \frac{6}{83} =$ *x)* $\frac{5}{4} \cdot \frac{32}{50} =$

Aufgabe 14: *Dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{7} : \frac{1}{14} =$ *c)* $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} =$

d) $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} =$ *e)* $\frac{3}{8} : \frac{5}{16} =$ *f)* $\frac{1}{3} : \frac{2}{9} =$

g) $\frac{1}{4} : \frac{3}{32} =$ *h)* $\frac{2}{5} : \frac{2}{15} =$ *i)* $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} =$

j) $\frac{2}{9} : \frac{4}{6} =$ *k)* $\frac{6}{5} : \frac{5}{2} =$ *l)* $\frac{9}{7} : \frac{10}{11} =$

m) $\frac{2}{7} : \frac{9}{4} =$ *n)* $\frac{2}{12} : \frac{4}{5} =$ *o)* $\frac{2}{9} : \frac{8}{3} =$

p) $\frac{5}{6} : \frac{6}{13} =$ *q)* $\frac{2}{8} : \frac{8}{20} =$ *r)* $\frac{1}{4} : \frac{5}{2} =$

s) $\frac{9}{4} : \frac{2}{5} =$ *t)* $\frac{9}{15} : \frac{7}{5} =$ *u)* $\frac{7}{9} : \frac{9}{4} =$

v) $\frac{2}{8} : \frac{6}{11} =$ *w)* $\frac{0}{1} : \frac{6}{83} =$ *x)* $\frac{5}{4} : \frac{32}{50} =$

Aufgabe 15: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} =$ *b)* $\frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} =$ *c)* $\frac{9}{5} : \frac{13}{10} =$

d) $\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} =$ *e)* $\frac{9}{8} : \frac{19}{16} =$ *f)* $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} =$

g) $\frac{7}{4} : \frac{67}{32} =$ *h)* $\frac{13}{5} : \frac{25}{15} =$ *i)* $\frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} =$

j) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} =$ *k)* $\frac{13}{4} : \frac{9}{6} =$ *l)* $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

m) $\frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} =$ *n)* $\frac{3}{8} : \frac{9}{32} =$ *o)* $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} =$

p) $\frac{7}{8} : \frac{11}{32} =$ *q)* $\frac{13}{5} : 2 =$ *r)* $14 \cdot \frac{11}{6} =$

s) $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} =$ *t)* $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} =$ *u)* $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

v) $\frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} =$ *w)* $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} =$ *x)* $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} =$

y) $\frac{5}{20} : \frac{1}{1000} =$ *z)* $\frac{13}{15} \cdot 6 =$

Aufgabe 16: *Welcher Bruch liegt genau in der Mitte zwischen den angegebenen Brüche.*

a) $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{2}$
b) $\frac{1}{7}$ und $\frac{5}{7}$
c) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$
d) $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{2}$
e) $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{12}$
f) $\frac{2}{11}$ und $\frac{5}{6}$
g) $\frac{1}{12}$ und $\frac{3}{4}$
h) $\frac{13}{5}$ und $\frac{5}{17}$
i) $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{9}$
j) $\frac{7}{8}$ und $\frac{2}{5}$
k) $\frac{5}{16}$ und 8
l) $\frac{3}{10}$ und $\frac{5}{9}$
m) $\frac{4}{11}$ und $\frac{5}{7}$
n) $\frac{24}{5}$ und $\frac{23}{10}$
o) $\frac{4}{21}$ und $\frac{8}{29}$

Aufgabe 17: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$
b) $\frac{8}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=$
c) $\frac{11}{2}-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}=$
d) $\frac{4}{5}+\frac{7}{3}+\frac{2}{9}=$
e) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=$
f) $\frac{21}{5}-\frac{8}{7}+\frac{2}{3}=$
g) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=$
h) $\frac{8}{5}-\frac{3}{7}+\frac{3}{8}=$
i) $\frac{8}{7}-\frac{1}{9}+\frac{7}{5}=$
j) $\frac{7}{8}+\frac{4}{3}+\frac{3}{10}=$
k) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=$
l) $\frac{10}{7}-\frac{1}{5}+\frac{5}{9}=$
m) $\frac{14}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=$
n) $\frac{11}{3}-\frac{8}{9}+\frac{7}{10}=$
o) $\frac{9}{2}+\frac{9}{5}+\frac{7}{4}=$
p) $\frac{2}{7}-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=$
q) $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=$
r) $\frac{4}{5}+\frac{9}{4}+\frac{3}{7}=$
s) $\frac{8}{3}-\frac{7}{8}+\frac{6}{5}=$
t) $\frac{6}{5}+\frac{11}{3}-2=$
u) $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}+\frac{11}{9}=$
v) $\frac{8}{9}+\frac{3}{2}+5=$
w) $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=$
x) $\frac{5}{9}+\frac{13}{4}-3=$
y) $\frac{11}{2}-\frac{7}{4}+\frac{8}{5}=$
z) $\frac{5}{12}+\frac{7}{11}+9=$

Aufgabe 18: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$

b) $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$

c) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{6} : \frac{3}{8} =$

d) $\frac{4}{5} : \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} =$

e) $\frac{1}{4} : \frac{5}{6} : \frac{7}{4} =$

f) $\frac{21}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{2}{3} =$

g) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

h) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} =$

i) $\frac{8}{7} \cdot \frac{1}{9} : \frac{7}{5} =$

j) $\frac{7}{8} : \frac{4}{3} : \frac{3}{10} =$

k) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} =$

l) $\frac{10}{7} : \frac{1}{5} : \frac{5}{9} =$

m) $\frac{14}{5} : \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} =$

n) $\frac{11}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10} =$

o) $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{7}{4} =$

p) $\frac{2}{7} : \frac{1}{9} : \frac{3}{8} =$

q) $\frac{4}{3} : \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} =$

r) $\frac{4}{5} : \frac{9}{4} : \frac{3}{7} =$

s) $\frac{8}{3} \cdot \frac{7}{8} : \frac{6}{5} =$

t) $\frac{6}{5} : \frac{11}{3} \cdot 2 =$

u) $\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{9} =$

v) $\frac{8}{9} : \frac{3}{2} : 5 =$

w) $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} =$

x) $\frac{5}{9} : \frac{13}{4} \cdot 3 =$

y) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{4} : \frac{8}{5} =$

z) $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} : 9 =$

Aufgabe 19: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\frac{3}{2} + \frac{7}{3} - \frac{1}{6} =$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{6} : \frac{2}{3} =$

c) $\frac{7}{6} : 2 \cdot \frac{11}{3} - \frac{47}{36} =$

d) $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} =$

e) $6 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} : \frac{1}{10} =$

f) $\frac{12}{5} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4} - \frac{8}{9} + \frac{3}{10} =$

g) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{5} =$

h) $\frac{63}{71} \cdot \frac{289}{14} \cdot \frac{71}{33} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{5}{63} \cdot \frac{33}{289} =$

Aufgabe 20: *Berechne das Ergebnis.* (Benötigt Abschnitt „Assoziativ und Kommutativ“)

a) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) =$

b) $\frac{5}{7} : \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\right) =$

c) $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) =$

d) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{7}\right) =$

e) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{5}\right) =$

f) $\frac{7}{8} : \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{3}\right) =$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9}\right) =$

h) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{9}{5}\right) =$

Aufgabe 21: *Berechne das Ergebnis.* (Benötigt Abschnitt „Einsetzungsverfahren“ und Abschnitt „Assoziativ und Kommutativ“)

a) $\frac{a}{b} =$ mit: $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{3}{4}$

b) $2 \cdot \frac{a}{b} =$ mit: $a = \frac{5}{6}$ und $b = \frac{3}{7}$

c) $\frac{4 \cdot a}{2 \cdot b} =$ mit: $a = \frac{7}{3}$ und $b = \frac{9}{4}$

d) $\frac{a \cdot c}{b + c} =$ mit: $a = \frac{7}{2}$ und $b = \frac{9}{4}$ und $c = \frac{7}{8}$

e) $\frac{a + a \cdot c}{a \cdot b} =$ mit: $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{5}{4}$ und $c = \frac{3}{5}$

f) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} =$ mit: $b = \frac{11}{8}$ und $c = \frac{5}{9}$

g) $\left(\frac{2 \cdot a}{b} + \frac{a}{c}\right) : \frac{a}{3 \cdot b} =$ mit: $b = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{4}{3}$

h) $\frac{6 \cdot a}{b} \cdot \frac{b}{a \cdot c} =$ mit: $c = \frac{1}{12}$

Aufgabe 22: *Forme die Aufgabe zu einem Bruch um.*

a) $\frac{a}{b} \cdot c$ *b)* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ *c)* $\frac{a}{b} : \frac{2 \cdot c}{d}$

d) $\frac{a}{b} + 4$ *e)* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ *f)* $\frac{a}{b} + \frac{2 \cdot c}{d}$

g) $\frac{a}{b} + 4 : \frac{d}{c}$ *h)* $\frac{a}{b} : \frac{4}{5} - \frac{c}{d} \cdot \frac{2}{3}$ *i)* $\frac{4 \cdot a}{b} + \frac{2 \cdot c}{a \cdot d}$

j) $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{dc}{b}$ *k)* $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} : \frac{c}{d}$ *l)* $\frac{5 \cdot c}{a \cdot b} + \frac{6}{a \cdot d} - \frac{a - d}{3}$

Aufgabe 23: *Kürze im Bruch so viel wie möglich und berechne danach erst das Ergebnis. (Beachte dabei, dass nur Faktoren gekürzt werden können.)* (Benötigt Abschnitt „Assoziativ und Kommutativ“)

a) $\frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 7} =$ *b)* $\frac{12 \cdot 6 \cdot 15}{5 \cdot 4 \cdot 6} =$ *c)* $\frac{63 \cdot 14 \cdot 4}{9 \cdot 7 \cdot 7} =$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} =$ *e)* $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} =$ *f)* $\frac{8}{96} \cdot \frac{112}{4} \cdot \frac{96}{112} =$

g) $\frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{4 \cdot 11} =$ *h)* $\frac{6 \cdot 8 + 7 \cdot 12}{7 \cdot 4} =$ *i)* $\frac{14 \cdot 6 + 16 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4} =$

j) $\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{2} : \frac{2}{5} =$ *k)* $\frac{7}{4} \cdot \frac{9}{7} : \frac{9}{3} =$ *l)* $\frac{298}{517} \cdot \frac{489}{298} : \frac{489}{517} =$

m) $\frac{a \cdot b \cdot d}{d \cdot e \cdot a} =$ *n)* $\frac{d}{a} \cdot \frac{c}{e} : \frac{e}{a} =$ *o)* $\frac{8 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot b}{a \cdot 4 \cdot c} =$

Aufgabe 24: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\frac{13 - 5 \cdot 2 + 36 : 3 + 9 \cdot 5}{5} =$ *b)* $\frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 33 : 11}{4 \cdot 3 - 72 : 9 + 3 \cdot 6} =$

c) $\frac{6 \cdot 8 : 4 + 2 - 16 : 2}{89 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 35} =$ *d)* $\frac{52 - 95 : 5 + 11 \cdot 5}{156 - 8 \cdot 2 \cdot 4 - 108 : 9 : 2} =$

e) $\frac{66 \cdot 5 - 19 \cdot 4 + 111 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 - 77} =$ *f)* $\frac{21 + 80 \cdot 2 + 16 \cdot 3 - 56}{2835 : 5 - 14 \cdot 11 : 2} =$

Aufgabe 25: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} =$ *b)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{2} =$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} =$ *d)* $\frac{35}{6} : \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{5} =$

e) $\frac{7}{3} : \frac{7}{9} + \frac{12}{13} : \frac{5}{8} =$ *f)* $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{11} =$

Aufgabe 26: *Bilde den Kehrwert.*

a) $\frac{1}{3}$ *b)* $\frac{5}{4}$ *c)* $\frac{3}{8}$ *d)* $\frac{2}{9}$

e) $\frac{6}{7}$ *f)* $\frac{5}{3}$ *g)* $\frac{13}{5}$ *h)* $\frac{9}{4}$

i) $\frac{7}{10}$ *j)* $\frac{16}{9}$ *k)* $\frac{17}{8}$ *l)* $\frac{1}{20}$

l) $\frac{5}{1000}$ *m)* $\frac{23}{83}$ *n)* $\frac{66}{73}$ *o)* $\frac{96}{1}$

Aufgabe 27: *Gegeben sind vier Zahlen, welche insgesamt zwei Brüche bilden, und ein Operator. Ordne diese einmal so an, dass das Ergebnis dieser Rechnung maximal und einmal minimal wird.* (Benötigt „Negative Zahlen“)

a) 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; + *b)* 6 ; 1 ; 2 ; 4 ; +

c) 4 ; 7 ; 2 ; 1 ; − *d)* 3 ; 3 ; 6 ; 2 ; −

e) 5 ; 3 ; 8 ; 9 ; · *f)* 2 ; 1 ; 8 ; 5 ; ·

g) 6 ; 5 ; 7 ; 3 ; : *h)* 7 ; 10 ; 5 ; 2 ; :

Weitere Bruchrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.3) Lösungen zur Bruchrechnen.

2.3 Brüche als Dezimalzahlen

Um Brüche in *Dezimalzahlen* umzuwandeln bedarf es der schriftlichen *Division* oder eines guten Zahlengefühls. Anhand eines Beispiels soll ersteres verdeutlicht werden.

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{7} = & 2:7 = 0,285... \\
& -0 \\ \hline
& 20 \\
& -14 \\ \hline
& 60 \\
& -\ 56 \\ \hline
& 40 \\
& -\ \ 35 \\ \hline
& \vdots
\end{array} \tag{2.15}$$

An Gleichung (2.15) ist zu erkennen, wie jeder *Bruch* in eine *Dezimalzahl* umgewandelt werden kann. Dabei wird bei der schriftlichen Divisionsrechnung nach jeder *Subtraktion* eine Nachkommastellennull nach unten gezogen, sodass die Rechnung fortgesetzt werden kann bis kein *Rest* mehr existiert, eine *Periodizität* wie bei $\frac{1}{3} = 0,3333333333... = 0,\bar{3}$ festgestellt wird oder eine genauere *Dezimalzahl* nicht mehr erforderlich ist. Da im Allgemeinen bekannt ist, dass $\frac{3}{3} = 1$ ist, gilt folgende Definition zur *Periodizität*: $3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9} := 1$.

Im Allgemeinen sollte auf eine Umwandlung in *Dezimalzahlen* verzichtet werden, da die *Darstellung* durch einen *Bruch* meistens, das weitere Vorgehen vereinfacht. Die *Darstellung* einer Zahl als *Bruch* ist dabei eine Schreibweise, welche eine Rechnung fordert aber sie nicht ausführt. So kann zum Beispiel durch das Erhalten von *Bruchdarstellungen* folgende Rechnung leichter durchgeführt werden als in der *Dezimalzahlendarstellung*, welche im direkten Vergleich darunter zu finden ist. (Bei dieser Rechnung werden Klammern verwendet, deren Bedeutung genaustens im Abschnitt „Klammersetzung“ besprochen werden. Für diese Rechnung gilt, dass die Rechnung in der Klammer zu erst ausgeführt werden soll.)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} &= \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 3}{6 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
(0,\bar{6} + 0,1\bar{6}) \cdot 0,6 &= 0,8\bar{3} \cdot 0,6 = 0,5
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Gleichung (2.16) zeigt, dass die Rechnung mit den *Brüchen* zwar länger erscheint, aber vollständig im Kopf durchgeführt werden kann. Während die Rechnungen mit den *Dezimalzahlen* vielen nur mit Taschenrechner gelingen und dabei noch die Problematik der *Periodizität* bei der Eingabe in den Taschenrechner besteht, sodass als Ergebnis $0,499999999$ auf dem Taschenrechnerdisplay angezeigt wird. Dieses Ergebnis wäre nicht richtig und durch das *Runden* des Ergebnisses bekommt der Schüler oftmals den Eindruck, dass solche Rechnungen nicht ohne Taschenrechner schaffbar seien.

Dabei unterliegt das Prinzip *Runden* klaren Regeln. So gilt, wenn die Stelle hinter der *gerundet* werden soll größer als vier ist, dann wird aufgerundet. Beim Aufrunden wird die *Ziffer* an der gerundet wird um eins erhöht. Andernfalls wird abgerundet und die *Ziffer* bleibt unangetastet.

$$\begin{aligned} 0,485 &\approx 0,49 \qquad \text{aufrunden} \\ 0,322 &\approx 0,32 \qquad \text{abrunden} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Das Prinzip des *Rundens* ist wichtig, da bei vielen Rechnungen im Ergebnis viele Nachkommastellen auftreten. Aus diesem Grund gilt stillschweigend die Konvention, dass immer auf zwei Nachkommastellen gerundet wird, außer es ist anders angegeben.

Dieses Verfahren zur Umwandlung von *Brüchen* in *Dezimalzahlen* ist in erster Linie nützlich um *Prozentwerte* auszurechnen, was detaillierter im Abschnitt „Prozentrechnung“ beschrieben wird. Es ist ratsam für jeden Schüler, wenn jede mögliche Rechnung mit *Brüchen* bewältigt wird, da die *Bruchrechnung* mit zunehmenden Umfang der Mathematik an Bedeutung gewinnt. Aus diesem Grund befindet sich am Anhang dieses Buches eine Auflistung einiger besonders oft vorkommenden *Brüche* und ihrer *Dezimalszahldarstellung* (16.5).

2.3.1 Übungsaufgaben zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1: *Wandle folgende Brüche in Dezimalzahlen um.*

a) $\frac{1}{2} =$	*b)* $\frac{1}{3} =$	*c)* $\frac{1}{5} =$
d) $\frac{1}{8} =$	*e)* $\frac{1}{4} =$	*f)* $\frac{1}{16} =$
g) $\frac{3}{4} =$	*h)* $\frac{4}{5} =$	*i)* $\frac{2}{3} =$
j) $\frac{6}{7} =$	*k)* $\frac{1}{12} =$	*l)* $\frac{19}{5} =$
m) $\frac{5}{9} =$	*n)* $\frac{11}{6} =$	*o)* $\frac{5}{3} =$
p) $\frac{43}{5} =$	*q)* $\frac{55}{2} =$	*r)* $\frac{17}{8} =$
s) $\frac{67}{7} =$	*t)* $\frac{81}{3} =$	*u)* $\frac{55}{7} =$
v) $\frac{1}{10} =$	*w)* $\frac{1}{100} =$	*x)* $\frac{1}{1000} =$

Aufgabe 2: *Berechne folgende Aufgaben.*

a) $4 \cdot 0,1 =$	*b)* $1 + 0,75 =$	*c)* $9 \cdot 1,001 =$
d) $2,125 - 1 =$	*e)* $6,\bar{6} + 3,\bar{3} =$	*f)* $1 + 0,0004 =$
g) $3,003 : 3 =$	*h)* $100 \cdot 1,001 =$	*i)* $1000 \cdot 0,001 =$
j) $5,\bar{5} : 5 =$	*k)* $5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} =$	*l)* $14 + 0,\bar{7} =$
m) $4 \cdot 0,9 =$	*n)* $8 - 0,15 =$	*o)* $4 \cdot 2,212 =$
p) $9,853 - 6 =$	*q)* $1,5 + 8,7 =$	*r)* $2 + 1,6974 =$
s) $2,195 : 5 =$	*t)* $125 \cdot 0,005 =$	*u)* $0,1 \cdot 0,1 =$
v) $16,24\bar{8} : 8 =$	*w)* $11 \cdot 0,01 + 1,\bar{1} =$	*x)* $46 + 8,\bar{5} =$

Aufgabe 3: *Runde die Zahlen auf zwei Nachkommastellen.*

$a)\ 0,562 \approx$	$b)\ 0,337 \approx$	$c)\ 0,753 \approx$	$d)\ 12,2567 \approx$
$e)\ 7,419 \approx$	$f)\ 2,456 \approx$	$g)\ 9,783 \approx$	$h)\ 37,3783 \approx$
$i)\ 5,505 \approx$	$j)\ 4,782 \approx$	$k)\ 0,228 \approx$	$l)\ 25,7342 \approx$
$m)\ 0,111 \approx$	$n)\ 4,776 \approx$	$o)\ 5,387 \approx$	$p)\ 78,0152 \approx$
$q)\ 1,002 \approx$	$r)\ 1,273 \approx$	$s)\ 4,324 \approx$	$t)\ 11,0144 \approx$
$u)\ 2,572 \approx$	$v)\ 0,004 \approx$	$w)\ 0,786 \approx$	$x)\ 35,7855 \approx$

Aufgabe 4: *Berechne die Gesamtpreise der Bestellungen.*

a) 2 Eistee, 1 Pizza, 1 Salat und 1 Eisbecher

b) 1 Kaffee, 1 Limonade, 1 Gemüseauflauf, 1 Grillkäse und 1 Tiramisu

c) 1 Kaffee, 1 Eistee, 1 Steak, 1 Bratkartoffeln und 1 Eisbecher

d) 2 Limonade, 1 Frikassee, 1 Reis und 1 Eisbecher

e) 2 Kaffee, 1 Lasagne, 1 Suppe und 1 Götterspeise

f) 1 Kaffee, 1 Eistee, 1 Frikassee, 1 Reis und 1 Tiramisu

g) 1 Eistee, 1 Pizza, 1 Eisbecher und 1 Tiramisu

h) 1 Limonade, 1 Eistee, 1 Lasagne, 1 Salat und 1 Eisbecher

i) 2 Kaffee, 1 Gemüseauflauf, 1 Salat und 1 Tiramisu

j) 2 Limonade, 3 Stärkeklöße und 1 Götterspeise

Aufgabe 5: *Welche Zahl liegt genau zwischen den angegebenen Zahlen?*

a) 3 und 1	*b)* 1 und 0
c) 5 und 8	*d)* $0,1$ und $0,2$
e) 0 und $0,3$	*f)* $0,05$ und $0,01$
g) $4,3$ und $1,2$	*h)* $0,0004$ und $0,0034$
i) $2,4$ und $34,2$	*j)* $84,21$ und $5,35$
k) $7,8$ und $7,8$	*l)* $98,1461$ und $477,254$

Aufgabe 6: *Berechne das Ergebnis.*

a) $0,5 + 1,2 =$	*b)* $1,4 + 6,7 =$	*c)* $4,9 + 3,5 =$
d) $11,4 + 6,8 =$	*e)* $6,6 + 8,7 =$	*f)* $3,2 + 9,9 =$
g) $5,4 + 8,2 =$	*h)* $14,6 + 18,7 =$	*i)* $0,53 + 4,24 =$
j) $7,34 + 5,72 =$	*k)* $41,93 + 73,52 =$	*l)* $1,44 + 5,87 =$
m) $6,524 + 5,842 =$	*n)* $5,426 + 3,332 =$	*o)* $7,452 + 8,134 =$

Aufgabe 7: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2,5 - 1,2 =$	*b)* $9,4 - 6,7 =$	*c)* $4,9 - 3,5 =$
d) $11,4 - 6,8 =$	*e)* $9,6 - 8,7 =$	*f)* $13,2 - 9,9 =$
g) $15,4 - 8,2 =$	*h)* $14,6 - 11,7 =$	*i)* $6,53 - 4,24 =$
j) $7,34 - 5,72 =$	*k)* $141,93 - 73,52 =$	*l)* $8,44 - 5,87 =$
m) $6,524 - 5,842 =$	*n)* $5,426 - 3,332 =$	*o)* $9,452 - 8,134 =$

Aufgabe 8: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2,5 \cdot 1,2 =$	*b)* $9,4 \cdot 6,7 =$	*c)* $4,9 \cdot 3,5 =$
d) $11,4 \cdot 6,8 =$	*e)* $9,6 \cdot 8,7 =$	*f)* $13,2 \cdot 9,9 =$
g) $15,4 \cdot 8,2 =$	*h)* $14,6 \cdot 11,7 =$	*i)* $6,53 \cdot 4,24 =$
j) $7,34 \cdot 5,72 =$	*k)* $141,93 \cdot 73,52 =$	*l)* $8,44 \cdot 5,87 =$
m) $6,524 \cdot 5,842 =$	*n)* $5,426 \cdot 3,332 =$	*o)* $9,452 \cdot 8,134 =$

Aufgabe 9: *Berechne das Ergebnis.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

a) $-2,5-1,2=$
b) $-9,4+6,7=$
c) $1,9-3,5=$
d) $11,4-16,8=$
e) $-9,6+8,7=$
f) $-13,2-9,9=$
g) $-15,4+8,2=$
h) $-14,6+11,7=$
i) $-6,53+4,24=$
j) $2,34-5,72=$
k) $-141,93-73,52=$
l) $-8,44+5,87=$
m) $-6,524-5,842=$
n) $0,426-3,332=$
o) $4,452-8,134=$

Aufgabe 10: *Berechne das Ergebnis.*

a) $0,3+0,5\cdot 3-0,6=$
b) $3,5-1,2\cdot 2,4:2+6,7=$
c) $3,4\cdot 5,4+0,2\cdot 20-5,4=$
d) $8,8:2,2-1,1+5,4\cdot 3,1=$
e) $0,5\cdot 7,8-3\cdot 1,5+9,2\cdot 3,4=$
f) $4,1\cdot 2,4\cdot 5-2,5\cdot 8\cdot 2,3=$
g) $7,3\cdot 1,2-5,5+4,2:0,5+8,3\cdot 1,3=$
h) $12,5\cdot 3,4:0,1+66,4-32,7\cdot 0,8=$

Aufgabe 11: *Berechne das Ergebnis.*

a) $1,34+9,42+4,82+8,23=$
b) $42,24+1,74+25,72+37,31=$
c) $5,25+7,35+14,56+88,53=$
d) $63,34+2,52+26,26+8,87=$
e) $7,32+1,45+0,51+0,093=$
f) $0,525+0,178+0,952+0,227=$
g) $25,561+95,156+32,681+44,679=$
h) $12,45+0,2456+3,184+9,48134=$

Aufgabe 12: *Berechne das Ergebnis.*

a) $53,34-13,52-3,72-18,2=$
b) $14,4-0,52-4,32-1,23=$
c) $7,6-0,65-0,93-1,32=$
d) $75,34-5,6-7,21-19,12=$
e) $45,8-4,54-12,3-23,95=$
f) $129,33-53,32-12,45-18,48=$
g) $4,345-0,892-0,345-2,567=$
h) $19,3-0,414-11,4263-0,3245=$

Aufgabe 13: *Berechne das Ergebnis.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

a) $4,34 - 9,82 + 1,82 - 6,73 =$

b) $5,43 + 8,54 - 11,44 + 5,42 =$

c) $9,41 + 1,45 + 0,06 - 13,89 =$

d) $-7,156 + 3,256 + 0,561 + 5,814 =$

e) $-0,892 + 2,567 - 12,45 + 53,32 =$

f) $-4,346 - 0,255 - 0,814 - 9,419 =$

g) $-41,94 + 5,392 - 0,2576 - 18,15 =$

h) $-84,601 - 0,0536 + 0,104 + 714,4 =$

Aufgabe 14: *Bilde den Kehrwert.*

a) 4 *b)* 9 *c)* $0,2$ *d)* $0,75$

e) $0,01$ *f)* 20 *g)* $0,\bar{6}$ *h)* $0,9$

i) $0,45$ *j)* $0,3$ *k)* 12 *l)* $1,5$

l) $0,53$ *m)* $2,83$ *n)* $0,235$ *o)* $0,924$

Aufgabe 15: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{2}{3}$ $0,65$ *b)* $0,\bar{5}$ $\frac{5}{9}$ *c)* $\frac{3}{4}$ $0,755$

d) $\frac{5}{8}$ $0,67$ *e)* $2,35$ $\frac{46}{20}$ *f)* $1,2$ $\frac{17}{15}$

g) $0,225$ $\frac{1}{4}$ *h)* $\frac{72}{1000}$ $0,07$ *i)* $\frac{9}{5}$ $1,77$

Weitere Übungen zu den Darstellungen von Brüchen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.4) Lösungen zu Dezimalzahlen.

2.4 Parameter

Parameter sind Platzhalter hinter denen sich jede mögliche *Zahl* verbergen kann. Jeder *Parameter* gehört einer *Zahlenmenge* an und kann somit jede beliebige *Zahl* aus dieser *Menge* darstellen. Das bedeutet, dass Rechnungen mit *Parametern* für alle möglichen *Zahlen* Gültigkeit besitzen. Ein *Parameter* wird mit einem Buchstaben gekennzeichnet. Somit kann die Abkürzung der *Addition*, also die *Multiplikation*, wie folgt dargestellt:

$$a + a = 2 \cdot a \quad . \tag{2.18}$$

Die Gleichung (2.18) für jede *Zahl* für a Gültigkeit. Ebenso kann auch die *Subtraktion* einer *Zahl* von sich selbst mit *Parametern* dargestellt werden:

$$a - a = 0 \quad . \tag{2.19}$$

Besitzt ein *Parameter* einen Namen wie a, dann unterscheidet dieser sich von einem anderen *Parameter* b. Beide *Parameter* können nicht zusammengefasst werden und auch ihr Name a und b wechseln. In bestimmten Fällen, kann es vorkommen, dass *Parameter* nach ihrer Bestimmung den gleichen Wert haben können.
Beim Rechnen mit *Parametern* (oder später auch *Variablen*) ist es wichtig zu beachten, dass nur gleiche *Produkte* von *Parametern* zusammengefasst werden können. Dazu einige Beispiele:

$$\begin{aligned} 4a + 3a + 5b + 6b &= 7a + 11b \quad , \\ 4ab + 3a + 5ab + 6b &= 3a + 9ab + 6b \quad , \\ 3aa + 5ab - aa + 2b - 3ab + 4b &= 2aa + 2ab + 6b \quad . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Bei diesem Zusammenfassen von *Termen* müssen die vorgestellten Regeln beachtet werden. *Terme* sind dabei Teile von *Gleichungen* auf einer Seite eines *Äquivalenzzeichens*.

2.4.1 Übungsaufgaben zu Parametern

Aufgabe 1: *Vereinfache so viel wie möglich.*

a) $3x + 5a - 3a + 2x =$

b) $6k - 7u + 11k + 14u - 2k =$

c) $4y + 8x + 3x - 7x + 15y =$

d) $69g - 5p + 16p - 7g + 11g =$

e) $3a + 3b + 19a - 2b + 7b =$

f) $13a + 53b - 32b - 11b + 8a =$

g) $5b - 7h + 3d + 18h - 4b + 12d =$

h) $12x + 8y + 23z - 5y + 13z - 9x =$

Aufgabe 2: *Fasse soviel wie möglich zusammen.*

a) $6a + 5d - 3a =$

b) $14y + 8x - 10y - 3x =$

c) $7g - 14h - 4g - 5h =$

d) $82a + 66b - 49a - 38b =$

e) $3z - 7g + 19g + 6z =$

f) $8a - 5f + a - 4f =$

g) $99k - 43h + 37h - 25k =$

h) $82u + 13l - 44l - 77u =$

i) $-4z + 3r - 8r - 3z =$

j) $33y - 28x + 19y + 43x - 27y =$

k) $16c - 4c + 72d + 17c - 13d =$

l) $25p + 8o - 9o - 22p + 5o =$

m) $5v - 9q - 3v + 8v - 2v =$

n) $13e - 5w + 4e + 19w - 7e =$

o) $72a + 33s - 19a - 56d + 5s - 44d =$

p) $34f + 5g - 7h + 11g + 17h - 15f =$

q) $5a + 7b - 3a - 2b + 6a + 11a + 7b - 2a =$

r) $9c - 4c - 6a - 12a + 36a + 6c + a - 2c + 15c =$

s) $75z - 14t - 7t - 33z + 54t + 16c - 12z - 4c =$

t) $-11x + 71y + 33x + 45z - 13y + 18x - 29z - 13y =$

u) $a + b + a + b + c + b + a + b - c - a + b + c - a - b - a =$

v) $55d - 33s + d + 65s - 32a + 13z - 21d + 77a - z =$

Aufgabe 3: *Vereinfache so viel wie möglich.*

a) $\frac{3}{5}p + \frac{6}{7}e - \frac{1}{5}p + \frac{2}{7}e =$

b) $\frac{8}{9}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y =$

c) $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}b + \frac{2}{5}a =$

d) $\frac{4}{5}r + \frac{2}{3}w - \frac{1}{2}r - \frac{5}{9}w =$

e) $\frac{5}{2}f - \frac{1}{4}f + \frac{8u}{3} - \frac{5u}{6} =$

f) $\frac{10}{3}n + \frac{4}{5}m + \frac{p}{11} - \frac{m}{2} - \frac{7}{9}n =$

g) $\frac{5}{4}v + \frac{9}{5}m + \frac{3}{10}m - \frac{1}{2}v + \frac{3}{4}v =$

h) $\frac{9}{5}c + \frac{7}{2}d + \frac{4}{3}c + \frac{1}{4}s + \frac{2}{7}s - \frac{9}{10}d =$

Aufgabe 4: *Vereinfache so viel wie möglich.*

a) $0,8x + 6g - 1,2g + 1,9x =$

b) $4,5v + 2,2v + 6,7t - 1,8t - 0,3t =$

c) $6,5y + 3,3z + 12,4z - 3,1y =$

d) $11,3h + 19,9h + 5,4g - 1,9g - 0,5h =$

e) $0,03f + 0,002t - 0,004f + t =$

f) $x + 5,5y + 9,11x - 4,95y =$

g) $0,82d + z + 9,3d - 0,25z + 4,1p + 0,006p =$

h) $7,5k + 9,1l - 2,3k + 8,1k - 1,03l - 0,55k =$

Aufgabe 5: *Vereinfache so viel wie möglich.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

a) $-4x + 8y - 11x - 15y =$

b) $2,2f - 6,3f + 9,1a - 4,2g =$

c) $\frac{1}{2}d + 0,3g - \frac{5}{4}g - 2d =$

d) $5t - \frac{13}{4}z + 3,34t + 4z =$

e) $-25u - 12,37a + \frac{13}{4}u - 0,4u + \frac{7}{2}a =$

f) $5,6z + \frac{56}{8}y - 3x - 12,3y - 12z + 9x + \frac{1}{4}z =$

g) $\frac{3}{8}d - 0,4g + 0,05d - \frac{3}{4}d + g =$

h) $2t + \frac{3}{5}z - \frac{17}{4}t + 2,2x - 0,3y + \frac{3}{4}x - 0,1z + 0,8y - \frac{y}{2} =$

Aufgabe 6: *Vereinfache so viel wie möglich.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“, „Prozentrechnung“ und „Assoziativ und Kommutativ“)

a) $3(a+2s)-2(3s+4a)=$

b) $4\left(k-0,4h+\frac{g}{2}\right)+1,9h=$

c) $5(0,2t-1,1u)-4t+3,7u=$

d) $0,5(0,4z-3t)-(t-2z)-\frac{3}{4}=$

e) $-(3e+0,2s)-\left(\frac{4}{5}s-1,25e\right)=$

f) $d(3-f)+4fd-6,2(d+0,5f)=$

g) $\frac{3}{2}\left(6b+\frac{3}{10}a\right)+0,2\,(a-b)\,2=$

h) $40\%a-6b+\frac{9}{4}a-1,1\,(a+5b-3a)=$

Weitere Übungen zu Termen und Parametern zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.5) Lösungen zu Parametern.

2.5 Einsetzungsverfahren

Das *Einsetzungsverfahren* wird oftmals mit Gleichungssystemen in Verbindung gebracht, allerdings ist das dahinter liegende Prinzip von fundamentalerer Bedeutung für den Umgang mit mathematischem und naturwissenschaftlichem Wissen. Bei diesem Verfahren wird entweder für einen *Parameter*, einer *Variable* oder einen *Term* eine Zahl oder einem weiterführender *Term* eingesetzt, sodass es generell zu einer Vereinfachung, einer Beispielrechnung oder der Reduzierung von unbekannten Größen kommt. Dabei ist ein *Parameter* ein Platzhalter für eine Zahl (oftmals werden a, b, c, d als *Parameter* verwendet), während die *Variable* der Platzhalter für eine veränderliche Zahl (oftmals werden x, y, z als *Variable* verwendet) ist und ein *Term* ein ganzer Abschnitt einer Rechenanweisung (zum Beispiel $5 \cdot x \cdot a$ wäre ein Term).

Als Beispiel für das Einsetzen von Zahlen soll das *Erweitern* bei der Bruchrechnung aus Gleichung (2.14) dienen. Hierbei soll gelten, dass für a der Wert 2, für b der Wert 3 und für den *Erweiterungsparameter* n die Zahl 4 eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} && \text{mit: } a = 2 \\
\Rightarrow \frac{2}{b} &= \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{b \cdot n} && \text{mit: } b = 3 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n} && \text{mit: } n = 4 \\
\Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Wie bereits oben schon erwähnt wurde, ist dieses Verfahren auch mit *Termen* möglich.

$$\begin{aligned}
a + b &= c && \text{mit: } a = d - e + f \\
\Rightarrow d - e - f + b &= c && \text{mit: } c = e - f - d \\
\Rightarrow d - e - f + b &= e - f - d
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.5.1 Übungsaufgaben zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: *Setze in die Gleichungen $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ ein und berechne das Ergebnis.*

a) $a + b - c =$

b) $3 \cdot a - 4 \cdot b + c =$

c) $c \cdot b - b \cdot a =$

d) $a \cdot b - b \cdot a =$

e) $4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot c - 3 \cdot b \cdot c =$

f) $2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c =$

g) $a \cdot b \cdot c =$

h) $4 \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{a} =$

Aufgabe 2: *Setze in die Gleichungen ein und berechne das Ergebnis.*

a) $a \cdot a =$ mit: $a = 9$

b) $4 + c \cdot d =$ mit: $c = 2$ und $d = 4$

c) $2 \cdot a \cdot b + 8 =$ mit: $a = 3$ und $b = 7$

d) $7 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c =$ mit: $a = 2$ und $b = 5$ und $c = 3$

e) $a \cdot b \cdot c \cdot d =$ mit: $a = \frac{1}{4}$ und $b = 4$ und $c = 3$ und $d = 9$

f) $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h =$ mit: $G = 27$ und $h = 9$

g) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t =$ mit: $a = \frac{1}{4}$ und $t = 6$

h) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t + v \cdot t =$ mit: $a = 9,81$ und $v = 5$ und $t = 4$

Aufgabe 3: *Setze in die Gleichungen ein.* (Benötigt Abschnitt „Assoziativ und Kommutativ“)

a) $a \cdot 3 =$ mit: $a = 2 \cdot d$

b) $c \cdot d =$ mit: $c = a + b$ und $d = 2$

c) $a + 4 =$ mit: $a = d \cdot c + 4 \cdot t$

d) $A =$ mit: $A = a \cdot b$ und $b = 3$ und $a = 8$

e) $H - F =$ mit: $F = a - b$ und $H = a + b$ und $b = 2$

f) $\frac{f}{g} =$ mit: $f = 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$ und $g = 2 \cdot a \cdot a \cdot d \cdot d$

g) $\xi \cdot \upsilon + \vartheta =$ mit: $\xi = a$ und $\upsilon = b$ und $\vartheta = \wp$

h) $\Delta + \square + \diamond =$ mit: $\Delta = \nabla - \Xi$ und $\square = \Xi + \Phi$ und $\diamond = \zeta - \nabla - \Phi$

Aufgabe 4: *Berechne alle freien Zellen der Tabelle. Die Rechenvorschriften sind jeweils in der ersten Spalte gegeben.*

	1	2	3	4	5	6	7
a	3	6	$0,25$	$3,1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{3}$
b	4	2	$1,75$	$4,5$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{4}$
$c = a \cdot b$							
$d = \frac{a}{b}$							
$e = c \cdot d$							
$f = e + 2 \cdot a$							

Weitere Übungen zum Einsetzungsverfahren zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.6) Lösungen zum Einsetzungsverfahren.

2.6 Prozentrechnung

Die *Prozentrechnung* ist von besonderer Bedeutung in der heutigen Gesellschaft, dabei versteckt sich hinter ihr nur der Bruch $\frac{1}{100}$. Denn pro cent bedeutet übersetzt nicht viel mehr als pro hundert. Aus diesem Bruch heraus hat sich historisch dann das *Prozentzeichen* % entwickelt. Der rechnerische Umgang ist durch das Ersetzen von % durch $\frac{1}{100}$ gegeben. Während für Promill sich ebenfalls ein abkürzendes Zeichen entwickelt hat: $1‰ = \frac{1}{1000}$.

$$4\% = 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0,04 \tag{2.23}$$

Auch andere Rechnungen sind auf diesen Fakt reduzierbar: Sei ein Kapital von 1000€ mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt, wie hoch wären die Zinsen nach einem Jahr? Diese Frage kann leicht dargestellt werden als:

$$1000€ \cdot 4\% = 1000€ \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 4000€ \cdot \frac{1}{100} = \frac{4000€}{100} = 40€ \quad , \tag{2.24}$$

wobei genauere Ausführungen zu dieser Art von Rechnungen weiter unten im Kapitel „Ökonomische Anwendungen“ folgen werden.

Der Dreisatz zur Frage „Wieviel sind 4% von 300?“ gestaltet sich als:

$$\begin{array}{rll} 300 & \text{entsprechen:} & 100\% \\ 3 & \text{entsprechen:} & 1\% \\ 12 & \text{entsprechen:} & 4\% \end{array} \tag{2.25}$$

Allerdings ist der Dreisatz durch das Wissen, dass $\% = \frac{1}{100}$ ist, wie folgt verkürzt durchzuführen:

$$300 \cdot 4\% = \frac{4 \cdot 300}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \quad , \tag{2.26}$$

wobei in Gleichung (2.26) die Zwischenschritte weggelassen werden könnten, da $\frac{300}{100}$ und $3 \cdot 4$ nicht von besonderer Schwierigkeit sind.
Ein anderer Aspekt bei der *Prozentrechnung* ist die *Normierung*. Die *Normierung* beschreibt die Rechnung wie viel ein *Prozent* darstellen. Sei zum Beispiel eine *Menge* von 250000 gegeben, dann kann jede *Teilmenge* (zum Beispiel 46972) mit dem *Kehrwert* der *Menge multipliziert* und somit *normiert* werden.

$$\frac{1}{250000} \cdot 46972 = 18,7888\% \quad , \tag{2.27}$$

Somit entspricht die *Teilmenge* insgesamt $18,7888\%$ der *Gesamtmenge*. Es gibt verschiedene Formen der *Normierung* neben der *Normierung* auf 100%, welche in diesem Abschnitt vorgestellt wurde.

2.6.1 Übungsaufgaben zu Prozentrechnung

Aufgabe 1: *Wandele folgende Zahlen in Prozentwerte um.*

$a)\ 0,01 =$	$b)\ 100 =$	$c)\ 0,5 =$
$d)\ 0,125 =$	$e)\ 0,0024 =$	$f)\ 289 =$
$g)\ 0,9315 =$	$h)\ 0,0341 =$	$i)\ 0,891 =$
$j)\ 0,54 =$	$k)\ 354 =$	$l)\ 0,976342 =$
$m)\ 0,354 =$	$n)\ 1,1229 =$	$o)\ 245,287 =$
$p)\ 5,1006 =$	$q)\ 0,0005 =$	$r)\ 1,154578 =$
$s)\ 0,999 =$	$t)\ 3,1204 =$	$u)\ 0,0487 =$
$v)\ 3,9552 =$	$w)\ 0,5755 =$	$x)\ 0,000004 =$

Aufgabe 2: *Wandele folgende Prozentwerte in Dezimalzahlen um.*

$a)\ 1\% =$	$b)\ 100\% =$	$c)\ 54\% =$
$d)\ 1626\% =$	$e)\ 2,374\% =$	$f)\ 2,01\% =$
$g)\ 99\% =$	$h)\ 5\% =$	$i)\ 81,063\% =$
$j)\ 8\% =$	$k)\ 0,4\% =$	$l)\ 30\% =$
$m)\ 0,06\% =$	$n)\ 11,89\% =$	$o)\ 0,9\% =$
$p)\ 12\% =$	$q)\ 0\% =$	$r)\ 587,3\% =$
$s)\ 4\% =$	$t)\ 909\% =$	$u)\ 11\% =$
$v)\ 9786\% =$	$w)\ 8,457\% =$	$x)\ 5,64\% =$

Aufgabe 3: *Wandele folgende Brüche in eine Dezimalzahl um und schreibe sie dann als Prozentwert auf. Bei dieser Aufgabe brauchen nur drei Nachkommastellen beachtet werden.*

a) $\frac{1}{4} =$	*b)* $\frac{1}{3} =$	*c)* $\frac{5}{6} =$
d) $\frac{9}{14} =$	*e)* $\frac{8}{25} =$	*f)* $\frac{1}{8} =$
g) $\frac{7}{9} =$	*h)* $\frac{9}{4} =$	*i)* $\frac{43}{83} =$
j) $\frac{8}{3} =$	*k)* $\frac{7}{2} =$	*l)* $\frac{1}{97} =$
m) $\frac{5}{66} =$	*n)* $\frac{1}{351} =$	*o)* $\frac{4}{25} =$
p) $\frac{1}{7} =$	*q)* $\frac{9}{8} =$	*r)* $\frac{21}{250} =$
s) $\frac{3}{71} =$	*t)* $\frac{5}{83} =$	*u)* $\frac{16}{354} =$
v) $\frac{1}{1} =$	*w)* $\frac{0}{4} =$	*x)* $\frac{75}{976} =$

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis.*

a) $700 \cdot 1\% =$	*b)* $45 \cdot 100\% =$	*c)* $200 \cdot 4\% =$
d) $80 \cdot 25\% =$	*e)* $1500 \cdot 2\% =$	*f)* $50000 \cdot 3\% =$
g) $9000 \cdot 99\% =$	*h)* $3141 \cdot 0,1\% =$	*i)* $120 \cdot 5\% =$
j) $6453 \cdot 8\% =$	*k)* $972 \cdot 245\% =$	*l)* $5707 \cdot 2\% =$
m) $2040 \cdot 54\% =$	*n)* $2786 \cdot 9\% =$	*o)* $6872 \cdot 78\% =$
p) $7827 \cdot 44,68\% =$	*q)* $1837 \cdot 0,827\% =$	*r)* $3287 \cdot 0,37\% =$
s) $79,94 \cdot 45\% =$	*t)* $3248,69 \cdot 7,34\% =$	*u)* $2304,56 \cdot 0,003\% =$
v) $287,784 \cdot 92,75\% =$	*w)* $954,557 \cdot 3,786\% =$	*x)* $245,57 \cdot 78,57\% =$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis.*

a) 4% von 1000€ sind:
b) 2% von 5550€ sind:
c) 10% von 862434€ sind:
d) 19% von 299€ sind:
e) 12% von 1200€ sind:
f) 11% von 65300€ sind:

Aufgabe 6:

a) 4%Jahreszins auf 2000€ ergeben nach einem Jahr:
b) 11%Jahreszins auf 7500€ ergeben nach einem Jahr:
c) 3%Jahreszins auf 4500€ ergeben nach einem Jahr:
d) $2,5$%Jahreszins auf 13480€ ergeben nach einem Jahr:
e) $1,9$%Jahreszins auf 14567€ ergeben nach einem Jahr:
f) $2,15$%Jahreszins auf 18346€ ergeben nach einem Jahr:
g) $3,75$%Jahreszins auf 20500€ ergeben nach einem Jahr:
h) $2,275$%Jahreszins auf 84344€ ergeben nach einem Jahr:
i) $4,015$%Jahreszins auf 48346€ ergeben nach einem Jahr:
j) $2,34$%Jahreszins auf 32567€ ergeben nach einem Jahr:
k) $2,7325$%Jahreszins auf 93872€ ergeben nach einem Jahr:
l) $0,05$%Jahreszins auf 25268€ ergeben nach einem Jahr:

Aufgabe 7: *Berechne die Geldsumme nach der angegebenen Zeit und dem angegebenen Prozentsatz.*

a) 2500€ zu 7% Zinsen pro Jahr über 2 Jahre.
b) 6000€ zu 3% Zinsen pro Jahr über 4 Jahre.
c) 4500€ zu $2,125\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Jahre.
d) 15200€ zu 2% Zinsen pro Jahr über 2 Jahre.
e) 22400€ zu 6% Zinsen pro Jahr über 6 Jahre.
f) 91200€ zu $1,45\%$ Zinsen pro Jahr über 10 Jahre.
g) 123500€ zu $3,35\%$ Zinsen pro Jahr über 7 Jahre.
h) 95200€ zu $9,15\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Jahre.
g) 40500€ zu $2,12\%$ Zinsen pro Jahr über 3 Jahre.
h) 8240600€ zu $7,985\%$ Zinsen pro Jahr über 12 Jahre.

Aufgabe 8: *Berechne die Geldsumme nach der angegebenen Zeit und dem angegebenen Prozentsatz.*

a) 5000€ zu 4% Zinsen pro Jahr über $2,5$ Jahre.
b) 8000€ zu 2% Zinsen pro Jahr über $4,25$ Jahre.
c) 12500€ zu $2,25\%$ Zinsen pro Jahr über $5,75$ Jahre.
d) 32300€ zu 3% Zinsen pro Jahr über $1,5$ Jahre.
e) 26800€ zu 7% Zinsen pro Jahr über $0,25$ Jahre.
f) 9500€ zu $2,85\%$ Zinsen pro Jahr über 180 Tage.
g) 44600€ zu $5,45\%$ Zinsen pro Jahr über 950 Tage.
h) 54841€ zu $13,05\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Tage.
i) 29812€ zu $9,71\%$ Zinsen pro Jahr über $2,348$ Jahre.
j) 78820€ zu $4,354\%$ Zinsen pro Jahr über $6,7293$ Jahre.
k) 125030€ zu $0,75\%$ Zinsen pro Monat über $32,68$ Monate.
l) 270900€ zu $1,25\%$ Zinsen pro Monat über $4,21$ Jahre.

Aufgabe 9: *Um wie viel Prozent hat sich die Geldsumme verändert? (Beachte das Vorzeichen der Veränderung.)*

$a)$ 1000€ $\longrightarrow$ 1200€	$b)$ 3000€ $\longrightarrow$ 3300€	$c)$ 540€ $\longrightarrow$ 480€
$d)$ 1500€ $\longrightarrow$ 1700€	$e)$ 4750€ $\longrightarrow$ 4400€	$f)$ 140€ $\longrightarrow$ 250€
$g)$ 325€ $\longrightarrow$ 380€	$h)$ 175€ $\longrightarrow$ 145€	$i)$ 765€ $\longrightarrow$ 34€
$j)$ 1457€ $\longrightarrow$ 2451€	$k)$ 5€ $\longrightarrow$ 13€	$l)$ $25,23$€ $\longrightarrow$ $42,65$€
$m)$ 699€ $\longrightarrow$ 599€	$n)$ $5,99$€ $\longrightarrow$ $9,99$€	$o)$ $14,50$€ $\longrightarrow$ $12,50$€

Aufgabe 10: *Bestimme den prozentualen Anteil an der jeweiligen Menge. (Nutze die Normierung.) Und zeichne ein Tortendiagramm.*

$a)$	150	125	110	90	50	20	15
Anteil in %							

$b)$	600	450	225	75	45	20	5
Anteil in %							

$c)$	2560	1870	1500	1235	950	375	110
Anteil in %							

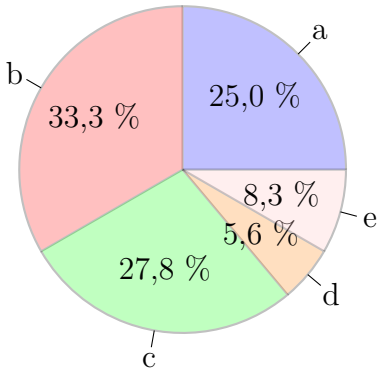
$d)$	11050	8600	4620	2200	950	290	180
Anteil in %							

$e)$	23300	17200	12400	9700	4500	2600	1200
Anteil in %							

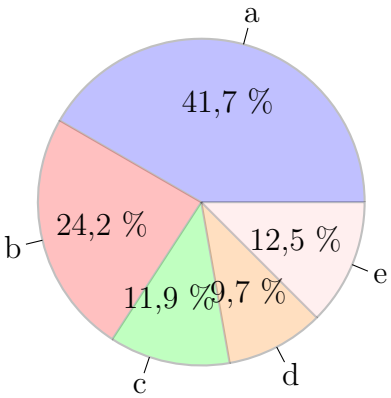
$f)$	67376	34525	15170	9542	7346	3456	2637
Anteil in %							

Aufgabe 11: *Bei Befragungen wurden jeweils insgesamt N Menschen interviewt. Bestimme die Anzahl der Menschen, die die jeweiligen Antworten gaben aus den Tortendiagrammen.*

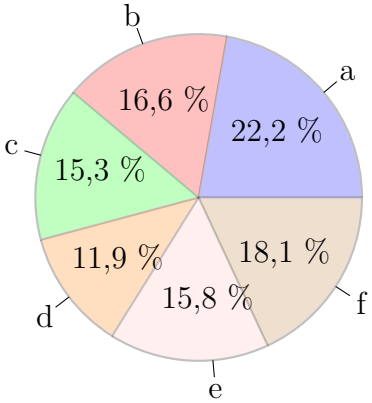
a) $N = 25000$



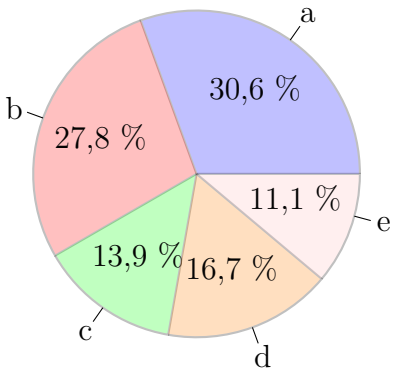
b) $N = 33000$



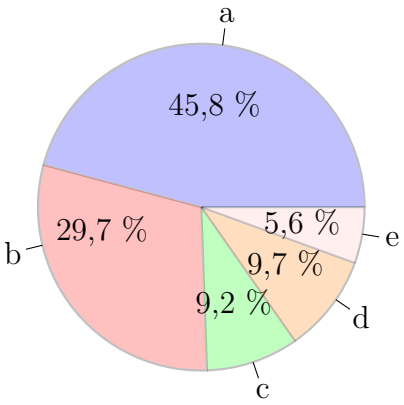
c) $N = 12500$



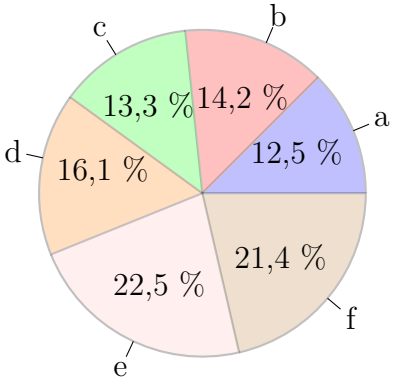
d) $N = 11500$



e) $N = 95000$



f) $N = 55000$



Aufgabe 12: *Berechne über Dreisatz die fehlenden Felder, wobei P für den Prozentanteil und R für den Realanteil steht.*

a) P	R
100 %	300 €

: 100 ·13 : 100 ·13

b) P	R
100 %	600 €

: 100 ·20 : 100 ·20

c) P	R
100 %	850 €
1 %	8,5 €

·26 ·26

d) P	R
150 %	1200 €

: 150 ·60 : 150 ·60

e) P	R
125 %	5000 €

: 125 ·75 : 125 ·75

f) P	R
80 %	1600 €
1 %	

·15 ·15

g) P	R
75 %	3000 €

·40

h) P	R
3000 ‰	7200 €

·5

i) P	R
14 %	7700 €
100 %	

Aufgabe 13: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

a) 10% von 500€
b) 12% von 3600€ =
c) 25% von 6500€
d) 66% von 9363€ =
e) 40% von 25000€
f) 5% von 120€ =
g) 23% von 4700€
h) 3% von 8565€ =
i) 56% von 2667€
j) 86% von 25780€ =
k) 130% von 400€
l) 560% von 8240€ =
m) 7% von 34677€
n) 250% von 4400€ =
o) 22,3% von 14000€
p) 44,5% von 8240€ =
q) 175,2% von 30000€
r) 66,66% von 133332€ =
s) 1,2% von 506€
t) 1490% von 4400€ =
u) 3463% von 346372€
v) 4567% von 9€ =

Aufgabe 14: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

a) 5‰ von 7000€
b) 25‰ von 9500€ =
c) 19‰ von 2450€
d) 82‰ von 12200€ =
e) 52‰ von 25000€
f) 175‰ von 1557€ =
g) 17,6‰ von 4700€
h) 236,8‰ von 8565€ =

Aufgabe 15: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

a) Wenn 6000€ insgesamt 120% entsprechen, wie viel entsprechen dann 25%?
b) Wenn 5500€ insgesamt 70% entsprechen, wie viel entsprechen dann 5%?
c) Wenn 1650€ insgesamt 66% entsprechen, wie viel entsprechen dann 10%?
d) Wenn 34890€ insgesamt 150% entsprechen, wie viel entsprechen dann 80%?
e) Wenn 46730€ insgesamt 225% entsprechen, wie viel entsprechen dann 37%?
f) Wenn 1337€ insgesamt 180% entsprechen, wie viel entsprechen dann 100%?
g) Wenn 835050€ insgesamt 50% entsprechen, wie viel entsprechen dann 133%?
h) Wenn 93520€ insgesamt 11% entsprechen, wie viel entsprechen dann 200%?
i) Wenn 23680€ insgesamt 93% entsprechen, wie viel entsprechen dann 46%?
j) Wenn 91410€ insgesamt 174% entsprechen, wie viel entsprechen dann 182%?

Aufgabe 16: *Bilde den Kehrwert.*

a) 6%	*b)* 583%	*c)* 52%	*d)* 84%
e) 44%	*f)* 954%	*g)* $0,5\%$	*h)* 149%
i) 106%	*j)* $0,7\%$	*k)* 9%	*l)* $2004,5\%$
l) $33,3\%$	*m)* $6,2\%$	*n)* $10,6\%$	*o)* $708,32\%$

Aufgabe 17: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) 33% $0,3$	*b)* $0,25$ 21%	*c)* 78% $0,77$
d) $6,74$ 690%	*e)* $0,45$ 45%	*f)* $0,285$ $29,2\%$
g) $934,67\%$ $9,3467$	*h)* $11,2\%$ $0,012$	*i)* $0,83$ 85%

Aufgabe 18: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{1}{3}$ 30%	*b)* 120% $\frac{5}{4}$	*c)* $\frac{3}{8}$ $37,5\%$
d) $\frac{5}{6}$ $83,2\%$	*e)* $1,5\%$ $\frac{3}{200}$	*f)* $0,4\%$ $\frac{1}{25}$
g) 90% $\frac{8}{9}$	*h)* $\frac{7}{16}$ $48,75\%$	*i)* $\frac{35}{9}$ 392%

Aufgabe 19: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{1}{2}$ $0,4$	*b)* $\frac{1}{4}$ 22%	*c)* 85% $0,88$
d) $\frac{7}{8}$ 90%	*e)* $0,62$ 62%	*f)* $\frac{1}{6}$ 15%
g) 123% $1,25$	*h)* $13,5\%$ $\frac{3}{20}$	*i)* $1,74$ $\frac{7}{4}$
j) $0,6$ $\frac{3}{5}$	*k)* $2,5$ $\frac{22}{9}$	*l)* 240% $\frac{12}{5}$
m) $14,2\%$ $\frac{1}{7}$	*n)* $6,4358$ $648,32\%$	*o)* $\frac{3}{100}$ $0,3\%$

Aufgabe 20: *Eine Person legt ein Kapital von* 5000€ *für einen Zins von* $p = 1,2\%$ *bei einer Bank an. Diese Zinsen werden jedes Jahr auf seinem Konto gutgeschrieben. Wie viel Zinsen bekommt die Person in den nächsten 10 Jahren und wie viel Geld besitzt diese Person dann insgesamt? Erstelle dazu eine Tabelle, um den gutgeschriebenen Geldwert jedes Jahres zu bestimmen und summiere diese Werte auf. Versuche anschließend die Rechnung über eine Potenzgleichung zu verkürzen. (Zinsen werden jedes Jahr neu aus dem vorliegenden Gesamtkapital berechnet!)*

Weitere Übungen zur Prozentrechnung zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.6) Lösungen zur Prozentrechnung.

2.7 Negative Zahlen

Die negativen Zahlen erweitern die *Zahlenmenge* der *Natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ [1] zu den *Ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, indem die *Subtraktion* mit der *Addition* vereinheitlicht wird. Dabei gehört der *Subtraktionsoperator* nun als Vorzeichen zu der Zahl dazu.

$$2 - 1 = 2 + (-1) = -1 + 2 \tag{2.28}$$

Wie die Gleichung (2.28) zeigt, bleibt das Vorzeichen immer bei der jeweiligen Zahl. Dabei gilt, dass das positive Vorzeichen + nicht oftmals nicht mitgeschrieben wird. Wichtig ist dabei, dass Zahlen mit negativem Vorzeichen immer in *Klammern* gesetzt werden, sodass niemals zwei *Grundrechenoperatoren* direkt hinter einander stehen. Als Folge dieser Schreibweise verschwindet die *Subtraktion* nahezu vollständig, da *Parameter* auch negative *Werte* annehmen kann.

$$a - b = a + (-b) = -b + a \tag{2.29}$$

Die Gleichung (2.29) kann neu formuliert werden, indem der Parameter b mit dem Vorzeichen neudefiniert wird: $-b := c$, sodass folgende Gleichung daraus entsteht:

$$a - b = a + (-b) = a + c = c + a \quad . \tag{2.30}$$

Aber nicht nur bei der *Addition* sondern auch bei der *Multiplikation* spielt das Vorzeichen eine besondere Rolle. Bei der Multiplikation wird deutlich wie das Vorzeichen im Detail mathematisch zu verstehen ist:

$$-3 \cdot 2 = 2 \cdot (-3) = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \quad . \tag{2.31}$$

Wie die Gleichung (2.31) zeigt, ist das Vorzeichen durch die *Multiplikation* der Zahl -1. Folglich wurde die *Zahlenmenge* der *Natürlichen Zahlen* lediglich um eine Zahl, der -1, zu den *Ganzen Zahlen Z* erweitert. Dabei dreht die Multiplikation der -1 das Vorzeichen der Zahl um, sodass die doppelte Multiplikation das Vorzeichen erhält. Somit ergibt sich die umgangssprachliche Regel: „Minus mal Minus ergibt Plus!“.

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \tag{2.32}$$

Die Bedeutung der Einführung der negativen Zahlen wird im nächsten Abschnitt durch die Besprechung des *Kommuativ-* und *Assoziativgesetzes* detaillierter ausgeführt.

[1] $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

2.7.1 Übungsaufgaben zu den negativen Zahlen

Aufgabe 1: *Berechne alle Felder der Tabelle.*

	$+6$	-6	$+5$	-5	$+9$	-9	$+14$	-14
$+6$	$+6+6=12$	$+6-6=0$						
-6	$-6+6=0$	$-6-6=-12$						
$+5$	$+5+6=11$							
-5								
$+9$								
-9								
$+14$								
-14								

Aufgabe 2: *Berechne alle Felder der Tabelle.*

	-30	$+21$	-59	-16	-84	$+67$	-13	$+13$
$+18$								
-24								
$+43$								
-62								
$+23$								
-52								
$+4$								

Aufgabe 3: *Berechne das Ergebnis der Additionsaufgaben.*

$a)\ 6-11=$	$b)\ -4-15=$	$c)\ 15-53=$
$d)\ -16-13=$	$e)\ -40+14=$	$f)\ -64+22=$
$g)\ 33-44=$	$h)\ -18-25=$	$i)\ -43+82=$
$j)\ -23-41=$	$k)\ -61+73=$	$l)\ 88-92=$
$m)\ 10-19=$	$n)\ -24-54=$	$o)\ 45-76=$
$p)\ -57-29=$	$q)\ -12+31=$	$r)\ -43+56=$
$s)\ -55-23=$	$t)\ 56-91=$	$u)\ 23-56=$
$v)\ -47-12=$	$w)\ -47-(-46)=$	$x)\ -(-23)-64=$
$y)\ -(-32)+(-(-4))=$	$z)\ -(-12)-(-(-24))=$	

Aufgabe 4: *Berechne das Ergebnis der Additionsaufgaben.*

$a)\ -2+4=$	$b)\ -12+25=$	$c)\ -34+62=$
$d)\ -52+49=$	$e)\ -77+53=$	$f)\ -145+86=$
$g)\ -75-24=$	$h)\ -38-52=$	$i)\ -367-572=$
$j)\ -\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=$	$k)\ -\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=$	$l)\ -\frac{1}{4}+\frac{7}{8}=$
$m)\ -\frac{4}{7}+\frac{6}{5}=$	$n)\ -\frac{3}{8}+\frac{5}{7}=$	$o)\ -\frac{4}{9}+\frac{8}{5}=$
$p)\ -\frac{8}{3}-\frac{9}{4}=$	$q)\ -\frac{5}{6}-\frac{8}{9}=$	$r)\ -\frac{4}{7}-\frac{11}{3}=$

Aufgabe 5: *Berechne das Ergebnis der Multiplikationsaufgaben.*

$a)\ -7\cdot 8=$	$b)\ -11\cdot 12=$	$c)\ -24\cdot 5=$
$d)\ 4\cdot(-9)=$	$e)\ 17\cdot(-4)=$	$f)\ 72\cdot(-3)=$
$g)\ -5\cdot(-7)=$	$h)\ -9\cdot(-8)=$	$i)\ -13\cdot(-13)=$
$j)\ -\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=$	$k)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}=$	$l)\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}=$
$m)\ \frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=$	$n)\ \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=$	$o)\ \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{9}{7}\right)=$
$p)\ -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=$	$q)\ -\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=$	$r)\ -\frac{4}{11}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=$
$s)\ -\frac{6}{7}:\frac{5}{6}=$	$t)\ -\frac{3}{5}:\frac{2}{9}=$	$u)\ \frac{7}{8}:\left(-\frac{11}{3}\right)=$
$v)\ \frac{15}{4}:\left(-\frac{7}{15}\right)=$	$w)\ -\frac{11}{7}:\left(-\frac{4}{3}\right)=$	$x)\ -\frac{5}{13}:\left(-\frac{10}{9}\right)=$

Aufgabe 6: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=$	$b)\ \frac{-3}{4}\cdot\frac{5}{6}=$	$c)\ \frac{-2}{3}\cdot\frac{-4}{5}=$
$d)\ \frac{-1}{2}\cdot\frac{4}{-3}=$	$e)\ -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=$	$f)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{-9}=$
$g)\ \frac{-8}{9}\cdot\frac{-5}{6}=$	$h)\ -\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{-4}{-3}\right)=$	$i)\ -\frac{7}{7}\cdot\frac{8}{-5}=$

Aufgabe 7: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \frac{3}{4}:\frac{5}{6}=$	$b)\ \frac{-3}{4}:\frac{5}{6}=$	$c)\ \frac{-2}{3}:\frac{-4}{5}=$
$d)\ \frac{-1}{2}:\frac{4}{-3}=$	$e)\ -\frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{5}\right)=$	$f)\ -\frac{6}{7}:\frac{2}{-9}=$
$g)\ \frac{-8}{9}:\frac{-5}{6}=$	$h)\ -\frac{3}{7}:\left(-\frac{-4}{-3}\right)=$	$i)\ -\frac{7}{7}:\frac{8}{-5}=$

Aufgabe 8: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$	$b)\ \frac{-3}{4}-\frac{5}{6}=$	$c)\ \frac{-2}{3}+\frac{-4}{5}=$
$d)\ \frac{-1}{2}-\frac{4}{-3}=$	$e)\ -\frac{1}{6}+\left(-\frac{2}{5}\right)=$	$f)\ -\frac{6}{7}+\frac{2}{-9}=$
$g)\ \frac{-8}{9}-\frac{-5}{6}=$	$h)\ -\frac{3}{7}-\left(-\frac{-4}{-3}\right)=$	$i)\ -\frac{7}{7}-\frac{8}{-5}=$
$j)\ \frac{-2}{5}-\frac{6}{7}=$	$k)\ \frac{-1}{4}+\frac{4}{-7}=$	$l)\ \frac{7}{3}+\frac{-15}{2}=$
$m)\ \frac{-4}{3}-\frac{7}{-5}=$	$n)\ -\frac{5}{7}-\left(-\frac{11}{5}\right)=$	$o)\ -\frac{3}{10}+\frac{5}{-9}=$
$p)\ \frac{-5}{4}-\frac{-7}{-5}=$	$q)\ -\frac{10}{12}-\left(-\frac{-3}{-8}\right)=$	$r)\ -\frac{7}{10}-\frac{3}{-8}=$

Aufgabe 9: *Setze in die Gleichungen die angegebenen Zahlen ein und berechne das Ergebnis.*

$a)\ a+b=$	mit: $a=-5$ und $b=-9$
$b)\ 3\cdot a+b=$	mit: $a=-2$ und $b=-3$
$c)\ a-b=$	mit: $a=-7$ und $b=-11$
$d)\ 4\cdot a-6\cdot b=$	mit: $a=-4$ und $b=-10$
$e)\ 8\cdot a\cdot b=$	mit: $a=-2$ und $b=-3$
$f)\ a\cdot b-b\cdot c=$	mit: $a=-5$ und $b=-4$ und $c=-2$
$g)\ a+b=$	mit: $a=-\frac{2}{3}$ und $b=-\frac{3}{4}$
$h)\ -2\cdot a-b=$	mit: $a=-\frac{6}{7}$ und $b=-\frac{4}{5}$
$i)\ 9\cdot a\cdot b=$	mit: $a=-\frac{9}{5}$ und $b=-\frac{5}{11}$
$j)\ -2\cdot a:b=$	mit: $a=-\frac{2}{5}$ und $b=-\frac{7}{8}$
$k)\ \frac{1}{3}\cdot a:b+\frac{3}{2}\cdot c=$	mit: $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{7}{6}$ und $c=-\frac{4}{9}$
$l)\ a\cdot b:c-b:a=$	mit: $a=-\frac{7}{4}$, $b=-\frac{3}{10}$ und $c=-\frac{5}{8}$

Aufgabe 10: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\quad -4+8-13-41+53-29-43+71-12+66-44-79+38+23=$

$b)\quad -4\cdot 5+4\cdot(-3)-15:(-3)+6\cdot(-4):(-2)=$

$c)\quad -6\cdot(-8)-4\cdot 2\cdot(-8)+88:(-11)-43+85-62=$

$d)\quad -3(-2\cdot 7+3\cdot(-2))-45:(-9):(-5)\cdot(-13)+33-71=$

$e)\quad 4\cdot(-8)\cdot 4:(-2)-55+3\cdot(-8)-4(4-9\cdot 2)=$

$f)\quad 12:(-6)\cdot(-5)-3(-2-7\cdot 4)+(-3)\cdot(-2)\cdot(-4):(-6)\cdot(-3)-63-58+92=$

$g)\quad -(-(-3))\cdot(-(-2)\cdot(-(-(-4))))-(-(-(-(-12))))=$

$h)\quad -(-4)\cdot(-(-(-3))\cdot(-(-(-(-(-5))))))):(-(-(-6)))-(-(-(-15)))=$

Weitere Übungen zu den negativen Zahlen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.7) Lösungen zu den negativen Zahlen.

2.8 Assoziativ und Kommutativ

Das *Assoziativ-* und das *Kommutativgesetz* helfen beim Rechnen den Überblick selbst über sehr komplex wirkende Sachverhalte zu behalten und sollten deswegen bekannt sein. In diesem Abschnitt werden diese beiden Gesetz und ihre Auswirkungen auf die Mathematik besprochen. Auch wird nochmals motiviert, warum es lohnend sein kann mit *Brüchen* und negativen Zahlen zu arbeiten.

2.8.1 Kommutator

Das *Kommutativgesetz* besagt, dass die Vertauschung von Zahlen, *Parametern* oder *Variablen* bei einer Rechenoperation keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Zur Überprüfung des *Kommutativgesetzes* dient der *Kommutator*, welcher folgende definierte Rechenanweisung ist:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \tag{2.33}$$

Ist der *Kommutator* gleich Null, so gilt, dass $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Wenn man nun Zahlen für die *Parameter* a und b einsetzt, so ist die Gültigkeit des *Kommutativgesetzes* intuitiv zu erkennen:

$$[2, 3] = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \tag{2.34}$$

Der allgemeine *Kommutator* ist für die *Multiplikation* definiert - wenn nun das *Kommutativgesetz* zum Beispiel für die *Addition* überprüft werden soll, wird am Komma des *Kommutator* gekennzeichnet welcher *Operator* untersucht wird.

$$\begin{aligned} [a,_{+} b] &= a + b - b + a \\ [2,_{+} 3] &= 2 + 3 - 3 + 2 = 5 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Es wird deutlich, dass ohne die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung und somit die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie der *Multiplikation* mit der *Division*, dass *Kommutativgesetz* nicht für die *Subtraktion* und *Division* gelten würde.

$$\begin{aligned} [a,_{-} b] &= a - b - b - a \neq 0 \\ [2,_{-} 3] &= 2 - 3 - 3 - 2 \neq 0 \\ [a,_{:} b] &= a : b - b : a \neq 0 \\ [2,_{:} 3] &= 2 : 3 - 3 : 2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Durch die Einführung *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung verändert sich Gleichung (2.36) zu:

$$
\begin{aligned}
[a,_{+} -b] &= (a + (-b)) - (-b + a) = 0 \\
[3,_{+} -2] &= (3 + (-2)) - (-2 + 3) = 1 - 1 = 0 \\
\left[a, \frac{1}{b}\right] &= a \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\
\left[2, \frac{1}{3}\right] &= 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Die besondere Bedeutung und die Konsequenzen des *Kommutators* werden im Kapitel „Differentiation und Integration“ weiter ausgeführt. Während die Klammern im nächsten Unterabschnitt genaustens erklärt werden

2.8.2 Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* besagt, dass die Reihenfolge bei einer Rechnung keine Relevanz besitzen darf. So macht es zum Beispiel keinen Unterschied bei der *Addition* oder *Multiplikation* von drei Zahlen, welche zuerst verrechnet werden.

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= (a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c) \\
a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

Die Reihenfolge in Gleichung 2.38 wird beschrieben durch die Klammern, welche angeben welche Rechnung zu erst vollzogen werden soll. Das jeweils letzte Gleichheitszeichen konnte nur durch die Vertauschung der geschriebenen Reihenfolge der *Parameter* a, b und c, also dem *Kommutativgesetz*, geschrieben werden. Erneut zeigt sich, dass die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie *Multiplikation* mit *Division* seine Vorteile hat, denn die *Rechenoperatoren* der *Subtraktion* und der *Division* sind nicht *assoziativ*:

$$
\begin{aligned}
(a - b) - c &\neq a - (b - c) \\
(a : b) : c &\neq a : (b : c)
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

Allerdings gilt durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und des Bruchrechnens, dass der *Subtraktionsoperator* umgeschrieben werden kann in $- = +(-1)$ sowie der *Divisionsoperator* mit nur seltenen Ausnahmen aus dem mathematischen Gebrauch verschwindet.

2.8.3 Klammersetzung - Distributivgesetz

Wenn eine Rechnung mehr als nur einen *Rechenoperator* beinhaltet, dann lohnt es sich Klammern zu verwenden, um den Überblick zu behalten oder auf bestimmte Sachverhalte aufmerksam zu machen. Im engeren Sinne ist die Rechnung mit Klammern auf die *Multiplikation* reduzierbar. Dabei wirkt der außenstehende Faktor auf jeden *Summanden* innerhalb der Klammer:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ 16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot (3 + 5) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Das Beispiel aus Gleichung (2.40) zeigt, wie der *Faktor* auf die *Summanden* innerhalb der Klammern wirkt und somit das gleiche Ergebnis produziert, wie die *Multiplikation* des *Faktors* mit der *Summe* der Klammer. Dieses Verfahren mit der Klammersetzung wird Distributivgesetz genannt.

Bei der Verrechnung von *Subtraktionsoperatoren* mit einer Klammer gilt, dass das vorgestellte Minus lediglich eine verkürzte Schreibweise von $(-1)\cdot$ ist:

$$-(b + c) = (-1) \cdot (b + c) = (-1) \cdot b + (-1) \cdot c = -b - c \tag{2.41}$$

Auch *Terme* von *Summen* können miteinander *multipliziert* werden:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \tag{2.42}$$

In Gleichung (2.42) wirken zu erst die *Summanden* der ersten Klammer auf die zweite Klammer, sodass dann die zweite Klammer wie in Gleichung (2.40) *ausmultipliziert* werden kann. Es wird auch ersichtlich, dass die Schreibweise mit den Klammern wesentlich kürzer ist. Das *Ausmultiplizieren* ist trotz der verkürzten Klammerschreibweise oftmals von Vorteil.

Die Klammersetzung ist nicht nur ein Bestandteil einer verkürzten Schreibweise, sondern auch von fundamentaler Bedeutung bei komplexeren *Einsetzungsverfahren*. So sei zum Beispiel $a = g + h$ und soll in die folgende Gleichung eingesetzt werden.

$$a \cdot d = (g + h) \cdot d = g \cdot d + h \cdot d \tag{2.43}$$

Wie Gleichung (2.43) zeigt, sollte bei einer Ersetzung der eingesetzte Term am besten prophylaktisch umklammert werden, um Fehler zu vermeiden. Erst nach einer Reflexion der Gleichung sollten dann die Klammern, wenn möglich, fallen gelassen werden.

Allerdings sollte auch die Umkehrung des *Ausmultiplizierens*, das Ausklammern, beherrscht werden, da es oftmals die Übersicht verbessert, wie in diesem Beispiel:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f + g = a \cdot (b + c + d + e + f) + g \tag{2.44}$$

Die Gleichung (2.44) zeigt, dass der *Faktor* a, welcher sich in vielen *Summanden* befindet, *ausgeklammert* wurde um die Übersicht zu verbessern. Generell gilt, dass man gleiche *Vorfaktoren* bei *Summen ausklammern* kann.

2.8.4 Übungsaufgaben zur Klammersetzung

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\frac{1}{2}(9+7) =$

b) $\frac{25+65}{10} =$

c) $4(3+2) =$

d) $\frac{16+48}{2} =$

e) $\frac{1}{4}(144-92) =$

f) $\frac{3}{5} \cdot \frac{13-5}{4} =$

g) $5,5(1,5+6,25) =$

h) $\frac{6,3-5-0,3}{20} : \frac{2}{5} =$

i) $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right) =$

j) $\frac{77-47}{3} \cdot \frac{3+5}{24} =$

k) $4(3+2)-2(1+3) =$

l) $\frac{12-8+14}{2} \cdot \left(3+\frac{9}{2}\right) =$

Aufgabe 2: *Multipliziere die Klammer aus.*

a) $2(a+7) =$

b) $4(b+c) =$

c) $7(4+v) =$

d) $d(b-c) =$

e) $6(ab-cd) =$

f) $mo(ep-ewe) =$

g) $ha(llo-i) =$

h) $te(st+e) =$

i) $Tag(Stunde-Minute) =$

j) $(4b+7c)5 =$

k) $2(2a-3c)4 =$

l) $\xi(\Psi-\Phi) =$

m) $4 \diamond (3\hbar-6\Gamma) =$

n) $2\tau(5\sigma+3\rho)3\lambda =$

Aufgabe 3: *Multipliziere die Klammern aus.*

a) $4(a+b) =$

b) $c(a-5b) =$

c) $\frac{2}{5}(9a-5) =$

d) $(a+b)(a+b) =$

e) $\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}-\frac{5c}{d}\right) =$

f) $(a-b)(a-b) =$

g) $(a+b)(c+d) =$

h) $(a-b)(a+b) =$

i) $\frac{a+b}{c} =$

j) $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) =$

Aufgabe 4: *Multipliziere die Klammern aus.*

$a)\ 3\,(a+2) =$

$b)\ 5\,(3a-5) =$

$c)\ d\,(3a-4b) =$

$d)\ 4a\,(2d-8u) =$

$e)\ -2\,(4a+3de) =$

$f)\ -2a\,(7d-3b) =$

$g)\ (a+2)\,(b+1) =$

$h)\ (a+2b)\,(3+c) =$

$i)\ (2a+3c)\,(1-x) =$

$j)\ (2a-2b)\,(2c-2d) =$

$k)\ (lo-rof)\,(l-lo) =$

$l)\ (ah-n)\,(a-e) =$

$m)\ (6-2x)\,(3d-2e) =$

$n)\ (g-l)\,(ame+odd) =$

$o)\ (2s+4o)\,(-3a+4c) =$

$p)\ (10-f)\,(8+2e) =$

$q)\ -(9-a)\,(4+d) =$

$r)\ -(a+e)\,(d-f) =$

$s)\ -(4d+3s)\,(2f-5) =$

$t)\ -(5x+3)\,(6y-3z) =$

$u)\ a\,(8ge-ze)\,(h+4r) =$

$v)\ b\,(4a-2d)\,(5-3x) =$

$w)\ -2\,(rt-wer)\,(los+4gt) =$

$x)\ -3\,(2d-5)\,(-4+p) =$

$y)\ (a+b)\,(c+d)\,(e+f) =$

$z)\ (a-b)\,(c-d)\,(e-f) =$

Aufgabe 5: *Klammere so viel wie möglich aus.*

$a)\ 2a+2b =$

$b)\ ab-ad =$

$c)\ abe+aef =$

$d)\ 3ag-6a =$

$e)\ 2ab+2bc-2bd =$

$f)\ 2a-4b+8d =$

$g)\ ab+ac+ad+ae-af =$

$h)\ 5\Delta\nabla-\Delta\diamond\nabla =$

$i)\ \Delta\Phi\Gamma+\Phi\nabla\Delta =$

$j)\ \alpha\beta+\alpha\beta\chi =$

$k)\ \Theta\Sigma\Xi-\Xi\Pi\Sigma+\Theta\Xi\Phi =$

$l)\ 2\Omega\Sigma-4\Sigma\Pi+6\Lambda\Sigma =$

Aufgabe 6: *Klammere so viel wie möglich aus.*

a) $9a + 9b =$

b) $2a + 6 - 8b =$

c) $ab - acd + aa =$

d) $2ab + 4ab + 8ab =$

e) $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} =$

f) $abcdefghijkl - bcdefghijk =$

h) $\frac{2a + 13ab}{7} =$

i) $\frac{3cd - 6bd}{a - ba} =$

j) $\frac{\square\nabla - 3\nabla\square}{4 - \diamond} =$

k) $\frac{\hbar\mu\sigma - \hbar\lambda\mu}{\theta\rho + \psi\theta} =$

l) $\frac{4\Pi\Sigma\Theta + 8\delta\Lambda\Sigma}{5\Gamma\Delta - \Gamma} =$

m) $\frac{15asdfgh - 5hfsa}{3\tau\zeta\xi\psi - 9\nu\tau\zeta} =$

Aufgabe 7: *Löse die Klammern auf.*

a) $(x - 2)(x + 4) =$

b) $(x + 9)(x + 3) =$

c) $(3 + x)(x - 5)(x - 2) =$

d) $(x - 4)(x + 6)(x - 7) =$

e) $(x - 12)(x + 12)(x - 2)(x - 2) =$

f) $(x + 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) =$

g) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) =$

h) $(x - 3)(x + 4)(x + 7)(x - 8) =$

i) $(-x + a)(x + b)(x - c)(x + d) =$

j) $(x - a)(-x + b)(x + a)(x - c)(x - c)(x + 2d) =$

Aufgabe 8: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $-a(b - d)(e + p) =$

b) $(5t - 7z)(4x - 9y) =$

c) $-(2a - 3d)(3g - h) + (4d - a)(4h - 6g) =$

d) $-5((5a - r)(2g + 3k)) + (2d - 3a)(-4k - 3g) =$

e) $3((2a - 3b)(cd + 5e)) + ((2e - 3cd)(-4a + 2b)) \cdot (-2) =$

f) $-(2a - 3b)(4c + 5d)(6e - 7f) =$

Aufgabe 9: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $-4a(8c-d) =$

b) $-5b(-2g-4) =$

c) $-3(-5g+8k) =$

d) $2p(-3e-4r) =$

e) $-11v(-11n+12m) =$

f) $-9x(-4y+3z)\cdot(-2k) =$

Aufgabe 10: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $(-a-3b)(-2c-d) =$

b) $(4-3b)(-2c+7) =$

c) $(-t+6z)(5g-8k) =$

d) $(-5h-7l)(-3e+4r) =$

e) $(-4a-2gtb)(ethc-sg) =$

f) $-(5k+4b)(-2a-6ab) =$

Aufgabe 11: *Ergänze die fehlenden Zahlen damit die Gleichung stimmt.*

a) $x^2+4x+\square = (x+2)^2$

b) $x^2-6x+\square = (x-3)^2$

c) $x^2-2x+1 = \left(x-\square\right)^2$

d) $x^2+8x+16 = \left(x+\square\right)^2$

e) $x^2+10x+\square = \left(x+\square\right)^2$

f) $x^2+6x+\square = \left(x+\square\right)^2$

g) $x^2-5x+\square = \left(x-\square\right)^2$

h) $x^2+3x+\square = \left(x+\square\right)^2$

i) $x^2-\square x+9 = (x-3)^2$

j) $x^2-\square x+4 = (x-2)^2$

k) $x^2-\square x+\square = (x-1)^2$

l) $x^2+\square x+\square = (x+7)^2$

m) $x^2+\square x+25 = \left(x+\square\right)^2$

n) $x^2-\square x+81 = \left(x-\square\right)^2$

o) $x^2-\square x+49 = \left(x-\square\right)^2$

p) $x^2+\square x+144 = \left(x+\square\right)^2$

Aufgabe 12: *Ergänze die fehlenden Zahlen damit die Gleichung stimmt.*

a) $x^2 + 2x + 3 + \square - \square = (x+1)^2 + 2$

b) $x^2 - 6x + 7 + \square - \square = (x-3)^2 - 2$

c) $x^2 - 4x - 3 + \square - \square = (x-2)^2 - \square$

d) $x^2 + 8x + 12 + \square - \square = (x+4)^2 - \square$

e) $x^2 + 5x + \square + 6,25 - 6,25 = \left(x + \square\right)^2 - 4$

f) $x^2 - 2x - \square + 1 - 1 = \left(x - \square\right)^2 - 34$

g) $x^2 + x - 2 + \square - \square = \left(x + \square\right)^2 - \square$

h) $x^2 + 3x + 5 + \square - \square = \left(x + \square\right)^2 + \square$

i) $x^2 - \square x + 3 + \square - \square = (x-6)^2 - \square$

j) $x^2 + \square x - 7 + \square - \square = (x+11)^2 - \square$

k) $x^2 + \square x - 13 + 25 - 25 = \left(x + \square\right)^2 - \square$

l) $x^2 + \square x + 6 + 16 - 16 = \left(x + \square\right)^2 - \square$

m) $x^2 + \square x + 4 + \square - \square = \left(x + \square\right)^2 - 5$

n) $x^2 - \square x + 30 + \square - \square = \left(x - \square\right)^2 - 6$

Aufgabe 13: *Ergänze die fehlenden Seite der binomischen Gleichungen und die fehlenden Zahlen.*

a) $x^2 - 2x + 5 + 1 - 1 =$

b) $x^2 + 4x - 2 + 4 - 4 =$

c) $x^2 - 12x - 3 + 36 - 36 =$

d) $x^2 - 8x + 14 + 16 - 16 =$

e) $x^2 - 4x - 7 + \square - \square =$

f) $x^2 + 14x + 5 + \square - \square =$

g) $x^2 + 3x - 1 + \square - \square =$

h) $x^2 - 5x - 8 + \square - \square =$

i) $x^2 - x + 4 + \square - \square =$

j) $x^2 - 1,5x - 1 + \square - \square =$

Aufgabe 14: *Löse die Klammern auf und fasse zusammen.*

a) $(x+4)^2 =$

b) $(x-2)^2 =$

c) $(x+7)(x-7) =$

d) $(x+5)^2 + 4 =$

e) $(x-2)(x+2) - 5 =$

f) $(x-1)^2 - 3 =$

g) $(x+2,5)^2 + 2 =$

h) $(x-6)^2 - 2,75 =$

i) $(x+2)(x-2) + 5,5 =$

j) $(x-1,5)(x+1,5) - 2,1 =$

k) $2(x+3)^2 - 8,3 =$

l) $3(x-0,5)^2 + 5,1 =$

m) $1,25(x-1,5)^2 - 9,75 =$

n) $-0,5(x+3,4)^2 + 11,1 =$

o) $0,3(x-2,25)(x+2,25) + 0,4 =$

p) $-0,15(x+1,7)(x-1,7) - 2,31 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.8) Lösungen zur Klammersetzung.

2.9 Potenzen

Wie schon zuvor wurden viele Rechenmethoden und neue Eigenschaften eingeführt, um die Übersicht oder Handhabung von rechnerischen Ausdrücken zu vereinfachen. Aus dem selben Grund wird die Potenz eingeführt, welche als verkürzte Schreibweise der wiederholten *Multiplikation* einer Zahl dient.

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^5 \\ 2^6 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Für *Potenzen* gelten Rechenregeln, welche schnell erklärt werden können, wenn der abkürzende Charakter wie in Gleichung (2.45) verinnerlicht wurde. Im Folgenden soll eine Regel gezeigt und dann begründet werden, dass diese gilt (außer die Regel ist intuitiv).

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5 &= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ \Rightarrow a^3 : a^2 = a^{3-2} = a^1 &= a \end{aligned} \tag{2.46}$$

Aus der Bedingung, dass $\frac{a}{a} = 1$ sein muss und mit der Regel aus Gleichung (2.46) ergibt sich daraus, dass $a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^0 = 1$ sein muss. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Des Weiteren kann aus Gleichung (2.46) abgleitet werden, dass Rechnungen mit *Potenzen* nicht *assoziativ* sind:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 = \left(a^3\right)^2 &= a^{3 \cdot 2} = a^6 \\ a^{\left(3^2\right)} &= a^{3 \cdot 3} = a^9 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Außerdem lässt sich aus Gleichung (2.46) mit Gleichung (2.48) ersehen, dass

$$\begin{aligned} (a^2)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} &:= \sqrt{a} \end{aligned} \tag{2.49}$$

gilt, wobei $\sqrt{a}$ die *Wurzel* von a genannt wird. Die *Wurzel* habt die Potenz ^{2} auf, wie in Gleichung (2.49) zu sehen ist.

Somit gelten zusammengefasst folgende Regeln für die Potenzrechnung:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ (a^n)^m &\neq a^{(n^m)} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass bei dem Ausdruck a^n es sich bei a um die *Basis* und bei n um den *Exponenten* handelt.

2.9.1 Wurzeln

Wurzeln sind die Umkehroperationen zum *Potenzieren*. Somit steht hinter der sogenannten Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z}$) die Frage: „Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die Zahl z?“ Hierzu lohnt es sich einige Zahlen zum Quadrat (zum Beispiel: $8^2 = 64$) zu kennen, um direkt ein Ergebnis einer *Wurzel* zu erkennen. Da es nicht nur die Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$) gibt, sondern auch noch höhere Werte des *Nenners* im *Exponenten*, lohnt es sich stets die jeweilige Wurzel als *Potenz* zu schreiben.

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{z} \\ \sqrt[4]{z} &= z^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Es gibt ein schriftliches Verfahren eine *Wurzel* zu ziehen, allerdings bedarf es einer aufwendigeren Erklärung, welche in einer späteren Version dieses Buches folgen wird, da die Schüler heutzutage oftmals bei der Einführung der *Wurzel* mit dem Taschenrechner arbeiten, wird vorerst das schriftliche Wurzelziehverfahren ausgespart.

Außerdem bleibt anzumerken, dass *Wurzeln* aus negativen Zahlen erst im Kapitel „Komplexe Zahlen“ eingeführt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt sind Berechnungen von *Wurzeln* aus negativen Zahlen nicht vorgesehen. Folglich sind Rechnungen in denen *Wurzeln* aus negativen Zahlen vorkommen ein Hinweis darauf, dass Rechenfehler aufgetreten sind.

2.9.2 10er Potenzen

Von allen *Potenzen* haben 2er *Potenzen* 2^n in der Informatik und die 10er *Potenzen* 10^n eine besonders wichtige Funktion inne. Grade in der Physik werden besonders große Größen mit besonders kleinen verrechnet. Die daraus resultierenden Ergebnisse sollen dann wieder in einer Größe angegeben werden, die dem Menschen zur Vorstellung genügen. Deswegen werden viele Größen mit Hilfe der 10er *Potenzen* umgerechnet. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Jede Einheit ist meistens mit einer sprachlichen Abkürzung verbunden, so steht bei 1cm das „centi“ für $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Eine Tabelle mit der Auflistung vieler dieser Abkürzungen und ihre Bedeutung als 10er *Potenz* befinden sich im Anhang (16.3).
Während für alle Einheiten k für Kilo also Tausend steht, steht dies sprachlich bei der Einheit Byte B auch für Tausend. Allerdings versteckt sich hier durch den Fakt, dass Computer nur die 0 (Nein) und die 1 (Ja) kennen, eine andere Zahl:

$$\begin{aligned} 10^3 m &= 1km \\ 10^6 m &= 1Mm \\ 2^{10} B &= 1kB = 1024B \\ 2^{20} B &= 1MB = 1048576B \end{aligned} \tag{2.53}$$

Bei der Einheitenumrechnung ist das Verständnis von 10er *Potenz* von elementarer Bedeutung, da

$$\begin{aligned} 1dm &= 10cm = 10^1 cm \\ 1dm^2 &= 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm = 100cm^2 = 10^2 cm^2 \\ 1dm^3 &= 1dm \cdot 1dm \cdot 1dm = 10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000cm^3 = 10^3 cm^3 := 1l \end{aligned} \tag{2.54}$$

gilt. Dahinter verstecken sich sprachliche Abkürzungen, die mit *potenziert* werden $100cm^2 = 100(cm)^2 = 100c^2m^2 = 10^2 \frac{1}{10^2} m^2 = 1m^2$. Die Schreibweise für $1cm^2$ ist wieder nichts weiter als eine Konvention zur Abkürzung für $1(cm)^2$. Wie Gleichung (2.54) gibt der *Exponent* der Einheit an, mit welcher Zahl die Anzahl der Null der Standardumrechnung multipliziert wird:

$$\begin{aligned} 1km &= 1000m = 10^3 m \\ 1km^2 &= \left(10^3 m\right)^2 = \left(10^3\right)^2 m^2 = 10^{3\cdot 2} m^2 = 1000000m^2 = 10^6 m^2 \\ 1km^3 &= \left(10^3 m\right)^3 = \left(10^3\right)^3 m^3 = 10^{3\cdot 6} m^3 = 1000000000m^3 = 10^9 m^3 \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.9.3 Binomische Formeln

Mit Hilfe der *Potenzen* können auch die *Summen potenziert* werden:

$$\begin{aligned} (x+d)\cdot(x+d) = (x+d)^2 &= x^2 + x\cdot d + d\cdot x + d^2 = x^2 + 2\cdot d\cdot x + d^2 \\ (x-d)\cdot(x-d) = (x-d)^2 &= x^2 - x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - 2\cdot d\cdot x + d^2 \\ (x+d)\cdot(x-d) &= x^2 + x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - d^2 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Die beiden Gleichungen aus Gleichung (2.56) werden *Binomische Gleichungen* genannt und werden in der Beschreibung der Natur immer wieder vorgefunden und nicht zu Letzt deswegen im Mathematik und naturwissenschaftlichen Unterricht in Klausur- und Übungsaufgaben verwendet.
Generell kann man diese *Binomischen Formel* noch für jede *Potenz* verallgemeinern, dazu dient das sogenannt *Pascal'sche Dreieck*, welches die *Vorfaktoren* wiedergibt.

$(x+d)^0$	1
$(x+d)^1$	$x+d$
$(x+d)^2$	$x^2+2\cdot d\cdot x+d^2$
$(x+d)^3$	$x^3+3\cdot d\cdot x^2+3\cdot d^2\cdot x+d^3$
$(x+d)^4$	$x^4+4\cdot d\cdot x^3+6\cdot d^2\cdot x^2+4\cdot d^3\cdot x+d^4$
$(x+d)^5$	$x^5+5\cdot d\cdot x^4+10\cdot d^2\cdot x^3+10\cdot d^3\cdot x^2+5\cdot d^4\cdot x+d^5$

Dabei pflanzen sich die *Vorfaktoren* (sogenannte *Koeffizienten*) so weiter fort in dem die benachbarten *aufaddiert* werden. Die *Potenzen* des ersten *Parameters* oder *Variable* startet stets mit der höchsten Zahl und nimmt bei jedem weiteren *Summanden* ab, während die *Potenz* des zweiten *Parameters* zunimmt. Die *Vorfaktoren*, welche sich im *Pascal'schen Dreieck* befinden, werden im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch die sogenannten *Binomialkoeffizienten* erneut auftauchen und nochmals erläutert. Weitere Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck können im Anhang (16.2) gefunden werden.

2.9.4 Übungsaufgaben zu Potenzen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2^3 =$	*b)* $3^4 =$	*c)* $2^6 =$
d) $2^{-1} =$	*e)* $10^3 =$	*f)* $8^3 =$
g) $4^{-3} =$	*h)* $10^{-6} =$	*i)* $\left(\frac{1}{6}\right)^2 =$
j) $\left(5^3\right)^2 =$	*k)* $4^{\left(3^2\right)} =$	*l)* $2^6 \cdot 2^2 =$
m) $\left(2^3 + 2^3\right)^3 =$	*n)* $\left(10^2\right)^{-1} =$	*o)* $\left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} =$
p) $\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$	*q)* $\left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} =$	*r)* $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 =$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$	*b)* $\left(\frac{7}{8}\right)^2 =$	*c)* $\left(\frac{11}{17}\right)^2 =$
d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$	*e)* $\left(\frac{124}{217}\right)^{-1} =$	*f)* $\left(\frac{9}{7}\right)^{-2} =$
g) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$	*h)* $\left(\frac{144}{169}\right)^{\frac{1}{2}} =$	*i)* $\left(\frac{83}{87}\right)^{-1} =$
j) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-2} =$	*k)* $\left(\frac{36}{64}\right)^{\frac{1}{2}} =$	*l)* $\left(\frac{225}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} =$
m) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} =$	*n)* $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$	*o)* $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} =$

Aufgabe 3: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\sqrt{16} =$ *b)* $\sqrt{81} =$ *c)* $\sqrt[3]{8} =$

d) $\sqrt[3]{27} =$ *e)* $\sqrt{144} =$ *f)* $\sqrt[5]{100000} =$

g) $\sqrt{289} =$ *h)* $\sqrt[4]{81} =$ *i)* $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} =$

j) $\sqrt{a^8}^{\frac{1}{4}} =$ *k)* $\sqrt[10]{1024} =$ *l)* $\sqrt{\sqrt[7]{\sqrt[4]{\sqrt[9]{\sqrt[13]{\lambda^{33}}}}}}^{2} =$

Aufgabe 4: *Rechne die Einheiten um.*

a) $3dm = \quad cm$ *b)* $4m = \quad cm$

c) $7cm = \quad mm$ *d)* $500cm = \quad dm$

e) $25km = \quad m$ *f)* $8000000cm = \quad km$

g) $2dm^2 = \quad cm^2$ *h)* $14m^2 = \quad cm^2$

i) $9cm^2 = \quad mm^2$ *j)* $2500cm^2 = \quad dm^2$

k) $65km^2 = \quad m^2$ *l)* $7500000cm^2 = \quad m^2$

m) $6dm^3 = \quad cm^3$ *n)* $7m^3 = \quad cm^3$

o) $12cm^3 = \quad mm^3$ *p)* $3000cm^3 = \quad dm^3$

q) $253km^3 = \quad m^3$ *r)* $5000000cm^3 = \quad dm^3$

s) $46dm^2 = \quad cm^2$ *t)* $75m = \quad cm$

u) $34cm^3 = \quad mm^3$ *v)* $8900cm = \quad dm$

w) $63km^2 = \quad m^2$ *x)* $74000000cm^3 = \quad dm^3$

Aufgabe 5: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

a) $1m^2 = \quad cm^2$ *b)* $2,718km = \quad mm$ *c)* $1mm^3 = \quad dm^3$

d) $3m^3 = \quad dm^3$ *e)* $0,5cm^2 = \quad m^2$ *f)* $13,3cm^3 = \quad m^3$

g) $10^3km^2 = \quad dm^2$ *h)* $1,234dm = \quad mm$ *i)* $\frac{15}{4}\mu m^2 = \quad mm^2$

j) $\frac{1}{3}Mm^3 = \quad km^3$ *k)* $0,01km^2 = \quad cm^2$ *l)* $125mm^5 = \quad cm^5$

m) $6,\bar{6}m^4 = \quad cm^4$ *n)* $0,025km^7 = \quad mm^7$ *o)* $3,141Tm^2 = \quad nm^2$

Aufgabe 6: *Rechne in die Klammer aus.*

a) $(a+4)^2 =$

b) $\left(a-\sqrt{2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{2}a+2\right)^4 =$

d) $\left(3a+\frac{2}{3}\right)^3 =$

e) $(a-b)^4 =$

f) $(a+b+c)^2 =$

g) $(a+b+c+d)^2 =$

h) $(a+b+c+d+e)^2 =$

i) $(a+b)^6 =$

j) $(a-c)^8 =$

k) $(\hbar+\ell)^{-3} =$

l) $(\Box-\nabla)^{-5} =$

m) $(ab+cd)^{-3} =$

n) $(\kappa-\gamma+\eta\epsilon)^{-2} =$

Aufgabe 7: *Berechne das Ergebnis.*

a) $5^2 =$

b) $-5^2 =$

c) $(-5)^2 =$

d) $6^2 =$

e) $-6^2 =$

f) $(-6)^2 =$

g) $4^3 =$

h) $-4^3 =$

i) $(-4)^3 =$

j) $3^4 =$

k) $-3^4 =$

l) $(-3)^4 =$

m) $2^5 =$

n) $-2^5 =$

o) $(-2)^5 =$

p) $13^0 =$

q) $-17^0 =$

r) $(-11)^0 =$

Aufgabe 8: *Schreibe die Zahlen mit 10er-Potenzen auf. Runde dabei auf zwei Nachkommastellen.*

a) $30000 =$

b) $8540000 =$

c) $72672164 =$

d) $47543526 =$

e) $583834622 =$

f) $12467853 =$

g) $0,000001 =$

h) $0,0000352 =$

i) $0,0000000000647 =$

j) $0,000956 =$

k) $91245235 =$

l) $0,000000007312 =$

m) $0,007852 =$

n) $456246235674 =$

o) $91394,334 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.9) Lösungen zu Potenzen.

2.10 Logarithmen

Da die *Potenzen* eingeführt wurden, sollte auch eine Rechenvorschrift eingeführt werden um den *Exponenten* zu bestimmen. Diese wird *Logarithmus* genannt, welche folgende Frage in mathematischer Art und Weise stellt: „Die Basis und das Ergebnis seien bekannt, welche Größe muss der Exponent haben?“

$$a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b \tag{2.57}$$

Gelesen wird $\log_a c$ als „der *Logarithmus* von b zur Basis a“. Wie für die *Potenzen* gelten auch für die *Logarithmen* Regeln, welche sich aus den *Potenzgesetzen* ableiten lassen.

$$\begin{aligned} a^{n+m} = a^n \cdot a^m &\Leftrightarrow \log_a(n \cdot m) = \log_a n + \log_a m \\ &\Rightarrow \log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m \\ &\log_a n^m = m \cdot \log_a n \\ &a^{\log_a n} = n \\ &\log_a n = \frac{\log_b a}{\log_b n} \\ &\log_a a = 1 \\ &\log_a 1 = 0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen für bestimme Werte der *Basis* verwendet:

$$\begin{aligned} \log_{10} n &= \lg n \\ \log_2 n &= \text{lb } n \\ \log_e n &= \ln n \quad , \end{aligned} \tag{2.59}$$

wobei $e = 2,718281...$ die *Euler'sche Zahl* ist, deren Bedeutung im Kapitel der *Funktionen* im Abschnitt der *Exponentialfunktionen* und bei der *Differentiation* noch gerecht wird.

2.10.1 Übungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\log_2 16 =$	*b)* $\lg 1000 =$	*c)* $\log_8 64 =$
d) $\mathrm{lb}\ 512 =$	*e)* $\ln e^9 =$	*f)* $\log_5 125 =$
g) $\log_{25} 125 =$	*h)* $\lg\left(11 \cdot 10^6\right) =$	*i)* $\log_{17} 1 =$
j) $\log_3 81 =$	*k)* $\log_4 64 =$	*l)* $\log_{15} 225 =$

Aufgabe 2: *Wandle den Logarithmus in Logarithmen mit der angegebenen Basis um.*

a) $\log_5 7 =$	mit der Basis: 3	*b)* $\log_8 251 =$	mit der Basis: 10
c) $\log_8 512 =$	mit der Basis: 2	*d)* $\log_3 39 =$	mit der Basis: 5
e) $\lg 24 =$	mit der Basis: 22	*f)* $\lg\left(3 \cdot 10^8\right) =$	mit der Basis: $\frac{1}{2}$
g) $\mathrm{lb}1 =$	mit der Basis: $\frac{5}{7}$	*h)* $\ln \pi =$	mit der Basis: $\sqrt{2}$
i) $\lg 9000 =$	mit der Basis: e	*j)* $\mathrm{lb}64 =$	mit der Basis: e

Aufgabe 3: *Wandle den Logarithmus so um, dass* $\ln x$ *isoliert steht.*
(Beispiel: $\ln \frac{x^2}{a} = 2\ln x - \ln a$*.)*

a) $\ln x^3 =$	*b)* $\ln 7x =$
c) $\ln \frac{4x}{5} =$	*d)* $\ln \frac{2}{x} =$
e) $\ln 4x^4 =$	*f)* $\ln \frac{2x^{-1}}{3} =$
g) $\lg ax =$	*h)* $\log_3 5x^4 =$
i) $\log_5 \frac{4x^6}{5} =$	*j)* $\log_a \frac{bx^c}{d} =$
k) $\log_7 \left(\frac{5}{3x}\right)^3 =$	*l)* $\log_a \left(\frac{b}{dx^c}\right)^r =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.10) Lösungen zu Logarithmen.

2.11 Äquivalenzumformung

Die *Äquivalenzumformung* stellt die Basis für den Erkenntniserwerb und steht als selbstverständliches Vorwissen aller Schüler im Zentrum des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Wort nur die Bedingung, dass auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichens* „=“ immer die gleichen *Operationen* durchgeführt werden müssen. Dabei wird hinter dem *Kommandostrich* „|“ hinter der umzuformenden Gleichung die nachfolgende *Operation* angegeben.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad |+2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Die Gleichung (2.60) zeigt, wie auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *addiert* wurde. Dabei steht der Pfeil $\Rightarrow$ für „daraus folgt“, und ist nicht zwingend erforderlich bei einer *Äquivalenzumformung*.

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \qquad |-2 \\ 6 &= 6 \qquad |\cdot 3 \\ 18 &= 18 \qquad |: 2 \\ 9 &= 9 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Die Gleichung (2.61) zeigt, wie im ersten Schritt auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *subtrahiert* wurde. Im zweiten Schritt werden beide Seiten mit drei *multipliziert* und im dritten Schritt durch zwei *dividiert*. In diesen beiden Beispielen sind die vier Grundrechenarten gezeigt, was nicht bedeutet, dass andere Rechenoperationen ausgeschlossen sind.

Äquivalenzumformungen dienen dazu um Gleichung umzustellen und so unbekannte *Parameter* zu bestimmen. *Parameter* sind Platzhalter für *Zahlen* und werden in der Regel mit Buchstaben am Anfang des Alphabets beschrieben. Wenn keine genaue Beschreibung für die *Parameter* angegeben sind, gilt $a, b, ... \in \mathbb{R}$. Im folgenden Beispiel soll nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{d} \cdot x + b - c \qquad |+c \\ c &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |-b \\ c - b &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |\cdot d \\ d \cdot (c - b) &= a \cdot x \qquad |: a \\ \frac{d \cdot (c - b)}{a} &= x \end{aligned} \tag{2.62}$$

Jede *Rechenoperation*, die die Richtigkeit der Gleichung nicht verändert ist zulässig! Die *Addition* der 0 und die *Multiplikation* der 1 sind solche *Operationen*. Dabei ist 0 das so genannte *neutrale Element* der *Addition* und 1 das *neutrale Element* der *Multiplikation*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8} \qquad & \text{Multiplikation der 1} \\ 4 = 4 + 0 = 4 + 6 - 6 = 10 - 6 \qquad & \text{Addition der 0} \end{aligned} \tag{2.63}$$

Die Beispiele aus Gleichung (2.63) zeigen, dass die *Multiplikation* des *neutralen Elements* mit dem *Erweitern* von *Brüchen* unmittelbar in Verbindung steht.

2.11.1 Übungsaufgaben zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1: *Löse alle nach x auf.*

a) $2x = 4$	*b)* $5x = 5$	*c)* $3x = -9$
d) $2x = 1$	*e)* $6x = -3$	*f)* $10x = 2$
g) $14 = 7x$	*h)* $-5 = 25x$	*i)* $16x = -4$
j) $-2x = -4$	*k)* $-6x = 48$	*l)* $-9x = 3$
m) $\frac{x}{2} = 3$	*n)* $\frac{x}{7} = 2$	*o)* $\frac{x}{9} = -2$
p) $\frac{1}{5}x = -4$	*q)* $\frac{x}{6} = \frac{1}{2}$	*r)* $-\frac{1}{7}x = -\frac{1}{5}$
s) $2x = 4,2$	*t)* $-6x = 7,2$	*u)* $-5x = -8,5$
v) $\frac{1}{2}x = 4,3$	*w)* $-\frac{1}{3}x = 7,4$	*x)* $6,9 = \frac{x}{6}$

Aufgabe 2: *Löse alle nach x auf.*

a) $\frac{3x}{2} = 1$	*b)* $\frac{4}{3}x = 7$	*c)* $\frac{7x}{9} = -6$
d) $-\frac{7x}{6} = 5$	*e)* $-\frac{9}{2}x = -4$	*f)* $-\frac{2x}{11} = 8$
g) $\frac{6x}{13} = \frac{1}{5}$	*h)* $-\frac{7}{8}x = \frac{1}{20}$	*i)* $\frac{15x}{4} = -\frac{8}{9}$
j) $1,6 = \frac{2}{3}x$	*k)* $-\frac{7}{5}x = -0,04$	*l)* $-17,41 = x\frac{5}{6}$
m) $\frac{2x}{7} = -\frac{3}{4}$	*n)* $\frac{5}{6}x = \frac{7}{8}$	*o)* $\frac{9x}{2} = -\frac{8}{7}$
p) $-\frac{6x}{5} = \frac{1}{2}$	*q)* $-\frac{3}{8}x = -\frac{12}{7}$	*r)* $-\frac{8x}{5} = \frac{4}{9}$
s) $\frac{3x}{11} = \frac{5}{4}$	*t)* $-\frac{8}{3}x = \frac{1}{10}$	*u)* $\frac{3x}{4} = -\frac{6}{7}$
v) $0,05 = \frac{7}{2}x$	*w)* $-\frac{8}{3}x = -1,12$	*x)* $5,6 = x\frac{3}{7}$

Aufgabe 3: *Löse alle nach x auf.*

a) $x - 2 = 0$ *b)* $x - 9 = 0$ *c)* $x + 4 = 5$
d) $x + 1 = 3$ *e)* $x - 15 = 7$ *f)* $x + 8 = 17$
g) $x - 7 = -3$ *h)* $x - 2 = -6$ *i)* $x + 8 = 3$
j) $x + 11 = -4$ *k)* $x + 7 = 0$ *l)* $x + 13 = -29$
m) $x - \frac{2}{3} = 0$ *n)* $x - \frac{3}{4} = 0$ *o)* $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
p) $x + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ *q)* $x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ *r)* $x + \frac{5}{4} = \frac{17}{8}$
s) $x - 2,6 = 1,2$ *t)* $x + 1,4 = -0,3$ *u)* $x + 5,7 = -0,03$
v) $x + 9,2 = \frac{4}{5}$ *w)* $x - \frac{5}{2} = 1,78$ *x)* $x + 3,41 = -2,718$

Aufgabe 4: *Löse alle nach x auf.*

a) $2x - 4 = 0$ *b)* $2x - 4 = 6$ *c)* $3x + 9 = 27$
d) $-4x + 4 = -24$ *e)* $8x - 72 = 16$ *f)* $-4x - 12 = 16$
g) $9x - 27 = -18$ *h)* $14x - 42 = 28$ *i)* $5x + 35 = 175$
j) $-11x + 131 = 55$ *k)* $-6x + 36 = -120$ *l)* $7x + 77 = -777$

Aufgabe 5: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

a) $3 \cdot x + 4 = 0$ *b)* $2 \cdot x - 9 = 0$
c) $9 \cdot x + 55 = 0$ *d)* $5 \cdot x - 25 = 0$
e) $3 \cdot x + 9 = 6$ *f)* $x - 66 = 9$
g) $4 \cdot x + 4 = 11$ *h)* $9 \cdot x - 5 = 4$
i) $32 \cdot x + 3 = 5$ *j)* $1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23$
k) $7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x$ *l)* $98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10$
m) $\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{5} \cdot x$ *n)* $\frac{7}{3} \cdot x + \frac{11}{6} = -3 \cdot x + \frac{1}{4}$
o) $\frac{8}{9} \cdot x - \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot x$ *p)* $e \cdot x + \pi = -\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{e}$

Aufgabe 6: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

a) $3x + 4x - 4 + 9 = 5x$
b) $6x - 11x + 7 = 34 + 22 - 15x + 4 + 8x$
c) $4x + 9a - 3x + 11 = 14 - 8a + 7x$
d) $3(x + 4x - 3) = -\frac{1}{4}(4x + 2 + 12x - 44)$
e) $18x - 2(4x - 6) + 5x(5 + 11) = -14 + 5x - 8x$
f) $4(3x - 5a + 8) = 32 - 16a + 8x$
g) $(x + 3)(a - 5) = 4a + 9x - 7 + 3x$
h) $(2x - 1)(5a + 1) - (3 - x)(2 - 4a) = 34 + 22 - 15x + 4 + 8x - 8a + 7x$
i) $(x + 3)(a - 5) - (4x + 2 + 12x - 44) = 4x + 9a - 3x + 11 + 14 - 8a + 7x$
j) $(3 - x)(2 - 4a)(-4 + b) = 13$
k) $2x + 7x - 4 + 9 - 34 + 22 - 15x + 4 + 8x - 8a + 7x = 5x - (4x + 2 + 12x - 44) + 4x + 9a$
l) $6x + 4x - 4(x + 3)(a - 5) + 9 = 8x - \frac{1}{4}(4x + 12 + 24x - 88)$

Aufgabe 7: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

a) $-16x^2 + 64 = 0$
b) $\sqrt{2x - 6} - 144 = 0$
c) $\frac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0$
d) $\ln 5x = 2$
e) $\ln \frac{13}{x} = \sqrt{2}$
f) $\frac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1$
g) $\left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49$
h) $e^{2x-6} = 2$

Aufgabe 8: *Vereinfache maximal.*

a) $x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 5x =$

b) $24 - 3x^2 + 13 + 10x + 9x^2 =$

c) $x^2 + 10x + 25 - 2x^2 + 4x + 2 =$

d) $x^2 - x + 4 + 6x^2 - 36x + 54 - x^2 + 4x =$

e) $-4 + x^2 + 6x - 5 - 3x^2 + 9x - 24 - 36x + 54 - x^2 =$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} - x^2 - 7x - 12 + 5x^2 - 25x - \frac{1}{4} =$

g) $(x+2)(x-3) + x^2 - 4x =$

h) $(2x+3)(7x-3) - (4x+5)(1-x) =$

i) $(4x+7)(5x-1) + (2x-7)(6-2x) - 3x(4x+6) =$

j) $0,5x^2 + \frac{9}{5}x + 16,5 - 2,25x^2 + \frac{5}{4}x - 14 =$

k) $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x\right)x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{13}{4}x =$

l) $\left(\frac{5}{4} - \frac{2}{5}x\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{8}\right) - x^2 + 3x + 17 =$

Aufgabe 9: *Löse nach x auf.*

a) $4x^2 = 16$

b) $3x^2 - 5 = 7$

c) $\sqrt{3x-2} = 2$

d) $5x^4 - 5 = 120$

e) $\sqrt[3]{4x-6} = \frac{3}{2}$

f) $\sqrt{x^5 - 2} - 3,5 = -\frac{1}{2}$

g) $x^{\frac{4}{5}} - 5 = -3$

h) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5} - 6 = 2$

Aufgabe 10: *Löse nach x auf.*

a) $e^x - 4 = 0$

b) $e^{2x+3} = 9$

c) $5e^x - 8 = 0$

d) $2e^{-x+1} = 3$

e) $5^x = 6$

f) $4^{2x} = 3$

g) $2^{3x-6} = 5$

h) $10^{-x+4} = 25$

i) $33^{0,5x-2} = 10$

j) $1,1^{1,1x+1,1} = 11$

k) $4e^{3x} - 4 = 2e^{3x} + 10$

l) $-3e^{-x+1} - 8 = 12e^{-x+1} - 33$

m) $0,5e^{0,2x-5} + 18 = 1,2e^{0,2x-5} + 5$

n) $-2 \cdot 2^{-x+1} + 4 = 3 \cdot 2^{-x+1} - 22$

o) $2e^{x-2} = 2^{x-2}$

p) $5^{-0,4x+1,7} = 7^{-0,4x+1,7}$

q) $9^{1,45x} = 7^{1,45x}$

r) $\pi^{\sqrt{2}x+\ln 2} = 2^{\sqrt{2}x+\ln 2}$

Aufgabe 11: *Löse nach x auf.*

a) $\ln(x) + 3 = 0$

b) $\ln(x+1) = 4$

c) $\ln(2x) - 7 = 0$

d) $\ln(0,5x) - 1 = 4$

e) $\log_3(x+5) = \frac{1}{2}$

f) $\log_5\left(\frac{3}{4}x + 2\right) - 5 = 2$

g) $3\ln(1,5x - 0,1) = -\frac{4}{5}$

h) $4\lg(2x) = -2$

i) $0,2\log_2(x+3) = 3,2$

j) $3\log_7(4,5x) = 11,1$

k) $\ln\left(x^2\right) - 2 = 1,75$

l) $3\ln\left(2x^2\right) = -0,05$

m) $3\log_4\left(x^5\right) + \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$

n) $-2,3\log_{13}\left(0,03x^4\right) - 5 = 3,7$

o) $\ln(x+3) = \ln(2x+6,2)$

p) $5 + \ln(1,25x+1) = \ln(2,2x+0,4)$

Aufgabe 12: *Löse nach x auf.*

a) $e^{2x} - 4 = 0$

b) $54 = 87 \cdot e^{-3x}$

c) $2\ln(5x) - 5 = 0$

d) $2^{0,5x+3} = 9$

e) $7\log_5(1,2x+3) - 2 = 0$

f) $(10^x + 10^x)^9 = 25$

g) $3e^{-7x+2} = 0,3e^{2x-6}$

h) $8\left(8^{2x} + 8^{2x}\right) = \ln(5)$

Aufgabe 13: *Fasse die Terme zusammen und löse anschließend nach x auf.*

a) $2x - 3 = 8$

b) $4x + 5 + x = 6$

c) $0 = 3 - x + 13 - 8x - 4x$

d) $3x + 4 = x + 8$

e) $-4x - 7 = -7x$

f) $3x - 4 + 2x = x - 2$

g) $-x + 1 + 3x = 9 + x$

h) $6x - 2 = -3x + 6$

i) $2x - 6 + 2x = 11$

j) $4x + 7 = 3x - 1$

k) $4x + 9 = 2x - 4$

l) $6 - 8x = -4x + 2$

m) $23x - 3 = 91 - 41x$

n) $55x - 23 = 34 + 32x$

o) $7x - 34x + 4 = 42 - 3x$

p) $13 - 4x + 1 = 3x + 14x$

q) $76x - 22 = 32 + 11x$

r) $82 - 23x = x + x25 - 4$

s) $58 - 40x = x + 65 - 34x$

t) $85x - 14x = 25x - 66$

u) $15 - 34x = 235x + 45 - 436x$

v) $255 - 672x + 45 = 25 - 345x$

w) $59x - 37 + 26x = 266$

x) $x346 = x626 - 263 - x1455$

y) $2345x - 3227 = x826 - 326 + 662x$

z) $2562x + x955 = x325 + 256$

Aufgabe 14: *Fasse die Terme zusammen und löse anschließend nach x auf.*

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 2 = 6$

b) $\frac{3x}{4} - 3 = \frac{x}{8} + 4$

c) $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{x}{6} - \frac{1}{9}$

d) $\frac{x}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{x}{4}$

e) $\frac{2x}{5} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{x}{10}$

f) $\frac{1}{2}x + \frac{6}{5} = -\frac{7}{4}x - \frac{9}{2}$

g) $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{6} - \frac{3}{2}x$

h) $\frac{3}{8}x - \frac{7}{8} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{16} - \frac{1}{4}$

i) $\frac{5}{4}x - 7 - \frac{1}{8}x = \frac{5}{6} + \frac{3x}{8}$

j) $\frac{7}{5} - \frac{3x}{10} = \frac{2}{5}x + \frac{x}{20} - \frac{7}{10}$

k) $\frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{5x}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x$

l) $\frac{5}{7}x + \frac{3}{13} = \frac{x}{5} - \frac{9}{11}$

m) $\frac{7}{4}x + \frac{4}{3} = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}$

n) $\frac{8}{9}x - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$

o) $\frac{3}{2}x - \frac{13}{4}x = \frac{4}{5} - \frac{7x}{2} - \frac{8}{3}$

p) $\frac{9}{4} - \frac{18}{3}x = \frac{15}{6}x + \frac{1}{2} + \frac{11}{8}$

q) $\frac{11}{9} - \frac{x}{7} = \frac{3}{10}x - \frac{5}{3} + \frac{1}{70}x$

r) $\frac{4}{5}x - \frac{7}{2} + \frac{7x}{6} - \frac{9}{5} = 0$

s) $\frac{4}{3} + \frac{7x}{5} - \frac{13}{4}x + \frac{7}{8} = \frac{5}{6}$

t) $\frac{1}{10} = \frac{x}{20} + \frac{3}{5} - \frac{4x}{10} + \frac{3}{15}$

Aufgabe 15: *Löse nach x auf.*

a) $2(x-2)=4$

b) $3(x+5)=27$

c) $-(x+4)=-5$

d) $5(2x-3)=15$

e) $-134,275(5x-13)=0$

f) $7(3-5x)=\frac{2}{7}$

g) $\frac{x-3}{5}=2$

h) $\frac{9-2x}{2}=2,25$

i) $0=\frac{3(4-2x)}{8,322}$

j) $5\frac{x-1}{2}-7=0$

k) $4\frac{5-3x}{8}=12$

l) $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)x=10$

m) $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(5-\frac{x}{2}\right)$

n) $\left(2+\frac{4}{5}\right)(2-x)=0$

Aufgabe 16: *Berechne die fehlende Größe.*

$a)\ F = ma$	mit: $a = 2$ und $F = 30$
$b)\ T = mgh$	mit: $m = 8$; $g = 10$ und $T = 480$
$c)\ U - T = \frac{1}{2}v$	mit: $v = 5$ und $U = 7$
$d)\ G\frac{Mm}{r} = F$	mit: $F = 50$; $r = 8$; $m = 2$ und $G = 0,1$
$e)\ r = 2x + 2y + z$	mit: $r = 12$; $x = 0,4$ und $z = 1,5$
$f)\ \frac{V}{A} - a = a + V$	mit: $V = 36$ und $A = 7$
$g)\ pV = \frac{3}{2}kNT$	mit: $N = 100$; $k = 5$; $p = 30$ und $V = 20$ mit:
$h)\ 0 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $d = 3$; $s = 5$ und $a = 2$
$i)\ 8ab - c = cb + b$	mit: $b = 3$ und $c = 0,75$
$j)\ G\frac{Mm}{r} = F$	mit: $F = 120$; $M = 4,5$; $m = 9,5$ und $G = 1,2$
$k)\ mn + po = mz$	mit: $m = 2$; $p = 1,5$ $z = 3$ und $n = \frac{5}{4}$
$l)\ \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$	mit: $A = 0,2$; $B = 0,5$ und $C = 6$
$m)\ mn + po = mz - pq$	mit: $m = 0,01$; $p = 8$ $z = 4,2$; $n = 12$ und $q = \frac{3}{8}$
$n)\ 1 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $r = 2,5$; $s = \frac{1}{4}$ und $a = \frac{7}{8}$
$o)\ 0 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $r = 2,5$; $s = \frac{1}{4}$ und $a = \frac{7}{8}$

Aufgabe 17: *Löse nach x auf.*

$a)\ a + b + x = c$	$b)\ ax - c = d$
$c)\ gtx - hf = zt$	$d)\ a(x - b) = d$
$e)\ \frac{a}{b} = \frac{x}{d}$	$f)\ \frac{a}{x} = \frac{d}{k}$
$g)\ \frac{b-d}{p-q}x = 1$	$h)\ \frac{a+d-x}{t} = z + s$
$i)\ \frac{ax-d}{f+u} = \frac{2}{r}$	$j)\ \frac{r-tx}{a+d} = g$
$k)\ -a\frac{d-x}{t} + d = e$	$l)\ w\,(p - sx) = t + q$

Aufgabe 18: *Stelle die Gleichungen nach jedem Parameter um und notiere die resultierende Gleichung.*

a) $ad = bc$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

c) $a + d = b + c$

d) $\frac{a}{b} = d - c$

e) $ab + c = \frac{d}{e}$

f) $\frac{a+b}{c} = d - e$

g) $a(b - c) = \frac{d}{e}$

h) $\frac{a}{b-d} + c = e - gh$

i) $ab + ac = \frac{d-e}{f}$

j) $ab - \frac{c}{d} = ae + \frac{ce}{d}$

Aufgabe 19: *Für vier Personen werden bei einem Mittagessen* $250g$ *Mehl benötigt, wie viele Personen könnten bei diesem Essen bedient werden, wenn* $4,2kg$ *Mehl verwendet werden? Stelle zunächst die Verhältnisgleichung auf.*

Aufgabe 20: *Löse alle nach* x *auf.*

a) $-x = 4$

b) $-x = 8$

c) $-x = -5$

d) $-2x = 32$

e) $-6x = -48$

f) $4x = -8$

g) $-33 = -3x$

h) $-1 = 13x$

i) $-18x = -9$

j) $-5x = 7$

k) $7x = -33$

l) $-21x = 7$

m) $\frac{x}{4} = -3$

n) $\frac{x}{9} = -2$

o) $-\frac{x}{3} = -4$

p) $\frac{1}{5}x = -6$

q) $-\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$

r) $\frac{1}{4}x = -\frac{12}{5}$

s) $-2x = 6,4$

t) $-3x = -4,5$

u) $-0,5x = 1,5$

v) $\frac{1}{-2}x = 3,7$

w) $\frac{-1}{2}x = 17,4$

x) $-1,7 = \frac{x}{10}$

Weitere Übungen zur Äquivalenzumformung von linearen Gleichungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Weitere Übungen zur Äquivalenzumformung mit Potenzen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Weitere Übungen zur Äquivalenzumformung mit Funktionen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.11) Lösungen zur Äquivalenzumformung.

2.12 Quadratische Ergänzung

Das Ziel bei einer *quadratischen Ergänzung* ist es, eine Gleichung so umzuformen, dass man die *binomischen Formeln* ausnutzen kann um die *Potenz* der Unbekannten zu reduzieren. Als erklärendes Beispiel soll diese allgemeine Gleichung, welche auch allgemeines Polynom zweiter Ordnung oder quadratische Gleichung genannt wird, dienen (Auf die Eigenschaften von Polynome und explizit quadratische Termen wird im Kapitel „Funktionen“ genauer eingegangen.):

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.64}$$

Diese Form erinnert an die so genannte erste *binomische Formel* $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Aus diesem Grund wird der *Vorfaktor* (*Koeffizient*) a des quadratischen *Terms* ax^2 über *Äquivalenzumformung* entfernt.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \qquad |: a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Durch direktes gegenüberstellen der *Terme* können bestimmte Bedingungen an die *Vorfaktoren* geknüpft werden, sodass die künstliche Generierung einer *Binomischen Formel* möglich wird, dies wird *Koeffizientenvergleich* genannt. Generell wird der *Koeffizientenvergleich* immer angewendet, wenn eine Gleichheit von *Vorfaktoren* zu einer erheblichen Vereinfachung eines Problems dienen könnte.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + 2dx + d^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Durch den *Koeffizientenvergleich* der rot markierten *Vorfaktoren*, kann folgende Bedingung aufgestellt werden: $\frac{b}{a} = 2d$) und so der *Parameter* d als $\frac{b}{2a}$ bestimmt werden. Da die zu lösende Gleichung noch kein d^2 beherbergt, muss dieses durch eine *Addition* hinzugefügt werden. Anschließend werden alle Terme die nicht zu einer *Binomischen Formel* gehören auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \qquad \left| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right. \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \left| - \frac{c}{a} \right. \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \end{aligned} \tag{2.67}$$

Nach genauerer Betrachtung ist festzustellen, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichen die erste *binomische Formel* vorzufinden ist. Nach der Ersetzung fällt auf, dass die quadratische *Potenz* und die lineare *Potenz* in der *Variablen* x verschmolzen sind. Um nun nach der *Variable* restlos aufzulösen, muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die *Wurzel* gezogen werden, da dies die *Umkehrfunktion* zum Quadrieren ist. Dabei ist zu beachten, dass es eine negative und eine positive Lösung gibt, da zum Beispiel $2^2 = (-2)^2$ ist.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
&\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad \Big|\sqrt{} \\
&x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \qquad \Big|-\frac{b}{2a} \\
&x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Nach einer Umbenennung der *Parameter* $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ erkennt man, dass die so genannte *p-q-Formel* hergeleitet wurde, welche sich lediglich durch die Umbenennung der *Parameter* von der sogenannten *Mitternachtsformel* aus Gleichung (2.68) unterscheidet:

$$\begin{aligned}
&x^2 + px + q = 0 \\
&\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Um Zeit in bestimmten Klausur- oder Unterrichtssituationen zu sparen empfiehlt es sich die *p-q-Formel* aus Gleichung (2.69) zu verwenden, dennoch sollte von ihrer Benutzung abgeraten werden, denn in der höheren Mathematik (siehe Kapitel „Differentiation und Integration“) sind viele Aufgaben nur noch mittels der *quadratischen Ergänzung* effektiv zu lösen.

Die Zahl unten recht von zum Beispiel x_1 wird *Index* genannt. Ein *Index* hat keine genauere mathematische Funktion, allerdings kann darüber eine zusätzliche Information mitgegeben werden. So bedeutet $x_{1,2}$, dass zwei spezielle *Werte* für x vorliegen, die die *Gleichung* lösen würden. Oftmals wird auch x_0 vorgefunden und steht für einen speziellen konstanten *Wert*. Folglich gibt der *Index* nur genauer an welche Bedeutung genau dieser *Wert* der *Variable* oder des *Parameters* besitzt.

Wenn bei einer Gleichung in offensichtliches *Produkt* mit einer *quadratischen Gleichung* vorliegt, lohnt es sich diese auszuklammern

$$\begin{aligned}
&ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\
&\Rightarrow x \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

sodass das die *Faktoren* des *Produkts* separiert betrachtet werden können, denn es gilt nach wie vor: Wenn einer der *Faktoren* gleich Null ist, dann ist das gesamte *Produkt* gleich Null.

$$\begin{aligned} &\underbrace{x}_{\overset{!}{=}0} \cdot \underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\overset{!}{=}0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow &ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Ab diesem Zeitpunkt kann die restliche Gleichung mit der *quadratischen Ergänzung* gelöst werden. Das *Ausklammerungsverfahren* funktioniert nicht nur bei höheren *Polynomen*, sondern immer, wenn aus allen Bestandteilen der Gleichung *ausgeklammert* werden kann. So ist es möglich bei einigen Gleichungen die Lösungen direkt abzulesen.

$$x^2 - 6x = x(x-6) \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6 \tag{2.72}$$

Aus diesem Grund lohnt es sich nicht immer Klammern aus zu *multiplizieren*.

2.12.1 Übungsaufgaben zur quadratischen Ergänzung

Aufgabe 1: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der p-q-Formel auf.*

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $4x^2 - 16x + 16 = 0$

c) $3x^2 + 24x - 3 = 0$

d) $5x^2 - 20x = 50$

e) $2x^2 - 20x = 6 - 10x$

f) $7x = 8 - 3x^2$

g) $3x^2 - 6x = 0$

h) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$

i) $\frac{1}{2}x^2 - 5x = 7 - \frac{5}{2}x$

j) $\frac{3}{4}x = 6 - \frac{4}{3}x^2$

k) $\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{2}{5} - \frac{8}{3}x$

l) $\frac{11}{4}x = \frac{8}{3} - \frac{3}{4}x^2$

m) $\frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{4}x = \frac{13}{4} - \frac{11}{8}x$

n) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{18}x^2 = \frac{5}{6} - \frac{8}{9}x^2$

o) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x = \sqrt{17}$

p) $\pi x + ex^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 2: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf.*

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $x^2 - 16x + 64 = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

e) $2x^2 + 4x + 2 = 0$

f) $6x^2 - 36x + 54 = 0$

g) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

h) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0$

i) $x^2 + 6x - 5 = 0$

j) $x^2 - 7x - 12 = 0$

k) $3x^2 + 9x - 24 = 0$

l) $5x^2 - 25x - \frac{1}{4} = 0$

m) $-2x^2 + 8x + 3 = 0$

n) $4x^2 - 6x - 16 = 0$

o) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{5}{6} = 0$

p) $-\frac{8}{5}x^2 + \frac{5}{7}x + \frac{1}{4} = 0$

q) $-4x + 3 = 2x^2$

r) $-x^2 + 5 = 4x$

s) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{6} = 2x$

t) $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x = -\frac{5}{2}$

u) $-3x + 5 = 6x^2 - 4$

v) $-4x^2 + 20 = 4x - 13$

w) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{9}{15} = 4x - 3x^2$

x) $-\frac{2}{7}x^2 + \frac{3}{14}x - 4 = x^2 - 2x + 3$

Aufgabe 3: *Stelle die Gleichungen nach jedem Parameter um und notiere die resultierende Gleichung.*

a) $a^2 + b^2 = d - c$

b) $a^2 d^2 = \frac{c}{d}$

c) $ar^2 - br + c = 0$

d) $a^2 r^2 = arb + b^2$

e) $ae^b = c$

f) $sa^2 - e^b = 0$

g) $\cos(w) - r^3 = e^d$

h) $\sin(wt - \phi) = e^{(-zy)}$

i) $1 = \frac{\sin(r-t)}{\cos(e^{ab-c})}$

j) $\frac{\sqrt[4]{a^2+d}}{e^c} = b^2 - b$

k) $\log_a(b \arccos(c)) = e^{\sqrt[n]{d}}$

l) $a \sin(r)^2 - e^b a^2 = e^{2b} \sin(r)$

Weitere Übungen zur quadratischen Ergänzung zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.12) Lösungen zur quadratischen Ergänzung.

2.13 Substitution

Bei jeder Rechnung ist es dem Rechnenden freigestellt Abkürzungen einzuführen. Dieser Prozess wird *Substitution* genannt. Im folgenden Beispiel wird die *Summe* innerhalb der Klammer *substituiert*:

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \qquad \text{mit: } y := x + a \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass bei der *Substitution* ersetzten *Variablen* vollständig eliminiert werden.

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \cdot x \qquad \text{mit: } y := x + a \;\Rightarrow\; x = y - a \\ &= y^2 \cdot (y - a) = y^3 - a \cdot y^2 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Jede *Substitution* ist zulässig. Wichtig wird dieser Prozess besonders wenn komplexere Aufgaben dadurch wesentlich vereinfacht werden können. Aus diesem Grund wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ nochmal besonders auf die Substitution eingegangen.

2.13.1 Übungsaufgaben zur Substitution

Aufgabe 1: *Schreibe die Gleichung mit der angegebenen Substitution auf.*

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8$	mit: $y=x^2+x+1$
b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c$	mit: $y^2=4x+a$
c) $(18x-4ab)^2=c$	mit: $\sqrt{y}=18x-4ab$
d) $2^{2a-c}=32$	mit: $b=2a-c$
e) $x=4a$	mit: $y=x+4a$
f) $x^2+8x+16=0$	mit: $(y+4)^2=x^2+8x+16$
g) $(3a+2x)(2x-3a)=0$	mit: $y=2x+3a$
h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2$	mit: $y=x^2+4x$

Aufgabe 2: *Finde die Substitution heraus und schreibe sie auf.*

a) $x^3+4x^2-x-8=0$	$\Rightarrow y-8=0$
b) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=0$	$\Rightarrow y-\frac{1}{y}=0$
c) $\frac{x^2}{ab}+\frac{5}{ab}-3=0$	$\Rightarrow dx^2+5d-3=0$
d) $\frac{ax^2+bx-c}{5}=0$	$\Rightarrow \frac{y}{5a}=0$
e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0$	$\Rightarrow gx-f=0$
f) $x^2+4x-8=0$	$\Rightarrow \left(\frac{y}{4}+2\right)^2=0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.13) Lösungen zur Substitution.

2.14 Gleichungssysteme

Nicht jede Gleichung besitzt nur eine Unbekannte, sondern oftmals mehrere. Mit der richtigen Anzahl von Randbedingungen an diese Gleichung können alle Unbekannten mittels eines Gleichungssystem bestimmt werden. Sei ein allgemeines Gleichungssystem mit zwei Unbekannten als Beispiel gegeben:

$$\begin{aligned} I. \quad & 4a = b - 2 \\ II. \quad & 2b = 12a + 8 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Das Gleichungssystem besteht dabei aus zwei Gleichungen mit ihren Bezeichnung ($I.$ oder $II.$) vor sich hertragen, welche zur besseren Übersicht dienen. Nun kann durch die Äquivalenzumformung eine der Gleichungen umgestellt werden und dann mittels des Einsetzungsverfahrens in die andere Gleichung eingesetzt werden. Dabei werden die Rechenschritte mit einem horizontalen Strich abgetrennt.

$$\begin{array}{lll} I. & 4a & = b - 2 \\ II. & 2b & = 12a + 8 \qquad |: 2 \\ \hline I. & 4a & = b - 2 \\ II. & b & = 6a + 4 \qquad |II. \text{ in } I. \\ \hline II. \text{ in } I. & 4a & = (6a + 4) - 2 \\ II. \text{ in } I. & 4a & = 6a + 2 \qquad |-6a \\ II. \text{ in } I. & -2a & = 2 \qquad |: (-2) \\ II. \text{ in } I. & a & = -1 \qquad |: (-2) \end{array} \tag{2.76}$$

Nachdem eine Unbekannte bestimmt wurde, kann diese in die umgestellte Form der zweiten Gleichung eingesetzt werden, sodass auch die andere Unbekannte ausgerechnet werden kann.

$$\begin{aligned} II. \quad & b = 6a + 4 \qquad | \text{ mit } a = -1 \\ II. \quad & b = 6 \cdot (-1) + 4 \\ II. \quad & b = -2 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Dies ist ein allgemeiner Weg um Gleichungssysteme zu lösen und gilt nicht nur für Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen sondern für beliebig viele. Dabei muss immer beachtet werden, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, da das Gleichungssystem ansonsten nicht bestimmt (zu wenige Informationen) oder überbestimmt (zu viele Informationen) ist. Letzteres ermöglicht es dem Rechnenden sich auf die trivialeren Informationen zu beschränken.

2.14.1 Übungsaufgaben zu Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Berechne die Unbekannten.*

a)	*I.*	$a = 3b + 9$	und	*II.*	$0 = 5b - a - 6$
b)	*I.*	$5a - 0,5 = b$	und	*II.*	$3a + 3b = 8$
c)	*I.*	$ab = 24$	und	*II.*	$2a + 2b = 20$
d)	*I.*	$2a = 8b - 6$	und	*II.*	$5b = 10a + 35$
e)	*I.*	$0 = 8b - 2 + 5a$	und	*II.*	$\frac{1}{2}b = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}$
f)	*I.*	$-a = 3b + 7$	und	*II.*	$2b + 3a = -4$
g)	*I.*	$-5a = -\sqrt{2}b + 11,25$	und	*II.*	$-3a + 4b = 0$
h)	*I.*	$\frac{9}{4} - \frac{5}{2}b = 2a$	und	*II.*	$0 = 4,5a - 2,3b - 7,6$
i)	*I.*	$4ab = 40$	und	*II.*	$\frac{a+b}{4} = \frac{28}{16}$
j)	*I.*	$0,7a - 0,1b + 1,3 = 0$	und	*II.*	$5(2a - b) = 24$
k)	*I.*	$64 = a^2b^2$	und	*II.*	$16a^2 = 81b^2$
l)	*I.*	$\frac{4}{3}a + 7 = 3,4b + 1,2$	und	*II.*	$\frac{4}{5}a = 2a - 6b + 5$
m)	*I.*	$\frac{1}{6}a - \frac{5}{9}b = 24$	und	*II.*	$0 = -3a - b + \frac{3}{8}$
n)	*I.*	$\sqrt{5}a - \frac{3b}{5} = 2b - 7a + 4$	und	*II.*	$3b = \frac{9}{2}a + 22b - 1$
o)	*I.*	$3b - 9a = \frac{1}{7}b + \frac{10}{9}$	und	*II.*	$0 = -4a + 144$
p)	*I.*	$3ab - 5b = 6$	und	*II.*	$7b - 2a = \frac{3}{2}ab$

Aufgabe 2: *Berechne die Unbekannten.*

a)	$I.$	$a = 5c - 3b + 2$	und $II.$	$3b = a - 4b + 2$
und	$III.$	$3a - 5c = 4b - 8$		
b)	$I.$	$-4a + 2,5c = 0,5b + 3$	und $II.$	$5c = a - b - c + 3$
und	$III.$	$5b - 4a = -3c + 4$		
c)	$I.$	$0 = 3c + 8a - 4c - 5$	und $II.$	$4a = b - 10c$
und	$III.$	$5b + 3a + c - 7 = 0$		
d)	$I.$	$\frac{4}{3}a + 7 = 3,4b + 1,2c$	und $II.$	$\frac{4}{5}c = 2a - 6b + 5$
und	$III.$	$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}c = \frac{3}{4} + \frac{4}{5}b$		
e)	$I.$	$\frac{1}{6}a + 1 - \frac{5}{9}b = 24c$	und $II.$	$8 = -3a - b + \frac{3}{8}c$
und	$III.$	$7ac = 8b - 6$		

Aufgabe 3: *Berechne die Unbekannten.*

a)	$I.$	$a = 2b + 4c - 2d + 1$	und $II.$	$b = 4d - 2a + 5c - 2$
und	$III.$	$c = 3b - d + 4a - 3$	und $IV.$	$d = 7a - 4b + 10c + 6$
b)	$I.$	$a + b + c + d = 24$	und $II.$	$\frac{7}{2}a + b = 10 - 2d + \frac{1}{3}c$
und	$III.$	$12a - 4d = 14c + 5$	und $IV.$	$2d + 6c = 4$
c)	$I.$	$a = b + c$	und $II.$	$4b = -c + 3d$
und	$III.$	$ad - 2c = 8$	und $IV.$	$1,2c + 1,6d - 4,4a = 3 - 0,8b$
d)	$I.$	$4a - 6b = 8c$	und $II.$	$\frac{1}{2}c + \frac{4b}{5} = 3 - 7d$
und	$III.$	$0 = a + 2b + 3c + 4d$	und $IV.$	$\frac{3}{4}d - c + 2a = 5 - 1,3b$
e)	$I.$	$\frac{1}{4}a - 5b = 0$	und $II.$	$7b + 4 = 11d$
und	$III.$	$6b - a = 1,5d$	und $IV.$	$2c - \frac{3}{10}d = \frac{2}{5} - b$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.14) Lösungen zu Gleichungssysteme.

2.15 Fakultäten und Binominalkoeffizienten

Einige Abkürzungen werden oft bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie bei Reihendarstellungen verwendet. Zu diesen zählen *Fakultäten* und *Binominalkoeffizienten*. So kann zum Beispiel die Rechnung

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \tag{2.78}$$

abgekürzt werden, durch den sogenannten *Fakultätsoperator* !:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\ \Rightarrow n! &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Dabei ist die *Fakultät* so definiert, dass $0! := 1$ gilt. Da oftmals *Fakultäten* in *Brüchen* vorkommen, sollte das *Kürzen* sowie andere Rechenregeln von *Fakultäten* bekannt sein. Außerdem unterliegt der *Fakultätsoperator* nicht dem *Distributiv-*, *Assoziativ-* und *Kommutativgesetz*, da er ausschließlich nach links wirkt und auch nur auf das Ergebnis einer Klammer, die links von ihm steht.

$$\begin{aligned} &\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ &(ab)! \neq a!b! \\ &(a+b)! \neq a! + b! \\ &6 \cdot 5! = 6! \Rightarrow (n+1) \cdot n! = n! \cdot (n+1) = (n+1)! \\ &\frac{8!}{8} = 7! \Rightarrow \frac{n!}{n} = (n-1)! \end{aligned} \tag{2.80}$$

Einige Konstellationen mit der *Fakultät* kommen besonders häufig vor. Die am häufigsten vorkommende Anordnung von *Fakultäten* wird *Binomialkoeffizient* genannt und ist definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.81}$$

Generell sollte der Umgang mit neuen Abkürzungen, die neu eingeführt wurden, geübt werden, da in der Mathematik noch viele weitere Abkürzungen warten. So werden zum Beispiel im Kapitel „Reihen“ weitere oft vorkommende Abkürzungen eingeführt.

2.15.1 Übungsaufgaben zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1: *Berechne das Ergebnis.*

a) $5!$ *b)* $3!$ *c)* $\frac{7!}{5!}$

d) $\frac{3!}{4!} \cdot 0!$ *e)* $\frac{4!b!}{b!}$ *f)* $4! \cdot 3! \cdot 2!$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis und vergleiche die ausgerechneten Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck.*

a) $\binom{2}{1}$ *b)* $\binom{8}{4}$ *c)* $\binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0}$

d) $\binom{7}{2}$ *e)* $\binom{3}{1}$ *f)* $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2}$

Aufgabe 3: *Drücke die Terme durch Fakultäten aus.*

a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *b)* $11 \cdot 10 \cdot 9$ *c)* $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{22 \cdot 21 \cdot 20}$

d) $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ *e)* $11 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 23$ *f)* $\frac{6 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 5 \cdot 65}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10}$

Aufgabe 4: *Beweise folgende Identitäten.*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.15) Lösungen zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten.

2.16 Gemischte Algebraaufgaben

Aufgabe 1: *Sortiere die Zahlen nach ihrer Größe.*

a) $\frac{5}{3}$; $1,41$; $2,13$; $\frac{9}{4}$; $\frac{11}{6}$; 2 ; $\frac{15}{7}$; $2,26$.

b) $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{4}{7}$; $0,57$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{8}$; $0,45$; $\frac{5}{9}$.

c) $\sqrt{5}$; $\frac{7}{3}$; $\sqrt{6}$; $2,51$; $\frac{14}{5}$; $2,33$; $\frac{37}{16}$; $\frac{17}{6}$.

d) $\ln 36$; π ; $\sqrt{13}$; $3,141$; e ; $\frac{13}{4}$; $\frac{19}{6}$; $3,\bar{3}$.

e) 5^2 ; $\frac{51}{2}$; $\sqrt{620}$; 8π ; 3^3 ; $\frac{128}{25}$; $24,79$; $\lg 10^{25,01}$.

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{\pi}{4}$; $0,734$; $\ln 2$; $\frac{2}{3}$; $0,69$; $\frac{e}{3}$.

g) $-\frac{7}{3}$; $-\sqrt{6,25}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $(-1,34)^3$; $-\ln \pi^2$; $-\frac{15}{6}$; $-2,27$; $-\frac{5e}{6}$.

Aufgabe 2: *Löse die Gleichungen nach x auf.*

a) $(x-2)(x+2)$

b) $(x+3)(x+1)$

c) $(x-4)(x-5)$

d) $(x+1)(x-6)$

e) $(x-2,25)(x+3,3)$

f) $(x-1,45)(x+2,05)$

g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

h) $\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{2}{9}\right)$

i) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

j) $(x-\ln 2)\left(x-\sqrt[3]{e\pi^4}\right)$

Aufgabe 3: *Stelle die Gleichung nach der fehlenden Variable um und setze anschließend die gegebenen Werte ein, um das Ergebnis zu berechnen.*

a) $x = vt$	mit: $v = \frac{11}{2}$ und $x = \frac{3}{4}$
b) $V = abc$	mit: $V = 5$; $a = 2,25$ und $b = \frac{1}{6}$
c) $V = \frac{1}{3}Gh$	mit: $h = \frac{8}{5}$ und $V = 8$
d) $x = \frac{1}{2}at^2$	mit: $t = \frac{3}{4}$ und $x = \frac{4}{3}$
e) $x = \frac{1}{2}at^2$	mit: $a = \frac{9}{2}$ und $x = \frac{1}{8}$
f) $U = I\left(R_1 + R_2\right)$	mit: $U = 20$; $I = 3$ und $R_1 = 470$
g) $U = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$	mit: $U = -240$; $I = -5$ und $R_2 = 1000$
h) $O = 2ab + 2ac + 2bc$	mit: $a = 7$; $b = \frac{9}{5}$ und $O = 144$
i) $c^2 = a^2 + b^2$	mit: $c = \frac{7}{8}$ und $a = \frac{2}{3}$
j) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	mit: $c = \sqrt{8}$ und $a = \sqrt{5}$
k) $A = \frac{a+c}{2}h$	mit: $c = 41$; $A = 83$ und $h = 8$
l) $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$	mit: $V = 81$
m) $O = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1\left(r_1 + r_2\right)\right)$	mit: $O = 5$; $r_1 = \sqrt{3}$ und $r_2 = \frac{5}{3}$
n) $A = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2}$	mit: $A = \frac{10}{3}$; $\alpha = 44,7$; $h = \sqrt{5}$ und $s = \ln 4$
o) $O = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1\left(r_1 + r_2\right)\right)$	mit: $O = 3,4$; $r_1 = \frac{1}{10}$ und $s_1 = \sqrt{2}$
p) $f = ax^2 + bx + c$	mit: $f = 0$; $a = 3$; $b = \frac{5}{2}$ und $c = -4$
q) $x = \frac{1}{2}at^2 + vt + s$	mit: $a = 11$; $x = 50$; $v = \frac{5}{4}$ und $s = \ln 5$
r) $N = Ae^{\lambda t}$	mit: $N = 22500$; $A = 12000$ und $t = 365,249$

Aufgabe 4: *Berechne alle freien Zellen der Tabelle. Die Rechenvorschriften sind jeweils in der ersten Spalte gegeben.*

	1	2	3	4	5	6	7
v	1	2	$1,75$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\sqrt{2}$
t	2	4	$2,25$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
$a = v \cdot t$	2						
$x = \frac{1}{2}at^2 + vt$	6						
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{9}}}$	$\approx$ 1,06						
$L = \frac{x}{\gamma}$	$\approx$ 5,66						
$m = \frac{4}{3}\pi x^3$	$\approx$ 904,78						
$F = m\gamma a$	$\approx$ 1919,22						
$r = \frac{\gamma a}{v^2}$	2,12						
$E = \frac{1}{2}mv^2$	$\approx$ 1809,56						
$h = \frac{E}{F}$	$\approx$ 0,94						

Aufgabe 5: *Übersetze den Text in eine Gleichung.*

a) Das dreifache der gesuchten Zahl ergibt 81.

b) Das doppelte der gesuchten Zahl reduziert um 4 ergibt 11.

c) Die gesuchte Zahl subtrahiert um 10 ist identisch zum Produkt aus der Zahl und 5.

d) Die doppelte Summe aus der Zahl und sieben ergibt die Zahl dividiert durch vier.

e) Die gesuchte Zahl befindet sich in einem Nenner dessen Zähler 5 ist. Die Summe aus diesem Bruch mit 5 ist äquivalent zu 8.

f) Der Quotient der gesuchte Zahl dividiert durch 6 erhöht um 3 ist gleich der Summe aus der Zahl und 3.

g) Das vierfache einer gesuchten Zahl addiert mit dem doppeltem der Summe aus der Zahl und 3 ergibt 0.

h) Die Hälfte der Differenz von 8 und dem gesuchten Minuenden ist gleich den Summanden 4 und der Zahl.

i) Ein Drittel der gesuchten Zahl erhöht um 4 ergibt sich zu drei Vierteln der Zahl subtrahiert um ein Halb.

j) Ein Neuntel addiert zur gesuchten Zahl, welche mit sich selbst multipliziert wird ergibt sich zum Quotienten aus 2 und der Zahl als Dividenden.

k) Das Produkt aus der Summe von 5 und der gesuchten Zahl mit der Differenz der doppelten Zahl und dem Subtrahenden 10 ergibt sich zur Zahl subtrahiert von 24.

l) Die negative gesuchte Zahl addiert um 11 ergibt sich aus einer Summe von Produkten, welchen die Zahl als gemeinsamen Faktor haben. Die jeweiligen anderen Faktoren sind 3 und 5.

m) Das Produkt der Summen von der gesuchten Zahl und 7 mit der gesuchten Zahl und 4 ist äquivalent zum Quotienten aus der Zahl dividiert durch 5.

n) Die gesuchte Zahl mit einer Potenz von 3 addiert um das dreifache des Quadrat der Zahl ist äquivalent zu 11 subtrahiert zur vierten Wurzel aus der Zahl.

o) Die Wurzel aus dem Produkt von der gesuchten Zahl und 8 ergibt sich zu dem Quadrat der Summe aus der Zahl und 6.

p) Der Logarithmus der gesuchten Zahl zur Basis 10 subtrahiert von 12 ist gleich der Zahl im Exponenten zur Basis 2 addiert mit dem Produkt der Zahl zum Quadrat und 7.

Aufgabe 6: *Schreibe die Aufgabe so um, dass sie kürzer wird.*

a) $\bullet + 0 =$

b) $\bullet - 0 =$

c) $\bullet + \bullet =$

d) $\bullet + \bullet + \bullet =$

e) $\bullet + (\bullet + \bullet) =$

f) $(\bullet + \bullet) + \bullet =$

g) $(\bullet \cdot \bullet) \cdot \bullet =$

h) $\bullet \cdot (\bullet \cdot \bullet) =$

i) $\bullet + \bullet - \bullet - \bullet =$

j) $\bullet \cdot \bullet - \bullet \cdot \bullet =$

Aufgabe 7: *Schreibe die Aufgabe so um, dass daraus ein Bruch oder eine Zahl wird.*

a) $\bullet \cdot 1 =$

b) $\frac{\bullet}{1} =$

c) $\frac{\bullet}{\bullet} =$

d) $\frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet} =$

e) $\bullet \cdot \frac{\bullet}{\bullet} =$

f) $\frac{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet} =$

g) $\frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} =$

h) $\frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} =$

i) $\frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} =$

j) $\frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} =$

k) $\frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \bullet =$

l) $\frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} : \bullet =$

m) $\frac{\bullet}{\bullet} + \frac{\bullet}{\bullet} =$

n) $\frac{\bullet}{\bullet} - \frac{\bullet}{\bullet} =$

o) $\frac{\bullet}{\bullet} + \bullet =$

p) $\frac{\bullet}{\bullet} - \bullet =$

Aufgabe 8: *Schreibe die Aufgabe durch Ausmultiplizieren oder Benutzen von Potenzgesetzen um.*

a) $(\bullet + \bullet) \cdot \bullet =$

b) $\bullet \cdot (\bullet + \bullet) =$

c) $-(\bullet + \bullet) =$

d) $-\bullet \cdot (\bullet - \bullet) =$

e) $\bullet \cdot (\bullet - \bullet) \cdot \bullet =$

f) $\bullet \cdot (\bullet - \bullet + \bullet) =$

g) $(\bullet + \bullet) \cdot (\bullet + \bullet) =$

h) $(\bullet + \bullet) \cdot (\bullet + \bullet) =$

i) $(\bullet - \bullet) \cdot (\bullet - \bullet) =$

j) $(\bullet + \bullet) \cdot (\bullet - \bullet) =$

k) $\bullet \cdot \bullet =$

l) $\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet =$

m) $\bullet^{\bullet} \cdot \bullet^{\bullet} =$

n) $(\bullet^{\bullet})^{\bullet} =$

o) $\frac{\bullet^{\bullet}}{\bullet^{\bullet}} =$

p) $(\bullet^{\bullet})^{\frac{\bullet}{\bullet}} =$

Aufgabe 9: *Die fehlende Größe der Linsengleichung* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{g}$ *und gib das Ergebnis in Metern an.*

a) $b = 2m$ und $g = 1m$
b) $f = 25cm$ und $g = 1,5m$
c) $b = 20cm$ und $f = 10cm$
d) $b = 40cm$ und $g = 60cm$
e) $f = 12,5cm$ und $g = 2m$
f) $b = 30cm$ und $f = 5cm$

Aufgabe 10: *Bestimme die fehlende Größe für die Impulserhaltung* $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ *mit* $p = mv$. *Gib das Ergebnis in* $\frac{m}{s}$ *oder in* kg *an.*

a) $m_1 = 5kg$; $m_2 = 5kg$; $v_1 = 4\frac{m}{s}$; $v_2 = 2\frac{m}{s}$; $v_1' = 2\frac{m}{s}$;
b) $m_1 = 5kg$; $m_2 = 2kg$; $v_1 = 4\frac{m}{s}$; $v_2 = 2\frac{m}{s}$; $v_1' = 1\frac{m}{s}$;
c) $m_1 = 4kg$; $m_2 = 6kg$; $v_1 = 4\frac{m}{s}$; $v_2' = 6\frac{m}{s}$; $v_1' = 8\frac{m}{s}$;
d) $m_1 = 1kg$; $m_2 = 8kg$; $v_1 = 10\frac{m}{s}$; $v_2 = 10\frac{m}{s}$; $v_2' = 5\frac{m}{s}$;
e) $m_1 = 500g$; $m_2 = 2kg$; $v_1 = 0,08\frac{km}{s}$; $v_2 = 0,04\frac{km}{s}$; $v_1' = 35\frac{m}{s}$;
f) $m_1 = 0,01Mg$; $m_2 = 4kg$; $v_1 = 5\frac{km}{h}$; $v_2 = 20\frac{m}{s}$; $v_1' = 15\frac{m}{s}$;
g) $m_1 = \frac{1}{250}t$; $m_2 = 50kg$; $v_1 = \frac{1}{2}\frac{m}{s}$; $v_2' = \frac{3}{4}\frac{m}{s}$; $v_1' = \frac{5}{8}\frac{m}{s}$;
h) $m_1 = 250hg$; $m_2 = \frac{1}{5}t$; $v_1' = 20\frac{km}{h}$; $v_2 = 4200\frac{m}{min}$; $v_2' = 36\frac{m}{s}$;
i) $m_1 = 5kg$; $v_2' = 5\frac{m}{s}$; $v_1 = 7\frac{m}{s}$; $v_2 = 4\frac{m}{s}$; $v_1' = 2\frac{m}{s}$;
j) $m_2 = 5kg$; $v_2' = 2\frac{m}{s}$; $v_1 = 9\frac{m}{s}$; $v_2 = 3\frac{m}{s}$; $v_1' = 4\frac{m}{s}$;

Aufgabe 11: *Löse die Gleichung nach ● auf.*

a) $\bullet \cdot \bullet = \bullet$

b) $\bullet \cdot \bullet - \bullet = 0$

c) $\bullet \cdot \bullet + \bullet = 0$

d) $\bullet \cdot \bullet - \bullet = \bullet$

e) $-\bullet + \bullet = -\bullet$

f) $-\bullet\bullet - \bullet = \bullet$

g) $\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet + \bullet = 0$

h) $\frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet} - \bullet = \bullet$

i) $\bullet\bullet(\bullet + \bullet) = \bullet$

j) $\frac{\bullet\bullet}{\bullet\bullet} - \bullet = \bullet$

k) $\bullet\bullet + \bullet\bullet = \bullet$

l) $\frac{\bullet^2 - \bullet^2}{\bullet + \bullet} = \bullet$

m) $\bullet = \bullet - \bullet\bullet$

n) $\bullet^2 + \bullet^2 = \bullet^2$

o) $\sqrt{\bullet} + \bullet = \bullet$

p) $\bullet = \sqrt{\bullet\bullet} + \bullet$

q) $\bullet^2 + 2\bullet\bullet - \bullet = 0$

r) $\bullet\bullet^2 + 2\bullet\bullet - \bullet = 0$

s) $\bullet\bullet^2 - \bullet\bullet + \bullet = \bullet$

t) $-\bullet\bullet^2 + \bullet\bullet\bullet - \bullet = \bullet$

Aufgabe 12: *Löse die Gleichung nach ● auf.*

a) $\bullet^2 = \frac{\bullet}{\bullet}$

b) $\sqrt{\bullet} = \frac{\bullet}{\bullet}$

c) $\sin(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

d) $\cos(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

e) $\tan(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

f) $\cot(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

g) $\ln(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

h) $\lg(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

i) $\log_{\bullet}(\bullet) = \frac{\bullet}{\bullet}$

j) $e^{\bullet} = \frac{\bullet}{\bullet}$

k) $\bullet e^{\bullet} - \bullet = 0$

l) $\bullet e^{\bullet\bullet + \bullet} - \bullet = \bullet$

m) $\sin(\bullet\bullet + \bullet) = \bullet$

n) $\bullet e^{-\bullet\bullet + \bullet} = \bullet$

o) $\bullet \sin(-\bullet\bullet + \bullet) = \bullet$

p) $\bullet^2 = \bullet^2 + \bullet^2 - 2\bullet\bullet\cos(\bullet)$

Aufgabe 13: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Weitere Behauptung zu Zahlen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.16) Lösungen zu den gemischten Algebraaufgaben.

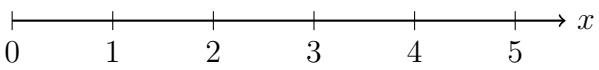
Behauptung	wahr	falsch
$1m^2$ entspricht $100cm^2$.		
1% von 2500€ sind 25€.		
23 ist eine Primzahl.		
$0,43$ ist eine irrationale Zahl.		
$750ml$ sind $\frac{3}{4}l$.		
$\sqrt{81}$ ist eine natürliche Zahl.		
$0,9^6 > 1$.		
Der Logarithmus von Null existiert nicht.		
Man darf nicht durch e^x dividieren.		
$\frac{10}{0,2} > 20$.		
$0,\bar{9}$ ist eine natürliche Zahl.		
$0,37284 \approx 0,372$		

3 Geometrie

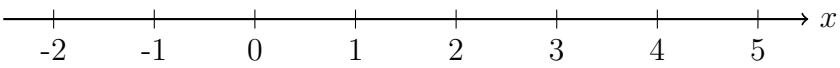
Eines der zentralen Themen der Mathematik in der Schule ist die *Geometrie*. Dies ist dem Fakt geschuldet, dass geometrischen Formen im menschlichen Alltag überall vorzufinden sind und viele Vorgänge durch sie beeinflusst werden.

3.1 Zahlenstrahl

Der *Zahlenstrahl* ist eine Linie, an der es möglich ist Zahlen in regelmäßigen *Abständen* vorzufinden. Diese Linie ist eine *Halbgerade*, also eine gerade Linie mit einem Anfangspunkt (beim Zahlenstrahl wäre dies die 0) aber keinen Endpunkt. Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$[1] wird aus dieser *Halbgeraden* eine *Gerade*, welche weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt.



Halbgerade (Zahlenstrahl nur mit $\mathbb{N}$)



Gerade (Zahlenstrahl mit $\mathbb{Z}$)

Eine wichtige Eigenschaft des *Zahlenstrahls* ist, dass ein Einheitenschritt (also der *Abstand* von 1 bis nach 2) beliebig groß sein kann. Allerdings müssen alle Einheitenschritte die gleichen *Abstände* haben - es wird von *äquidistanten Abständen* gesprochen. Das x am *Zahlenstrahl* beschreibt den Namen der *Dimension*, auf der sich die Zahlen befinden.

3.1.1 Intervalle

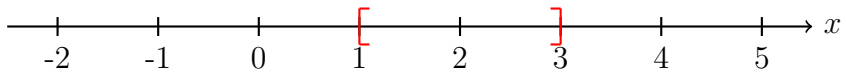
Intervalle sind festgelegte Bereiche auf einem *Zahlenstrahl*. Diese Bereiche können in verschiedene Gruppen eingeteilt werden. Dabei werden die Anfangs- und Endzahlenwerte des *Intervalls* entweder mit (*inklusive Intervallgrenze*) oder nicht (*exklusive Intervallgrenze*) berücksichtigt. Folglich existieren vier verschiedene mögliche Typen von *Intervallen*:

- Beide *Grenzen* des *Intervalls* sind inklusiv, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

[1] $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$$[1,3] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\} \quad . \tag{3.1}$$

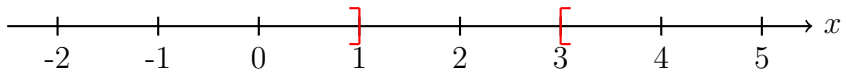
Das *Intervall* von *inklusiv* 1 bis *inklusiv* 3 ist gegeben durch alle Zahlen x zwischen 1 und 3 mit den Zahlen 1 und 3. Graphisch veranschaulichen lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl*:



- Beide *Grenzen* des *Intervalls* sind *exklusiv*, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

$$(1,3) = \,]\,1,3\,[\, = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 3\} \quad . \tag{3.2}$$

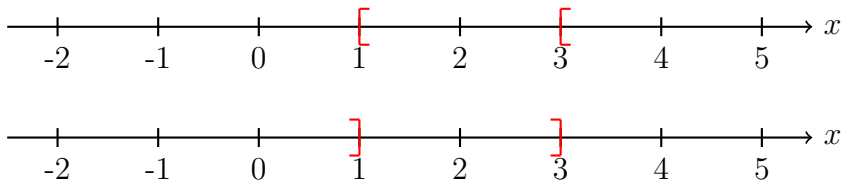
Das *Intervall* von *exklusiv* 1 bis *exklusiv* 3 ist gegeben durch alle Zahlen x zwischen 1 und 3. Graphisch veranschaulichen lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl*:



- Eine *Grenzen* des *Intervalls* ist *inklusiv* und die andere *exklusiv*, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

$$\begin{aligned} [1,3) &= [\,1,3\,[\, = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3\} \quad , \\ (1,3] &= \,]\,1,3\,] = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\} \quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Graphisch lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl* veranschaulichen:

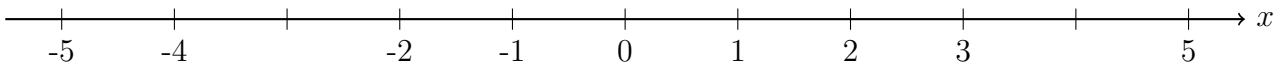


Intervalle werden dazu benötigt um *Lösungensmengen* für bestimme Probleme anzugeben. Dies wird besonders wichtig, wenn die *Funktionen* eingeführt werden.
Der *Zahlenstrahl* ist ein *eindimensionales* Objekt, da es nur möglich ist sich nach Vorne oder Hinten auf dem *Zahlenstrahl* zu bewegen. Andere Objekte dieser Art sind *Geraden* und *Halbgeraden* im Allgemeinen. Außerdem existieren noch *Strecken*, welche im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden.

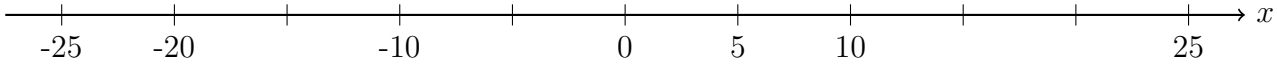
3.1.2 Übungsaufgaben zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1: *Trage die fehlenden Zahlen ein.*

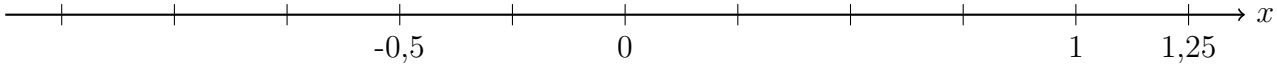
a)



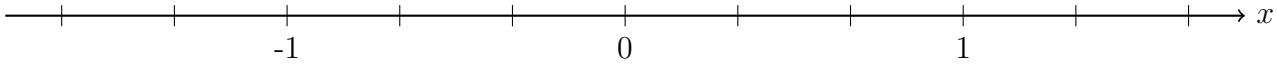
b)



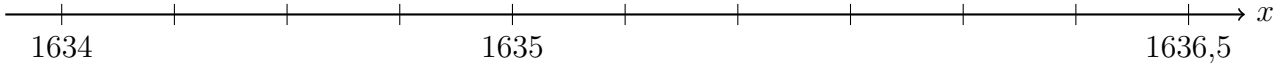
c)



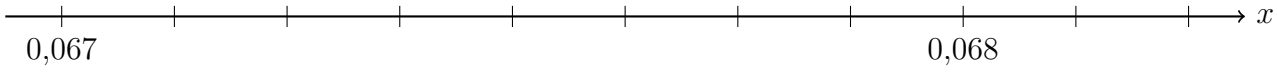
d)



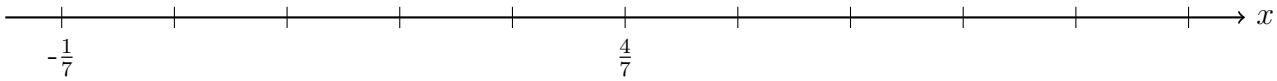
e)



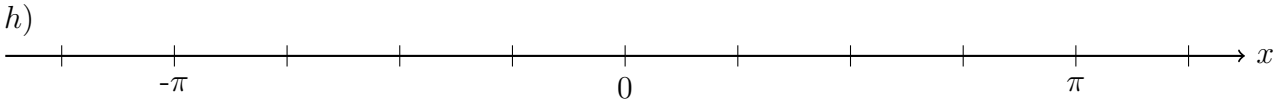
f)



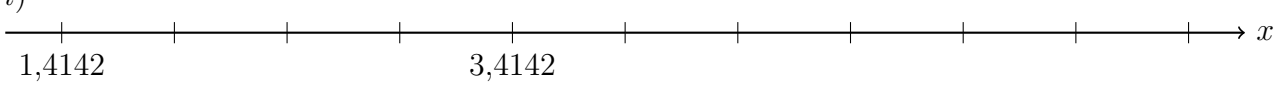
g)



h)



i)

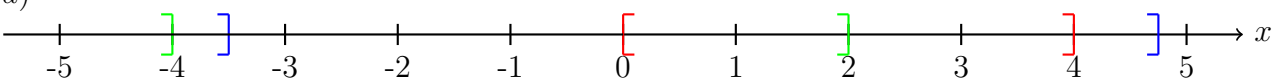


Aufgabe 2: *Trage die Intervalle auf einen Zahlenstrahl ein.*

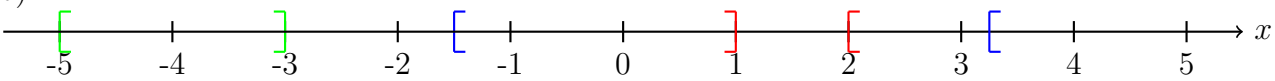
a) $[0,5]$	*b)* $[-1,3]$	*c)* $\left[-\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right]$
d) $]3,6[$	*e)* $]-4,-2[$	*f)* $\left]-\frac{8}{5},\frac{17}{8}\right[$
g) $[2,4[$	*h)* $[-4,1[$	*i)* $\left[\frac{1}{4},\frac{15}{4}\right[$
j) $]1,7]$	*k)* $]-6,6]$	*l)* $\left]-\frac{17}{5},-\frac{1}{2}\right]$

Aufgabe 3: *Schreibe die eingezeichneten Intervalle der Zahlenstrahl auf.*

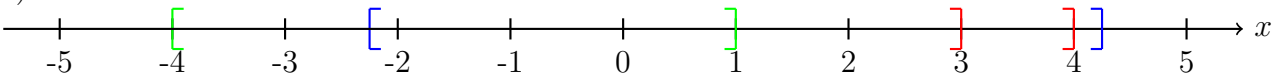
a)



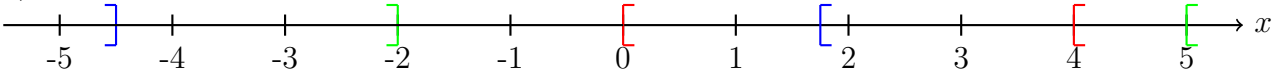
b)



c)



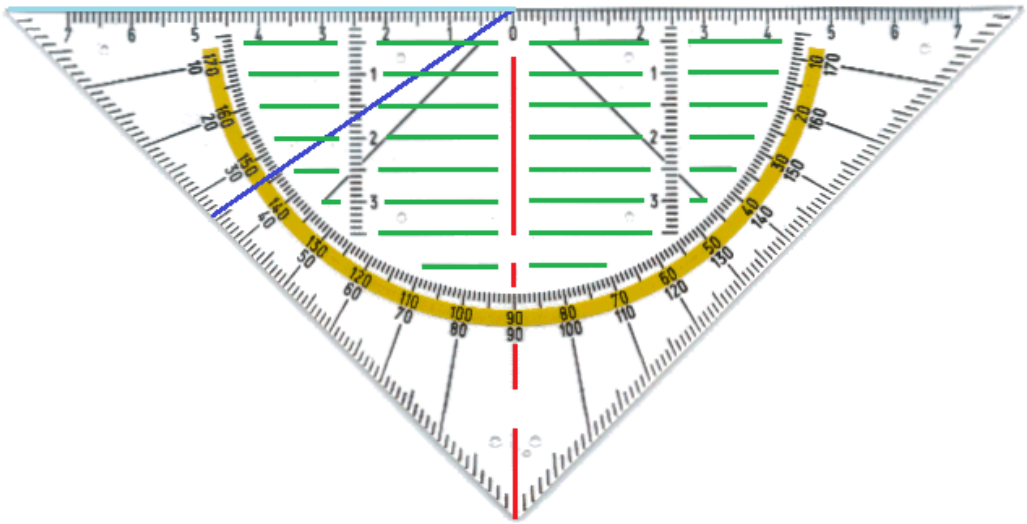
d)



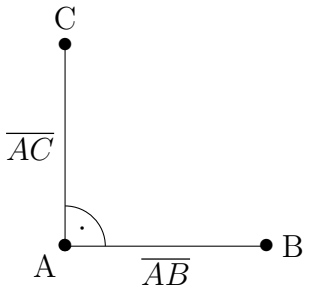
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.17) Lösungen zum Zahlenstrahl.

3.2 Winkel

Als wichtigster Bestandteil der *Geometrie* in der Schule kann das Geodreieck angesehen werden und sollte in keinem naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht fehlen.



In der Abbildung mit dem Geodreieck wurden zusätzliche farbige *Strecken* eingefügt, an denen die Funktionsweise des Geodreiecks erklärt werden kann. *Strecken* sind im Allgemeinen gerade Linien mit einem Anfangs- und einem Endpunkt. Eine *Strecke* zwischen den *Punkten* A und B wird durch $\overline{AB}$ verschriftlicht. Die wohl bedeutendste *Strecke* auf dem Geodreieck ist die Nulllinie, welche auch Mittellinie oder Orthogonalitätslinie genannt wird. Diese *Strecke* ist rot markiert. Wenn das Geodreieck so auf eine gezeichnete Linie gelegt wird, dass die Linie von der Nulllinie verdeckt wird, dann kann ein sogenannter *rechter Winkel* zu dieser Linie eingezeichnet werden. Ein solcher *rechter Winkel* zwischen den zwei *Strecken* $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ würde wie folgt aussehen:

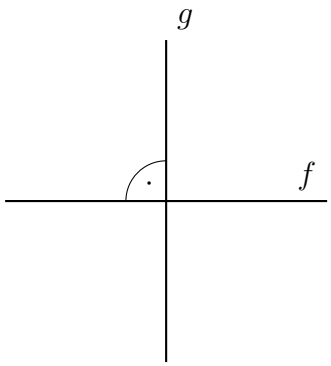


Ein *Winkel* zwischen zwei *Strecken* wird durch einen Bogen beschrieben und der Wert in ihm eingetragen. Dabei stellt der *rechte Winkel* aufgrund seiner Relevanz für die Mathematik und Naturwissenschaften eine Besonderheit da, denn statt den Wert 90°, wie auf auf dem Geodreieck abzulesen ist, einzutragen, wird stattdessen als abkürzende Schreibweise ein *Punkt* in den *Kreisbogen* gesetzt. *Winkel* werden in der *Geometrie* nahezu immer in der *Einheit Grad* ° gemessen, wobei die Zahl für einen *rechten Winkel* in der Geschichte irgendwann willkürlich festgelegt wurde. Es gibt noch andere *Einheiten* für die Winkelmessung, die sich bis heute nicht in der *Geometrie* durchgesetzt haben. Im Kapitel „Funktionen“ wird noch eine Umrechnung zu einer anderen *Einheit* vorgenommen, da es sich im dortigen Zusammenhang lohnt eine neue

Einheit für die *Winkel* einzuführen. Die mathematische Schreibweise eines *Winkels* am oben gezeigten Beispiels ist wie folgt definiert:

$$\measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = 90^\circ \tag{3.4}$$

und wird gelesen als „Der *Winkel* zwischen der *Strecke* $\overline{AB}$ und der *Strecke* $\overline{AC}$ ist gleich 90°.“ *Winkel* können nicht nur zwischen *Strecken* zu finden sein sondern auch zwischen *Geraden*. *Geraden* sind Linien ohne Anfangs- und Endpunkt. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ werden auch *Schenkel* des *Winkels* genannt.

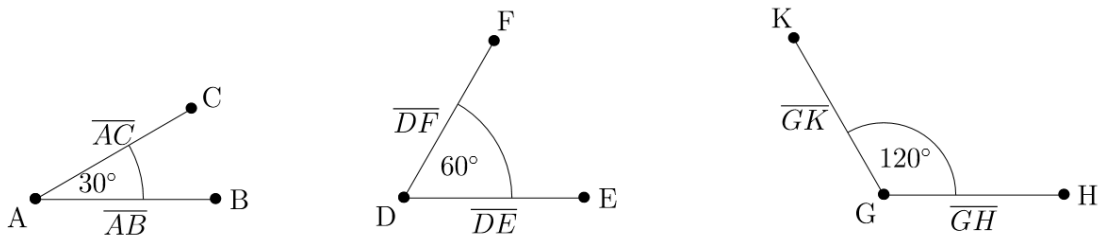


Die Abbildung zeigt einen *rechten Winkel* zwischen der *Gerade* f und g: $\measuredangle(f, g) = 90^\circ$. Die Eigenschaft, dass *Strecken* und/oder *Geraden* einen *rechten Winkel* zu einander haben, wird *Orthogonalität* genannt. Es wird davon gesprochen, dass zum Beispiel zwei *Geraden orthogonal* zu einander sind (oft wird auch der Begriff „*senkrecht*“ verwendet). Abkürzend wird die *Orthogonalität* der *Strecken* und *Geraden* in den Beispielen so ausgedrückt:

$$\begin{gathered}\overline{AB} \perp \overline{AC} \\ f \perp g\end{gathered} \tag{3.5}$$

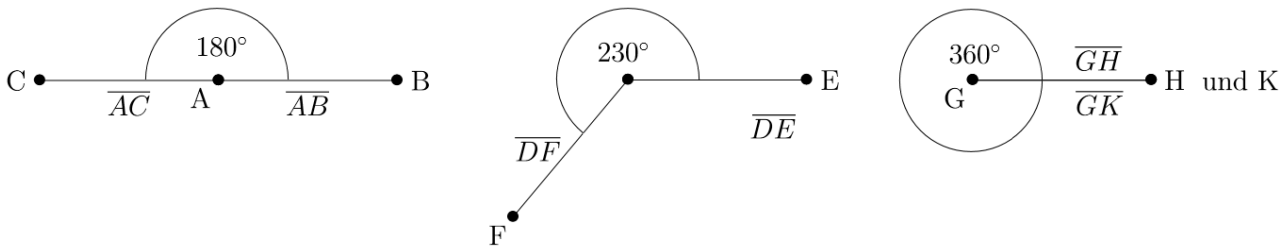
Wie das Geodreieck schon vermuten lässt, gibt es nicht nur *rechte Winkel* sondern sechs andere Einordnungen in Gruppen von *Winkeln*. Dazu ist es unerlässlich *Winkel* messen zu können. Hierfür wird das Geodreieck so positioniert, dass sich der *Schnittpunkt* der Linien direkt auf der Null befindet. Dann muss die erste Linie so ausgerichtet werden, dass sie genau auf der hellblauen Linie liegen würde und die zweite Linie sich unter dem Geodreieck befindet. Diese zweite Linie trifft dann auf eine Gradzahlmarkierung, welche dann den Wert der Winkelgröße angibt. In der Abbildung mit dem Geodreieck sei die dunkelblaue Linie die zweite Linie. Sie trifft die Winkelmarkung (beim gelben Bogen) bei 34° und somit hat der *Winkel* zwischen den blauen Linien auch genau diese Größe. Wenn der *Winkel* allerdings größer als 90° ist, dann müssen die anderen Zahlen (in diesem Fall die gelb unterlegten) verwendet werden.

Winkel werden in verschiedene Gruppen eingeordnet. Die ersten drei Arten von *Winkel* können anhand der folgenden drei Beispiele dargestellt werden:
Dabei wird bei einem *Winkel* zwischen 0° und 45° von einem *überspitzen Winkel* gesprochen ($0^\circ < \measuredangle(\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)) < 45^\circ$). Bei *Winkeln* ab 45° bis 90° ist die Rede von einem *spitzen Winkel*



($45° \leq \measuredangle((\overline{DE}, \overline{DF})) < 90°$). Während ein *Winkel* zwischen 90° und 180° *stumpfer Winkel* genannt wird ($90° < \measuredangle((\overline{GH}, \overline{GK})) < 180°$).

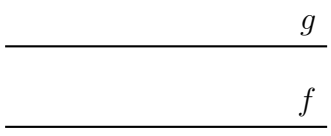
Auch die *Winkel* ab 180° können in drei Gruppen einsortiert werden.



Wobei ein *Winkel* von 180° *gestreckter Winkel* genannt wird ($\measuredangle((\overline{AB}, \overline{AC})) = 180°$). Bei *Winkeln* zwischen 180° und 360° ist die Rede von einem *überstumpfen Winkel* ($180° < \measuredangle((\overline{DE}, \overline{DF})) < 360°$). Abschließend existiert noch ein *Winkel* von 360°, welcher als *voller Winkel* bezeichnet wird ($\measuredangle((\overline{GH}, \overline{GK})) = 360°$).

Überstumpfe Winkel können mit einem Geodreieck nicht direkt gemessen werden, allerdings kann der andere nicht gesucht *Winkel* abgelesen werden. Danach bedarf ein nur einer kleinen Rechnung, um den Wert für den *überstumpfen Winkel* zu erhalten. Dabei wird der abgelesene Wert des nicht gesuchten *Winkels* von einem *vollen Winkel* 360° *subtrahiert*.

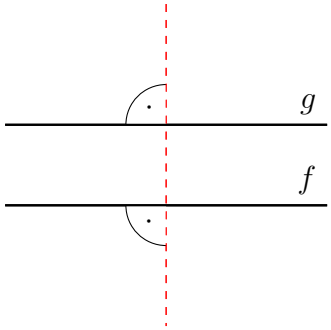
Allerdings gibt es auch *Strecken* und *Geraden*, welche sich nicht schneiden, sodass eine Winkelbestimmung entweder schwer oder gar unmöglich wird. Wenn zwei Linien immer den gleichen *Abstand* zu einander haben, dann wird dies *Parallelität* der Linien genannt. Mit den grünen Linien des Geodreiecks kann dies getestet werden.



Die beiden *Geraden* f und g sind *parallel* zu einander, da sie immer den gleichen *Abstand* zu einander haben. Mathematische wird dies ausgedrückt durch:

$$f \parallel g \tag{3.6}$$

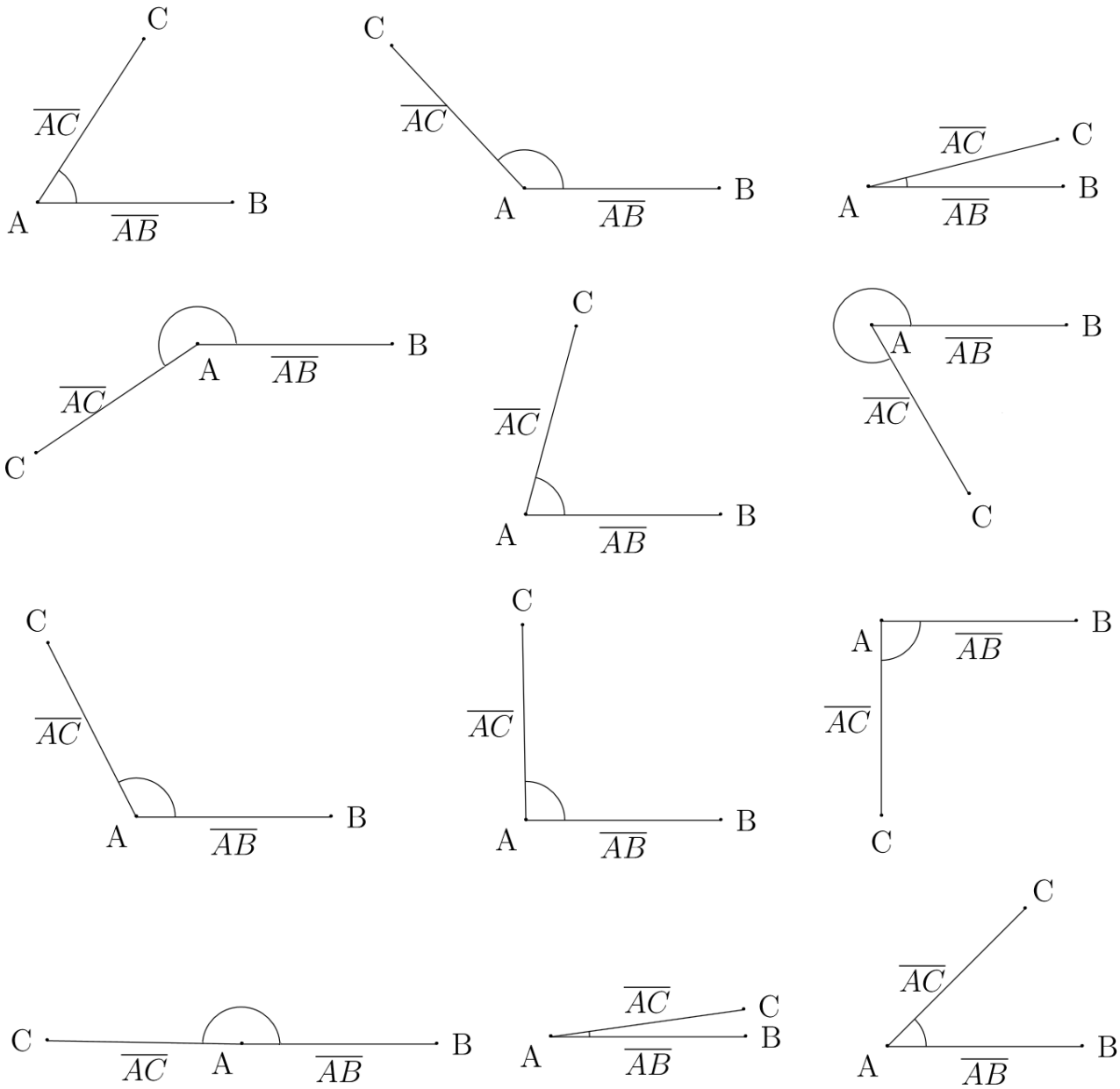
Die *Parallelität* zwischen zwei Linien kann auch überprüft werden, in dem eine *orthogonale* Linie zur ersten Linie gezogen wird. Wenn diese auch wieder *orthogonal* zur zweiten Linie ist, ist dies ebenso ein Anzeichen für die *Parallelität*.



Im Großen und Ganzen können viele wichtige Eigenschaften der geometrischen Körper durch *Winkel* und durch *Parallelität* sowie *Orthogonalität* beschrieben werden, sodass diese Begriffe von jedem Schüler verinnerlicht sein sollten.

3.2.1 Übungsaufgaben zu Winkeln

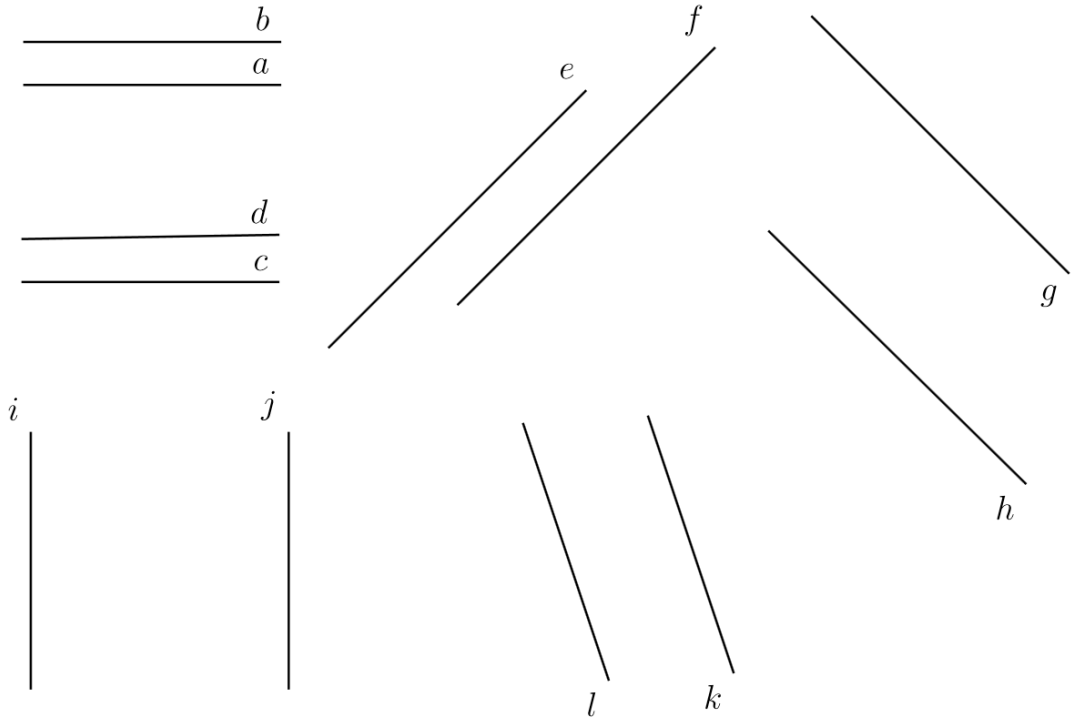
Aufgabe 1: *Bestimme die Winkel und ordne sie den Kategorien zu.*



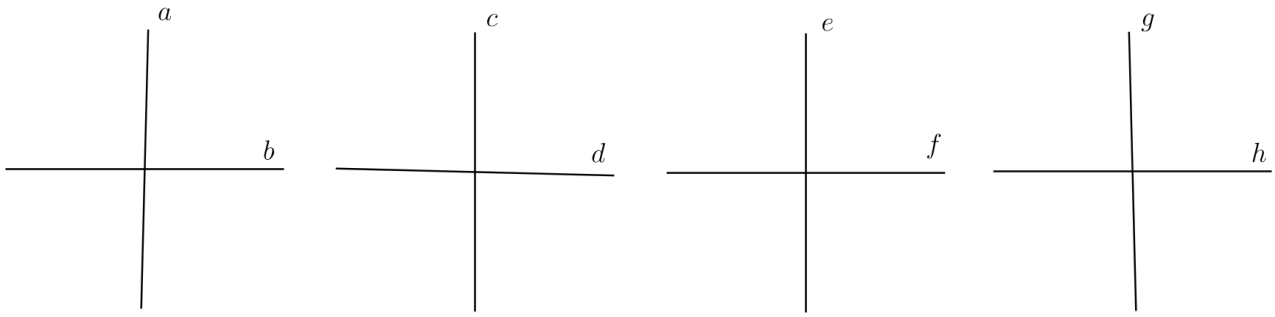
Aufgabe 2: *Zeichne die folgenden Winkel.*

148°	27°	59°	90°	210°	180°	11°	70°
30°	60°	120°	330°	267°	240°	94°	5°

Aufgabe 3: *Teste auf Parallelität.*



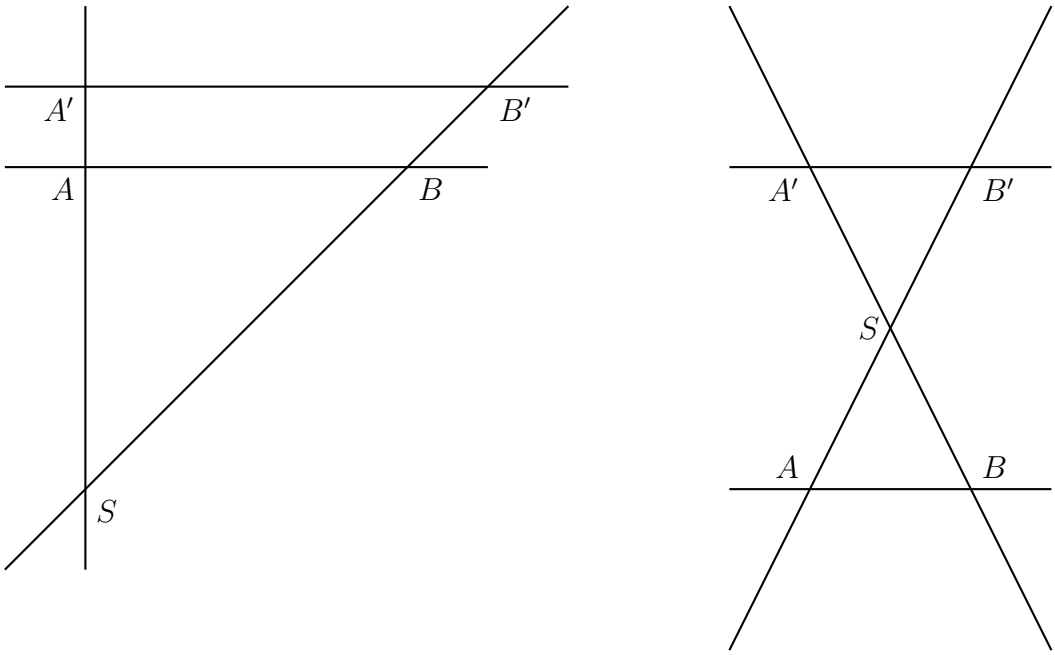
Aufgabe 4: *Teste auf Orthogonalität.*



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.18) Lösungen zu Winkeln.

3.3 Strahlensatz

Der *Strahlensatz* wird gerne verwendet um *Streckenlängen* zu bestimmen. Dazu müssen zwei *Geraden parallel* zu einander sein und zwei weitere *Geraden* sich in einem *Punkt* schneiden.



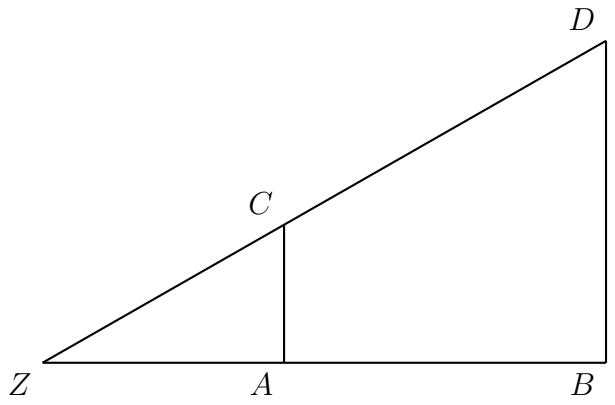
Die Abbildung veranschaulicht diese Bedingung auf die zwei möglichen Arten. Deutlich zu erkennen ist, dass dabei die *parallelen Geraden* auf einer Seite des *Schnittpunktes* oder auf unterschiedlichen Seiten befinden dürfen. Hierbei können Verhältnisse zwischen den jeweiligen *Strecken* aufgestellt werden. So verhält sich $\overline{AB}$ zu $\overline{A'B'}$ wie $\overline{AS}$ zu $\overline{A'S}$. Es gibt noch weitere solche Beziehungen, darunter auch diese:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} &= \frac{\overline{A'S}}{\overline{B'S}} \\ \frac{\overline{BS}}{\overline{B'S}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}} \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}} \quad . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Der *Strahlensatz* wird nach der Behandlung des *Dreiecks* deutlich an Bedeutung verlieren, deswegen soll er auch nur eine Randnotiz dieses Buches sein.

3.3.1 Übungsaufgaben zum Strahlensatz

Aufgabe 1: *Berechne mit dem Strahlensatz für die folgenden Werte die jeweils fehlenden Strecken.*

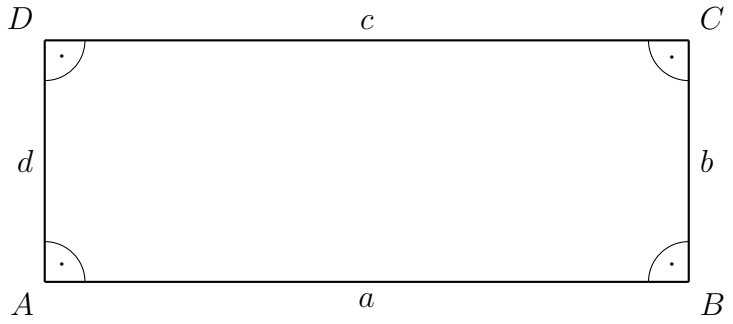


a)	$\overline{ZA} = 5$;	$\overline{ZB} = 9$;	$\overline{AB} =$;	$\overline{DB} = 4$;	$\overline{AC} =$
b)	$\overline{ZD} = 12$;	$\overline{ZC} = 8$;	$\overline{DC} =$;	$\overline{DB} =$;	$\overline{AC} = 3$
c)	$\overline{ZA} =$;	$\overline{ZB} = 2$;	$\overline{AB} = \frac{8}{11}$;	$\overline{DB} = 7$;	$\overline{AC} =$
d)	$\overline{ZA} = 5$;	$\overline{ZB} = 8$;	$\overline{AB} =$;	$\overline{ZD} =$;	$\overline{ZC} = 4$; $\overline{DC} =$
e)	$\overline{ZA} =$;	$\overline{ZB} = \frac{3}{4}$;	$\overline{AB} =$	$\overline{DB} = \frac{1}{3}$;	$\overline{AC} = \frac{7}{5}$
f)	$\overline{ZD} = \pi$;	$\overline{ZC} = \sqrt{2}$;	$\overline{DC} =$;	$\overline{DB} = e$;	$\overline{AC} =$;

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.19) Lösungen zum Strahlensatz.

3.4 Rechteck

Nachdem *Winkel* anhand von *Strecken* und *Geraden* eingeführt wurden und somit der erste Kontakt mit einer *Ebene*, also einer Ausdehnung in zwei *Dimensionen*, werden nun weitere wichtige Größen für zweidimensionale Körper am *Rechteck* eingeführt. Ein *Rechteck* ist eine *geometrisches* Objekt, welches aus vier *rechten Winkel* besteht. Somit hat ein *Rechteck* insgesamt eine *Winkelsumme* von 360°. Außerdem besitzt jedes *Rechteck* vier *Seiten*. Dabei sind die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander.



Die Abbildung zeigt, wie die *Seiten* und die *Eckpunkte* eines *Rechtecks* benannt werden. Es gilt, wie bereits erwähnt, dass $\overline{AB} = a = c = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = b = d = \overline{DA}$. Die *Strecken* $\overline{DB}$ und $\overline{AC}$ werden *Diagonalen* genannt.

Die bedeutendste *zweidimensionale Größe* von zweidimensionalen *geometrischen* Objekten ist der sogenannte *Flächeninhalt A*. Dieser gibt an wie groß die *Fläche* ist, welche durch die *Seiten* eingerahmt wurde. Dabei ist eine *Fläche* immer vorhanden, wenn zwei Richtungen, also *Dimensionen*, betrachtet werden. Ein Blatt Papier, ein Tisch und auch die Tafel bilden jeweils eine *Fläche*. Die *Fläche* wird in Quadratmeter $1m^2$ gemessen. Dabei ist ein Quadratmeter eine *Fläche* die von einem *Rechteck* eingeschlossen wird von einem Meter $a = 1m$ mal einem Meter $b = 1m$: $1m \cdot 1m = 1m^2$. Somit ist der *Flächeninhalt A* gegeben durch das *Produkt* der beiden *Seiten* a und b.

$$A = a \cdot b \tag{3.8}$$

Die zweite wichtige *Größe* ist der *Umfang U*, welcher den *Rand* der *Fläche* markiert und selbst eine *eindimensionale Größe* ist. Der *Umfang U* ist die *Summe* aller *Strecken*, somit ergibt sich für ein *Rechteck*:

$$U = 2a + 2b \tag{3.9}$$

3.4.1 Übungsaufgaben zu Rechtecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken.*

a) $a = 3cm$ und $b = 6cm$

b) $a = 2cm$ und $b = 7cm$

c) $a = 9cm$ und $b = 12cm$

d) $a = 4cm$ und $b = 17cm$

e) $a = 27cm$ und $b = 3cm$

f) $a = 1,5cm$ und $b = 60cm$

g) $a = 0,5cm$ und $b = 2cm$

h) $a = \frac{3}{4}cm$ und $b = \frac{6}{5}cm$

i) $a = \frac{5}{6}cm$ und $b = \frac{10}{7}cm$

j) $a = \frac{3}{10}cm$ und $b = \frac{11}{12}cm$

k) $a = \sqrt{2}cm$ und $b = \sqrt{3}cm$

l) $a = \ln 5cm$ und $b = \lg 12cm$

m) $a = 2^3cm$ und $b = 4^{-1}cm$

n) $a = ecm$ und $b = \pi cm$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken. Gib das Ergebnis in der Einheit der längeren Seite an. Runde dabei das Ergebnis bis auf drei Nachkommastellen.*

a) $a = 3dm$ und $b = 6cm$

b) $a = \frac{1}{2}dm$ und $b = 90mm$

c) $a = 4,2m$ und $b = 430cm$

d) $a = 2mm$ und $b = 2cm$

e) $a = \frac{1}{9}cm$ und $b = 27dm$

f) $a = 1,125km$ und $b = 8000m$

g) $a = \frac{3}{4}mm$ und $b = \frac{5}{7}dm$

h) $a = \frac{4}{5}m$ und $b = \frac{11}{2}cm$

i) $a = \sqrt{111}cm$ und $b = 120mm$

j) $a = \sqrt{83}mm$ und $b = \frac{11}{13}cm$

Aufgabe 3: *Bestimme Umfang U, Flächeninhalt A, Länge a und Breite b der jeweiligen Rechtecke.*

a) $A = 12cm^2$ und $b = 3cm$

b) $U = 36cm$ und $a = 6cm$

c) $a = 11cm$ und $b = 5dm$

d) $A = 156cm^2$ und $b = 1,3dm$

e) $U = 15dm$ und $b = \frac{1}{16}m$

f) $A = \frac{72}{45}cm^2$ und $a = \frac{80}{9}mm$

g) $U = 56dm$ und $A = \frac{3}{4}m^2$

h) $A = \frac{4}{17}mm^2$ und $U = \frac{83}{11}mm$

Aufgabe 4: *Ein rechteckiger Kuchen mit der Länge a und der Breite b soll zur Hälfte in Stücke mit Rand und zur Hälfte in Stücke ohne Rand zu teilen. Berechne alle möglichen Schnittkombinaten die möglich sind.*

Aufgabe 5: *Berechne die fehlenden Größen für ein Rechteck.*

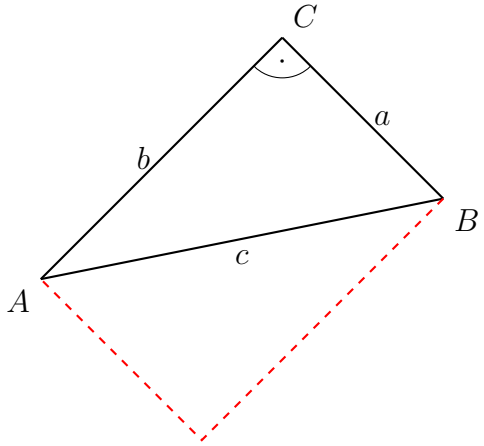
	1	2	3	4	5	6
Seite a	4		5		$0,5$	
Seite b	5	6		2		$\frac{1}{4}$
Flächeninhalt A		42			13	
Umfang U			32	18		3

Aufgabe 6: *Ein Rechteck hat den Umfang von $24m$ und eine Seite soll $4m$ lang sein. Wie groß ist der Flächeninhalt A des Rechtecks?*

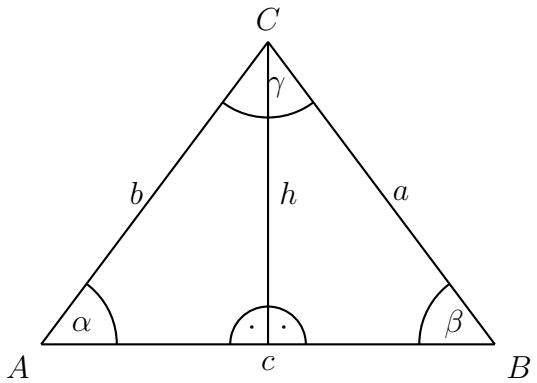
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.20) Lösungen zu Rechtecken.

3.5 Dreieck

Wenn ein *Rechteck* entlang einer *Diagonalen* in zwei Objekte zerschnitten wird, so ergeben sich daraus zwei *Dreiecke* mit jeweils einem *rechten Winkel* - *rechtwinklige Dreiecke*. *Dreiecke* sind mit *Abstand* die wichtigste *geometrische* Konstruktion der Mathematik, denn nicht zu Letzt lässt sich jede eckige *geometrische* Form in *Dreiecke* unterteilen und sogar die Eigenschaften des *Kreises* an ihnen erklären. Das *rechtwinklige Dreieck* ist hierbei das bedeutendste *Dreieck*.



Die Abbildung zeigt die Benennung der *Größen* eines *rechtwinkligen Dreieckes*. Da das *Dreieck* aus dem Zerschneiden eines *Rechtecks* in zwei Teile gewonnen wurde, ist die *Winkelsumme* eines *Dreieckes* gegeben als 180°. Allerdings müssen nicht alle *Dreiecke* einen *rechten Winkel* besitzen, sodass auch die *Winkel* benannt werden müssen.

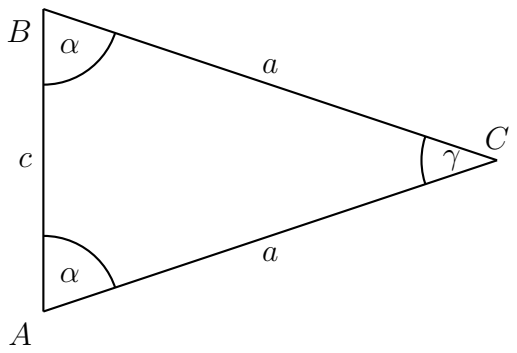


Die Abbildung zeigt, dass die Winkel mit griechischen Buchstaben benannt werden - das vollständige griechische Alphabet sowie andere können im Anhang gefunden werden (16.1). Außerdem ist zu erkennen, dass ein beliebiges *Dreieck* immer in zwei *rechtwinklige Dreiecke* unterteilt werden können. Dazu bedarf es der Konstruktion der sogenannten *Höhe* h des *Dreiecks*, wobei dann in diesem Fall die *Seite* c die *Grundseite* g wäre. Die *Höhe* h muss immer *orthogonal* zur *Grundseite* g sein und im *Punkt* enden, welcher der *Grundseite* g gegenüber liegt (in der Abbildung wäre dies der Punkt C).
Aus der Zerlegung des *Rechtecks* in zwei *Dreiecke* ergibt sich, dass der *Flächeninhalt* A eines *Dreiecks* halb so groß sein muss wie ein *Rechteck* mit gleichen Maßen. Die Bedingung zur Berechnung des *Flächeninhalts* A beim *Rechteck* waren dessen Eigenschaften, dass die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und alle *Winkel rechte Winkel* sein müssen. Somit muss die Hälfte

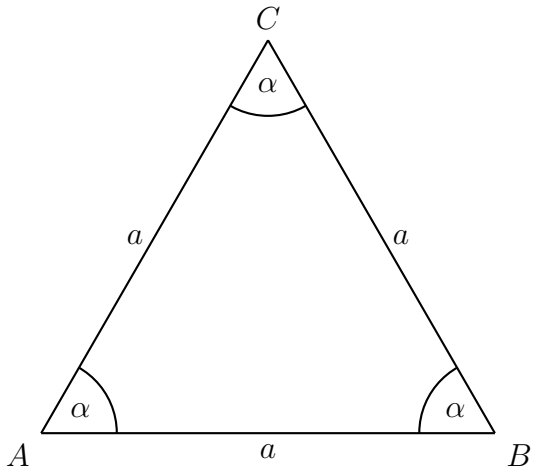
des *Produkts* der *Grundseite* g mit der Höhe h den *Flächeninhalt* A des *Dreiecks* widerspiegeln, da die *Grundseite* g und die *Höhe* h ein *Rechteck* aufspannen. Der *Umfang* U ist wieder gegeben durch die *Summe* aller *Strecken*, die die *Fläche* umranden.

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} \\ U &= a + b + c \end{aligned} \tag{3.10}$$

Neben dem *rechtwinkligen Dreieck* gibt es noch weitere spezielle *Dreiecke*. Darunter fällt das sogenannte *gleichschenklige Dreieck*, bei dem zwei *Seiten* gleich lang sind. Nicht nur die *Schenkellängen* zum *Winkel* γ sind gleich groß, sondern auch die anderen beiden *Winkel*.



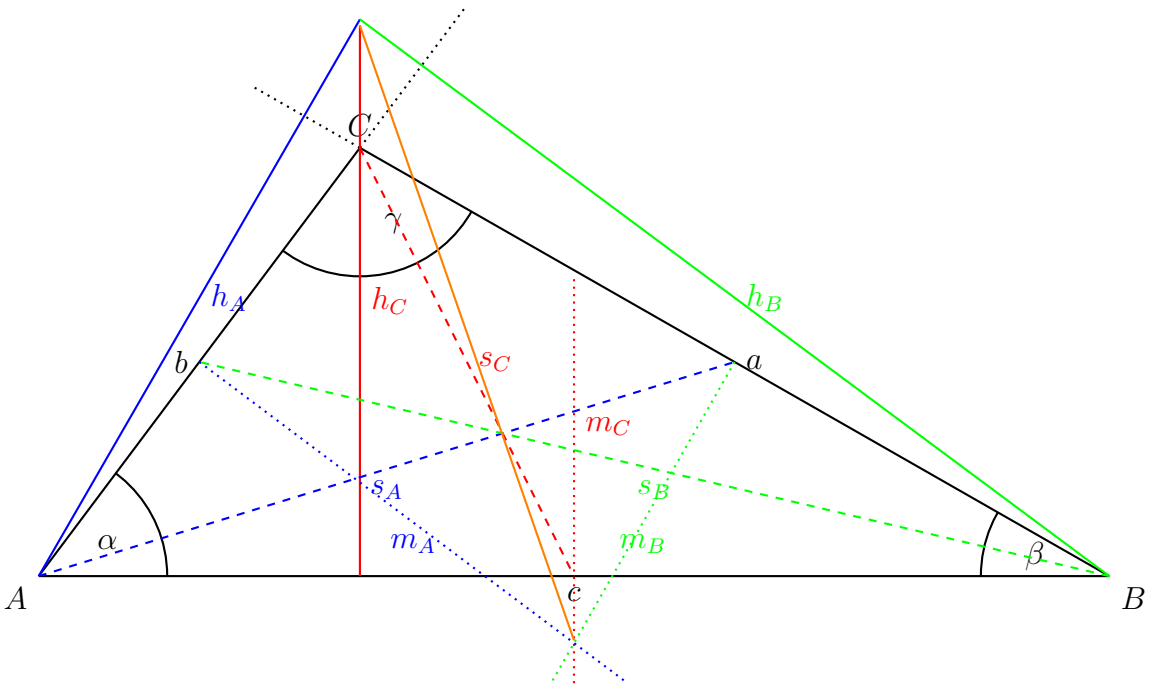
Das Geodreieck ist ein solches *gleichschenkliges Dreieck*. Durch die Bestimmung eines *Winkels* sind alle *Winkel* bekannt - Diese Eigenschaft kann in vielen Aufgaben ausgenutzt werden.
Des Weiteren gibt es noch den Spezialfall, dass alle *Seiten* des *Dreiecks* gleich lang und alle *Winkel* gleich groß sind - das *gleichseitige Dreieck*. Damit ergibt sich automatisch, dass jeder *Winkel* exakt 60° messen muss.



Nachdem das *Dreieck* und dessen spezielle Formen eingeführt wurden, werden im Folgenden weitere *Größen* eingeführt, welche manchmal Aufgaben vereinfachen oder gar erst lösbar machen.

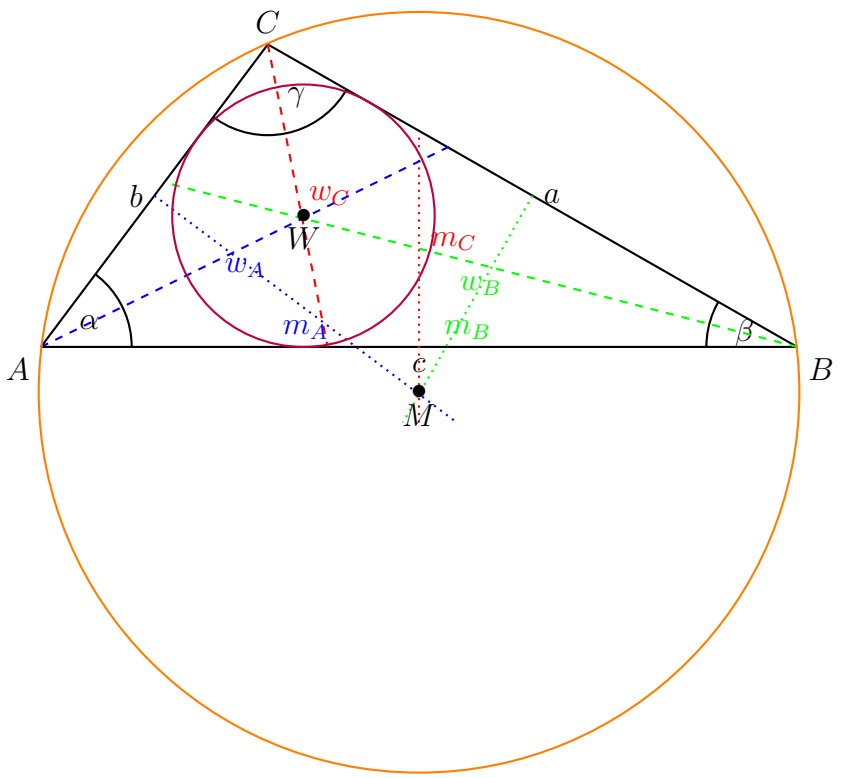
Eine solche *Größe* ist der *Schwerpunkt*. Dieser kann zeichnerisch ermittelt werden, indem die *Seitenhalbierenden* gefunden werden. Dabei wird die Mitte einer *Seite* mit dem gegenüberliegenden *Punkt* verbunden. Der *Schnittpunkt* der *Seitenhalbierenden* ist der *Schwerpunkt* S.

Durch die Konstruktion einer *Orthogonalen* in der Mitte einer jeden Seite ergeben sich die sogenannten *Mittelsenkrechten*. Auch sie haben einen *Schnittpunkt*, welcher auch *Mittelpunkt* des *Umkreises M* genannt wird. An diesem Punkt wäre es möglich einen *Kreis* zu ziehen, sodass alle *Eckpunkte* des *Dreiecks* auf dem *Kreis* liegen würden.
Eine sogenannte *Winkelhalbierende* kann, wie der Name es schon erahnen lässt, durch die Halbierung des *Winkels* konstruiert werden. Der *Schnittpunkt* der *Winkelhalbierenden* wird *Mittelpunkt* des *Innenkreises W* genannt und dient zur Konstruktion eines *Kreis*, der jede *Seite* berührt aber nicht schneidet.



In der Abbildung wurden alle *Höhen h* als solide, alle *Seitenhalbierenden s* als gestrichelte und alle *Mittelsenkrechten m* als gepunktete Linien eingezeichnet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt A* ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt B* ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt C* ausgehen rot gehalten. Es fällt auf, dass der *Schnittpunkt* der *Höhen* sowie der *Schnittpunkt Mittelsenkrechten* außerhalb des *Dreiecks* liegen. Dies rührt daher, dass ein *Winkel* größer als 90° ist.
Die *Schnittpunkte* der *Winkelhalbierenden*, der *Seitenhalbierenden* und der *Höhen* liegen auf einer *Geraden*, der sogenannten *Euler'schen Gerade*, welche in der Abbildung orange eingezeichnet ist. Dabei ist das Streckenverhältnis immer das gleiche. Die *Strecke* $\overline{HS}$ ist dabei immer doppelt so lang wie die *Strecke* $\overline{SM}$

Zur Veranschaulichung des *Innen-* und *Umkreises* dient folgende Abbildung:

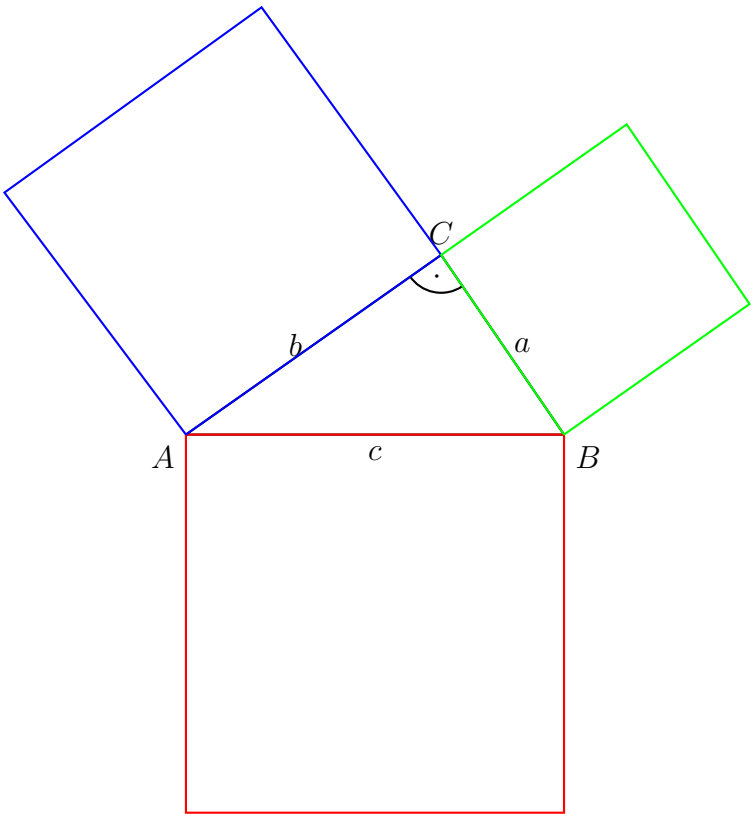


In der Abbildung sind die *Winkelhalbierenden* w gestrichelt und die *Mittelsenkrechten* m gepunktet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt* A ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt* B ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt* C ausgehen rot gehalten. Der *Innenkreis* ist in einem dunklen violett gehalten und hat seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* W, während der *Umkreis* ist in orange gezeichnet wurde und seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* M hat.

Nachdem nun die Konstruktion von verschiedenen wichtigen *Punkten* und *Strecken* beziehungsweise *Geraden* erläutert wurde, soll das *rechtwinklige Dreieck* genauer betrachtet werden. Zu nächst soll der *Satz des Pythagoras* betrachtet werden, welcher wohl der berühmteste *Satz* der Mathematik ist. Ein *Satz* in der Mathematik ist eine bewiesene *Gleichung*, die bis auf in sehr speziellen Ausnahmefällen immer ihre Gültigkeit besitzt.

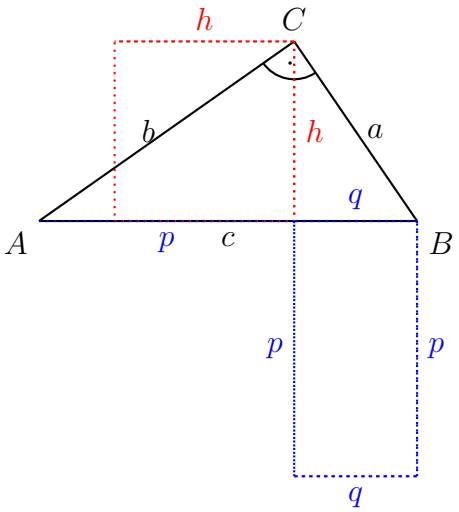
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3.11}$$

Wie das a^2, b^2 und c^2 schon suggerieren, werden hierbei *Flächeninhalte* von *Rechtecken* mit den gleichen *Seitenlängen* (sogenannte *Quadrate*), die von den jeweiligen *Seiten* des *Dreiecks* aufgespannt werden, ins Verhältnis gebracht.



Die Abbildung zeigt deutlich die verschieden *Flächen* der *Quadrate*. Dabei gilt, dass der *Flächeninhalt*, der am größten ist und von der längsten *Seite* c aufgespannt wird, genau so groß ist wie die *Summe* der beiden anderen *Flächen*. Die längste *Seite* eines *rechtwinkligen Dreiecks* wird *Hypotenuse* genannt und befindet sich immer gegenüber vom *rechten Winkel*. Die beiden anderen *Seiten* heißen *Katheten* und werden vom Kapitel „Trigonometrie“ detaillierter unterschieden und untersucht.

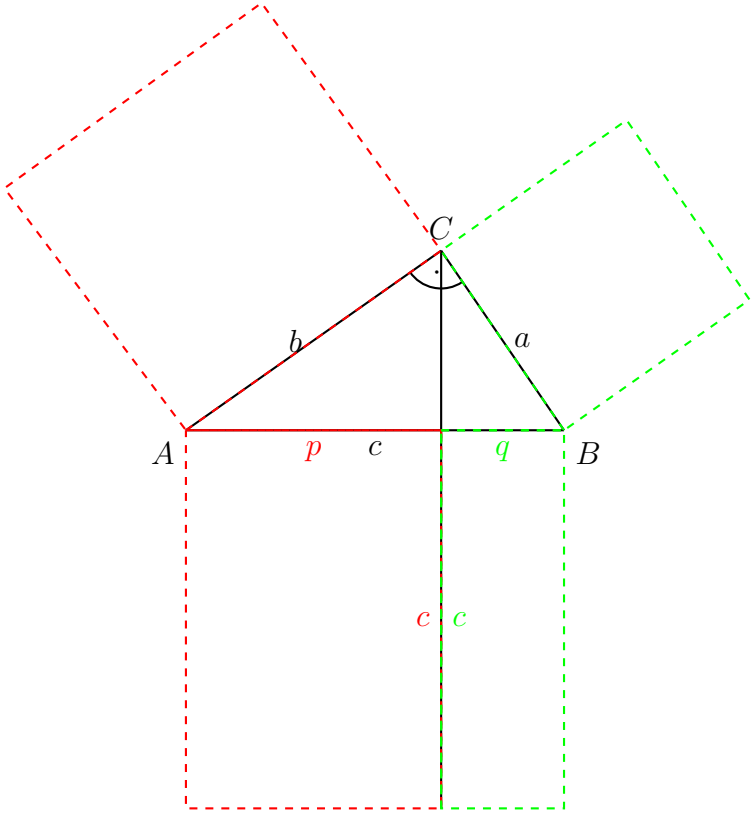
Neben dem *Satz das Pythagoras* existieren noch weitere *Sätze*. Einer von ihnen ist der sogenannte *Höhensatz von Euklid*.



Die Abbildung zeigt, dass die *Flächeninhalte* aus dem *Quadrat*, welches durch die *Höhe* h mit sich selbst aufgespannt wird, mit dem *Rechteck* aus der unterteilten *Hypotenuse* aus p und q in Verbindung gebracht werden. Es gilt:

$$h^2 = pq \tag{3.12}$$

Zu guter Letzt wird noch auf den *Kathetensatz* hingewiesen, welcher die *Rechtecke* aus den Teilstücken der *Hypotenuse* mit der *Hypotenuse* und jeweiligen *Kathetenquadraten* in Verbindung setzt.



Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= cq \\ b^2 &= cp \end{aligned} \tag{3.13}$$

Es soll nochmals betont werden, dass das *Dreieck* eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Und auch grade in den Naturwissenschaften sind *Dreiecke* von fundamentaler Wichtigkeit. Im Kapitel „Trigonometrie“ werden die Eigenschaften des *Dreiecks* und Beziehungen von *Größen* des *Dreiecks* untereinander weiter beleuchtet bis sich daraus resultierendes Wissen nochmals vertieft wird im Kapitel „Funktionen“.

3.5.1 Übungsaufgaben zu Dreiecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von rechtwinkligen Dreiecken. (Benutze die vorgestellten Sätze!)*

$a)$	$g = 9cm$	und $a = 4cm$	$b)$	$g = 11cm$	und $a = 5cm$
$c)$	$a = 4cm$	und $b = 6cm$	$d)$	$g = 7cm$	und $b = 6cm$
$e)$	$p = 2,5cm$	und $q = 2cm$	$f)$	$c = 12cm$	und $q = 3cm$
$g)$	$a = \frac{1}{2}cm$	und $b = \frac{1}{3}cm$	$h)$	$c = \frac{7}{3}cm$	und $q = \frac{3}{4}cm$
$i)$	$p = \frac{4}{5}cm$	und $q = \frac{7}{4}cm$	$j)$	$h = \frac{11}{5}cm$	und $p = \frac{4}{3}cm$
$k)$	$q = \frac{9}{5}cm$	und $h = \frac{5}{3}cm$	$l)$	$c = 4\sqrt{2}cm$	und $p = \ln 5cm$
$m)$	$p = ecm$	und $q = \sqrt{3}cm$	$n)$	$c = 2\pi cm$	und $q = \sqrt{17}cm$

Aufgabe 2: *Du befindest dich mit deinem Geodreieck $20m$ weit weg von einem Turm und hältst das Geodreieck auf $1,5m$ Höhe vom Boden. Du schaust entlang der längsten Kante, sodass die Kante und die Spitze des Turms eine Linie bilden. Dabei ist die Kante die noch unten zeigt nun parallel zum Boden. Wie hoch ist der Turm?*

Aufgabe 3: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die Winkel.*

$a)$	$a = 3cm$;	$b = 4cm$	und $c = 5cm$
$b)$	$a = 5cm$;	$b = 5cm$	und $c = 7cm$
$c)$	$a = 6cm$;	$b = 4cm$	und $c = 8cm$
$d)$	$a = 4cm$;	$b = 7cm$	und $c = 9cm$
$e)$	$a = 7cm$;	$b = 5,5cm$	und $c = 8,7cm$
$f)$	$a = 3,4cm$;	$b = 4,6cm$	und $c = 7,1cm$

Aufgabe 4: *Konstruiere folgende rechtwinklige Dreiecke ($\gamma = 90°$) und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlenden Seite.*

a)	$b = 4cm$	und $c = 5cm$
b)	$a = 5cm$	und $c = 7cm$
c)	$a = 6cm$	und $c = 8cm$
d)	$a = 4cm$	und $c = 9cm$
e)	$a = 7cm$	und $b = 4cm$
f)	$a = 3cm$	und $b = 6cm$

Aufgabe 5: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seite.*

a)	$a = 7cm$;	$b = 6cm$	und $\gamma = 65°$
b)	$a = 4,5cm$;	$c = 5,7cm$	und $\beta = 34°$
c)	$c = 6,8cm$;	$b = 5,3cm$	und $\alpha = 84°$
d)	$a = 4,4cm$;	$b = 6,7cm$	und $\gamma = 72°$

Aufgabe 6: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seite.*

a)	$a = 5cm$;	$b = 4cm$	und $\alpha = 50°$
b)	$a = 5,2cm$;	$b = 5,8cm$	und $\beta = 40°$
c)	$a = 6cm$;	$b = 4cm$	und $\gamma = 75°$
d)	$a = 8,5cm$;	$b = 7cm$	und $\alpha = 68°$

Aufgabe 7: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seiten.*

a)	$a = 7cm$;	$\beta = 77°$	und $\gamma = 25°$
b)	$c = 4,5cm$;	$\alpha = 37°$	und $\beta = 86°$
c)	$b = 6,8cm$;	$\gamma = 72°$	und $\alpha = 54°$
d)	$a = 4,4cm$;	$\beta = 21°$	und $\gamma = 62°$

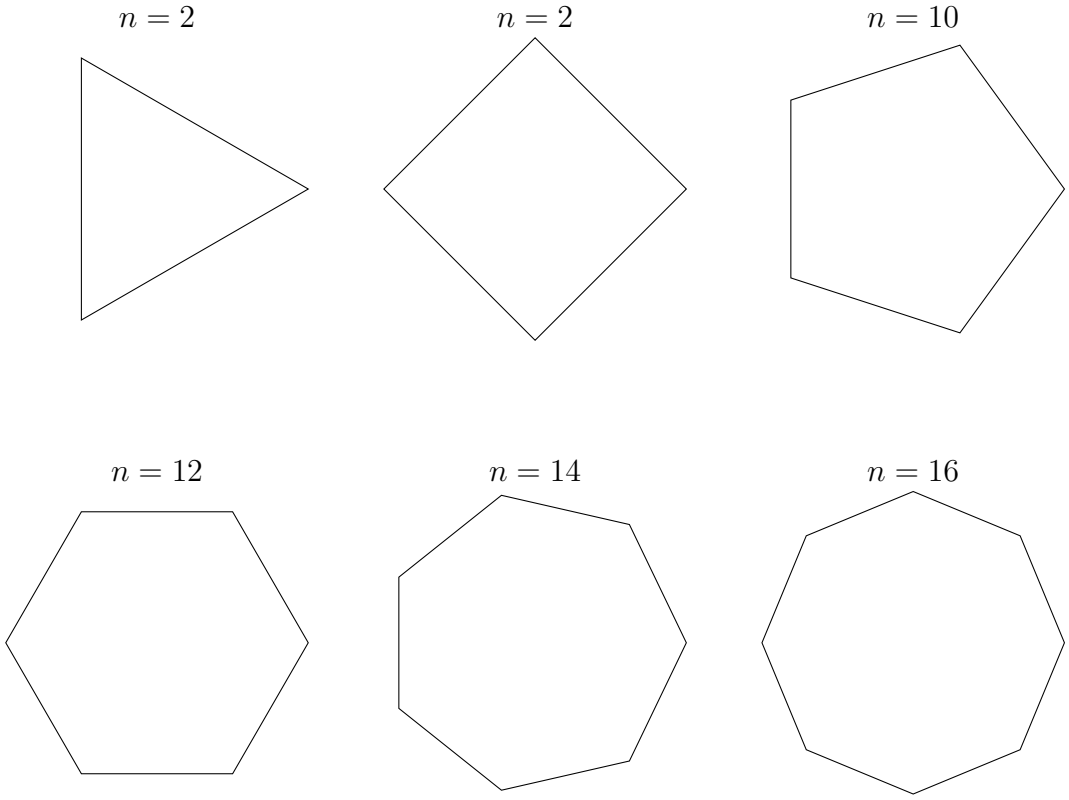
Aufgabe 8: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seiten.*

a)	$c = 6,2cm$;	$\alpha = 65°$	und $\gamma = 35°$
b)	$c = 4,9cm$;	$\gamma = 40°$	und $\beta = 75°$
c)	$b = 5,5cm$;	$\gamma = 70°$	und $\beta = 40°$
d)	$a = 4,4cm$;	$\beta = 30°$	und $\alpha = 90°$

Aufgabe 9: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlenden Größen.*

a)	$a = 6,3cm$;	$b = 5,2cm$	und $\alpha = 33°$
b)	$a = 4,1cm$;	$b = 5,4cm$	und $c = 6,2cm$
c)	$a = 6,6cm$;	$b = 5,3cm$	und $\gamma = 80°$
d)	$c = 7,9cm$;	$b = 6,7cm$	und $\alpha = 75°$
e)	$a = 6,8cm$;	$b = 8,7cm$	und $c = 10,2cm$
f)	$a = 4,4cm$;	$b = 3,7cm$	und $c = 5,2cm$

Aufgabe 10: *Unterteile die Figuren, sodass die jeweilig Figur nur noch aus rechtwinkligen Dreiecken besteht. Beachte die maximale Anzahl der Dreiecke n, die angegeben ist.*



Aufgabe 11: *Stelle die Gleichungen auf und bestimme alle Winkel des Dreiecks.*

a) Der Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β. Dabei gilt, dass der Winkel β genauso groß ist wie der Winkel γ.
b) Der Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β, der doppelt so groß ist wie der Winkel γ.
c) Der Winkel α ist halb so groß wie der Winkel β, der viermal größer ist als der Winkel γ.
d) Der Winkel α ist dreimal so groß wie der Winkel β, der dreimal kleiner ist als der Winkel γ.
e) Der Winkel α ist siebenmal so groß wie der Winkel β und der letzte Winkel des Dreiecks ist ein rechter Winkel.
f) Der Winkel α ist dreimal kleiner der Winkel β, der viermal kleiner ist als der Winkel γ.
g) Der Winkel α ist dreieinhalbmal größer der Winkel β, der dreiviertel kleiner ist als der Winkel γ.
h) Der Winkel α ist π-mal kleiner der Winkel β, der $\sqrt{2}$-mal größer ist als der Winkel γ.

Aufgabe 12: *Berechne die fehlenden Größen der Dreiecke ohne rechten Winkel.*

	1	2	3	4	5	6
a	5	4				$\frac{11}{2}$
b	7	6	5		$\frac{11}{3}$	
c		9		7	$\frac{22}{5}$	
h_a				6		
h_b				5		$\frac{17}{4}$
h_c	3		7		$\frac{7}{3}$	
A		16	42	28		$\frac{16}{3}$
U	18		18		$\frac{83}{7}$	$\frac{62}{5}$

Aufgabe 13: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig.* (keine Lösung!)

$a)$	$a = 4cm$;	$b = 6cm$	und $\alpha = 35°$
$b)$	$c = 6,7cm$;	$b = 4,8cm$	und $\beta = 78°$
$c)$	$a = 3cm$;	$b = 4cm$	und $\gamma = 130°$
$d)$	$a = 6,4cm$;	$b = 3,3cm$	und $c = 5,2cm$
$e)$	$c = 3,4cm$;	$b = 6,7cm$	und $\gamma = 100°$
$f)$	$a = 2,4cm$;	$c = 4,9cm$	und $\beta = 25°$
$g)$	$a = 4,8cm$;	$b = 5,3cm$	und $c = 7,2$
$h)$	$c = 5,1cm$;	$b = 2,9cm$	und $\beta = 71°$
$i)$	$c = 7,1cm$;	$\alpha = 60°$	und $\beta = 45°$
$j)$	$a = 5,8cm$;	$b = 4,5cm$	und $\beta = 90°$
$k)$	$a = 4,2cm$;	$c = 6,2cm$	und $\gamma = 55°$
$l)$	$a = 7,9cm$;	$\gamma = 90°$	und $\beta = 35°$

Aufgabe 14: *Ein Dreieck besitzt eine Fläche von* $40cm^2$ *und hat eine Seiten* a *mit der Länge* $4cm$*. Die Seite* a *ist die Grundseite* g *und das Dreieck besitzt einen rechten Winkel* γ*. Berechne die Seitenlänge* b*. Außerdem hat das Dreieck einen Umfang von ungefähr* $40,8cm$*. Wie lang ist die Seite* c*?*

Aufgabe 15: *Berechne die fehlenden Größen für ein Dreieck.* (Benötigt „Dreiecke“)

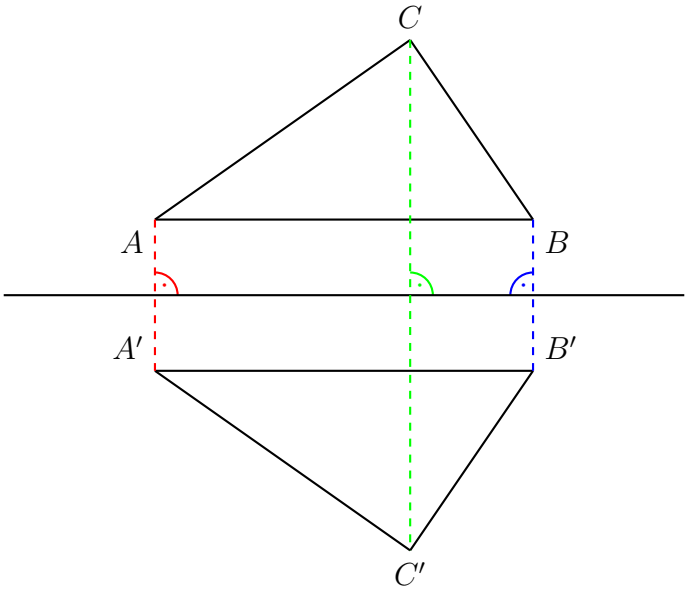
	1	2	3	4	5	6
Grundseite g	7		14		$8,5$	
Höhe h	3	8		5		$\frac{4}{5}$
Flächeninhalt A		92	18	43	$24,5$	$\frac{9}{4}$

Aufgabe 16: *Ein Dreieck hat einen Umfang von* $92cm$*. Dabei sind die Seiten* $a = 17cm$ *und* $c = 37cm$ *bekannt. Berechne die Länge der fehlenden Seite.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.21) Lösungen zu Dreiecken.

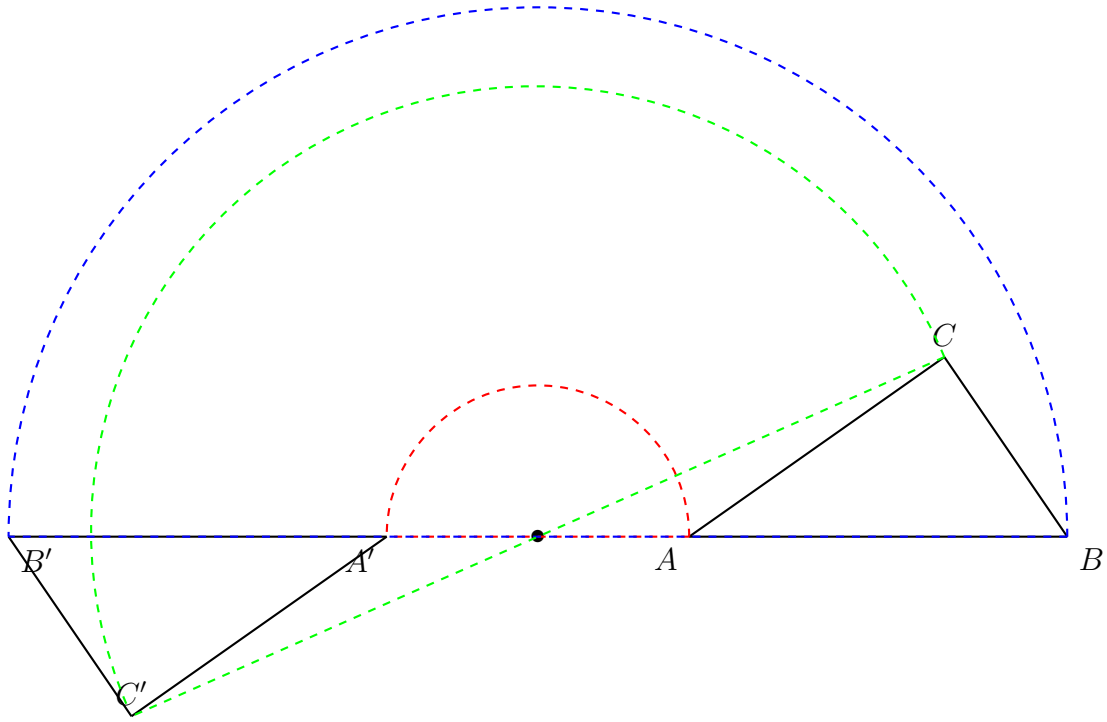
3.6 Symmetrien und Spiegelungen

Symmetrien sind wichtige Eigenschaften von Objekten und *Funktionen*. Die bis jetzt erfolgreichste Beschreibung der Natur beruht ausschließlich auf *Symmetrien*. Aus diesem Grund sollen in diesem Abschnitt zwei spezielle Formen von *Symmetrien* vorgestellt werden. Um eine *Symmetrie* verstehen zu können müssen *Spiegelungen* eingeführt werden. Dabei wird im Wesentlichen zwischen zwei Arten von *Spiegelungen* unterschieden. Die erste Art ist eine *Achsenspiegelung* mit den Eigenschaften, dass alle *Punkte*, die einen *Abstand* zu einer beliebigen *Achse* haben, mit dem gleichen *Abstand* auf die andere *Seite* der *Achse* eingezeichnet - *gespiegelt* - werden.



In der Abbildung ist zu erkennen wie eine solche *Achsenspiegelung* aussieht. Hierbei zeigen die gestrichelten Linien, dass die *Abstände* zwischen den *Eckpunkten* (A, B und C) und der *Achse* genauso lang sind wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkt* (A', B' und C') zur *Spiegelachse*. Dabei meint *Abstand* immer die kürzeste *Strecke* zwischen *Punkt* und *Achse*, was immer die *orthogonale Strecke* zur *Achse* ist.

Die zweite Art der *Spiegelungen* ist die *Punktspiegelung*, dabei wird ein Objekt in einem *Punkt* um 180° gedreht. Dabei sind die *Abstände* der *Eckpunkte* (A, B und C) zum *Spiegelpunkt* genauso groß wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkte* (A', B' und C') zum *Spiegelpunkt*, wie an der folgenden Abbildung zu erkennen ist.



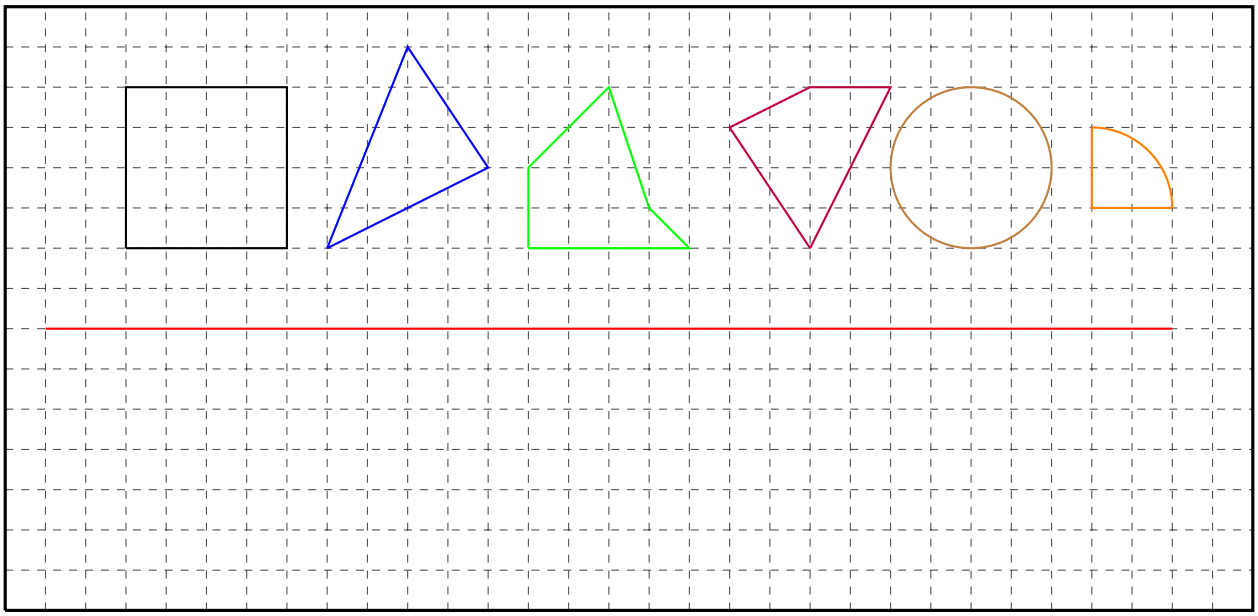
Im Allgemeinen wird bei diesen beiden *Spiegelungen* von einer *Achsen-* oder *Punktsymmetrie* gesprochen, wenn nach einer solchen *Spiegelung* das Ergebnisbild identisch zum Ausgangsbild ist. Die wohl bedeutendste *Symmetrie* in der Beschreibung der Natur ist die *radiale Symmetrie*[2], welche angibt, dass es keine Relevanz hat in welche Richtung ausgehend von einem *Punkt* das Problem betrachtet wird. Folglich ist die *radiale Symmetrie* eine noch speziellere *Punktsymmetrie*.

[2]heißt soviel wie Kreissymmetrie

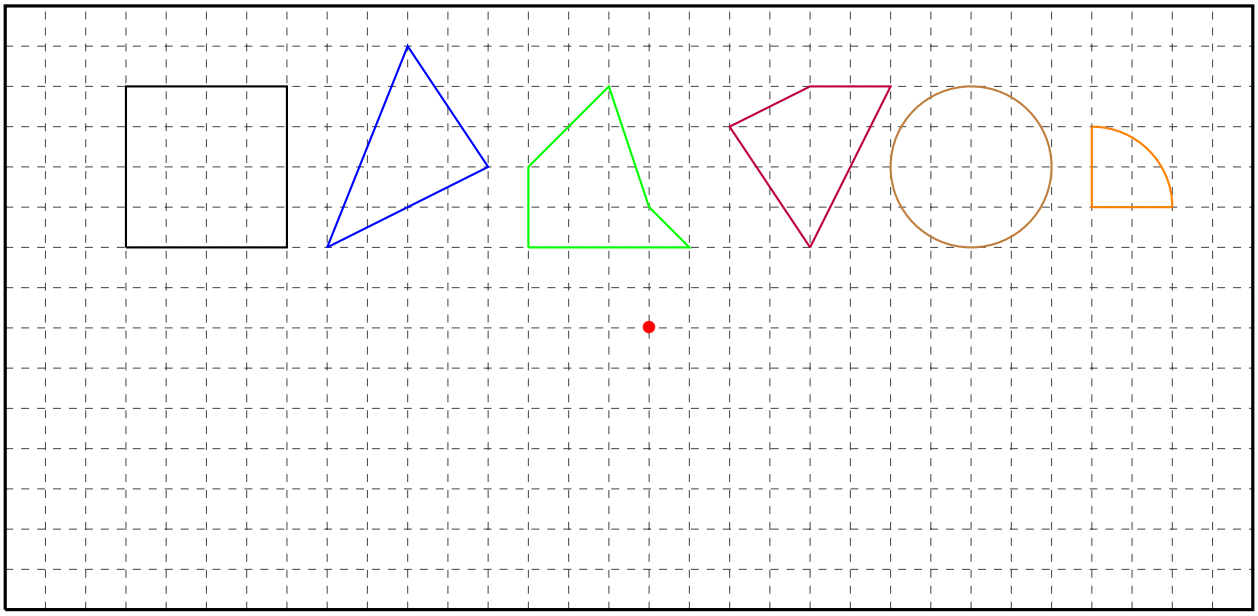
3.6.1 Übungsaufgaben zu Symmetrien

Aufgabe 1: *Spiegel die Körper an den angegebenen Achsen oder Punkten. (Übernehme die Figuren in dein Heft, deine Mappe oder deinen Block.)*

a)

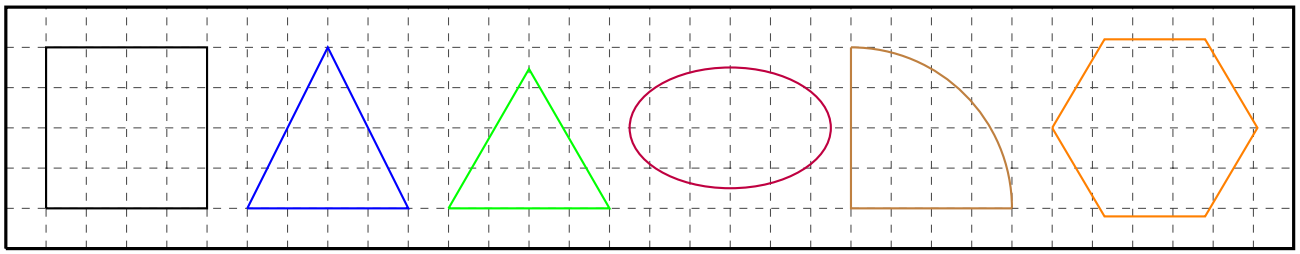


b)

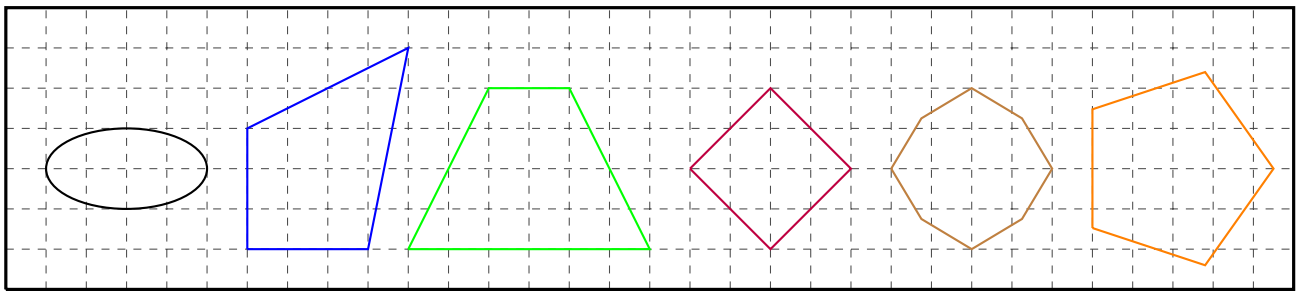


Aufgabe 2: *Zeichne die Symmetrieachsen und Symmetriepunkte ein. (Übernehme die Figuren in dein Heft, deine Mappe oder deinen Block.)*

a)

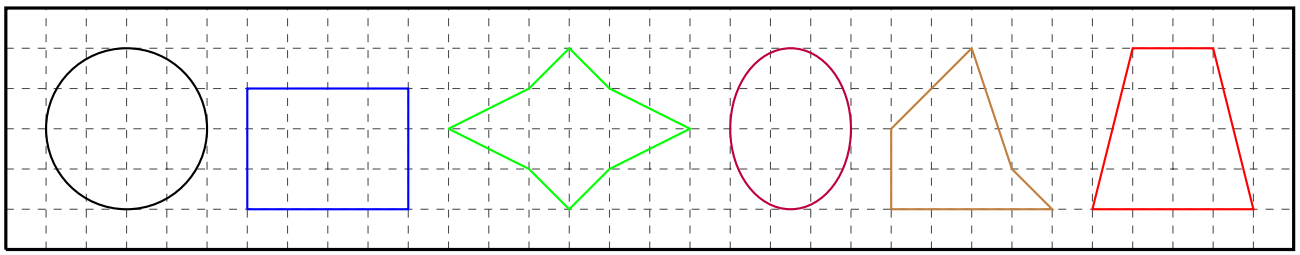


b)

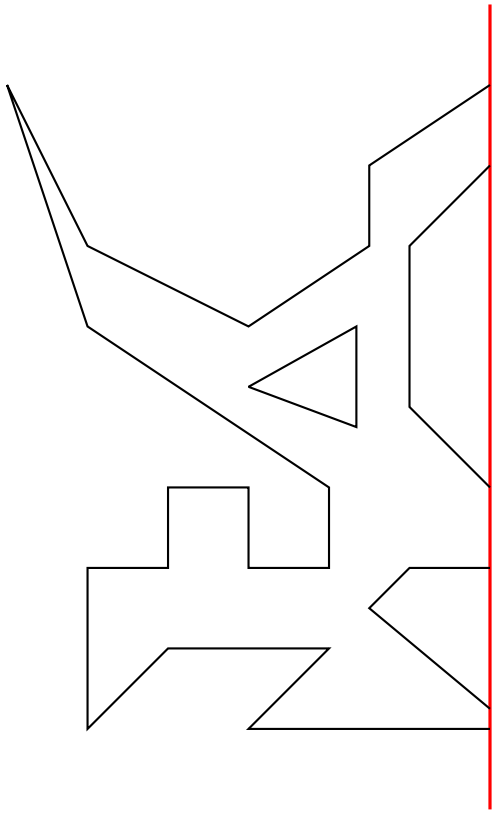


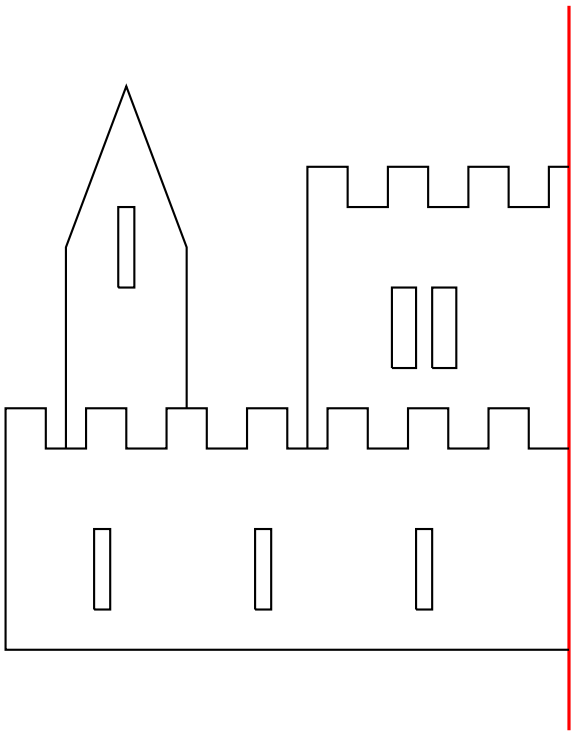
Aufgabe 3: *Wie viele Symmetrieachsen und Symmetriepunkte besitzen die Körper?*

a)



Aufgabe 4: *Spiegel die Figuren an der Achse.* (Keine Lösungen!)

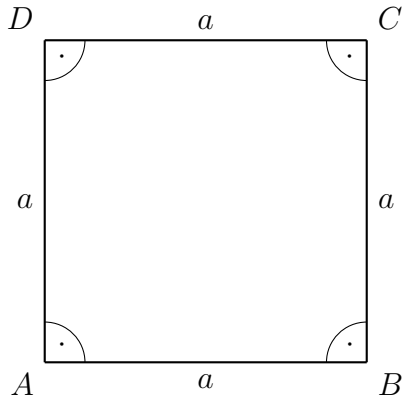




Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.22) Lösungen zu Dreiecken.

3.7 Spezielle Vierecke

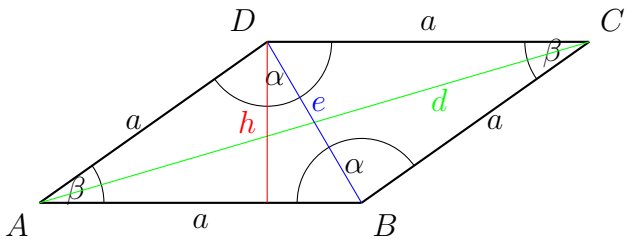
Wie bereits schon im vorigen Abschnitt beschrieben, gibt es spezielle Vierecke. So wird ein *Rechteck*, bei dem alle Seiten die gleiche Länge vorweisen können, *Quadrat* genannt.



Die Berechnung des *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U sind beim *Quadrat* trivialer Natur und ergeben sich als:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \\ U &= 4a \end{aligned} \tag{3.14}$$

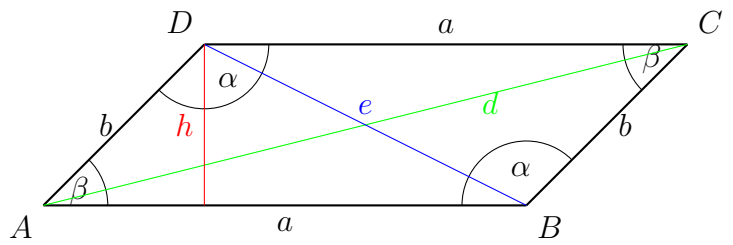
Ein Viereck mit vier gleich langen *Seiten*, deren gegenüber liegende *Winkel* gleich groß sind, wird *Raute* genannt (selten auch *Rhombus*).



Die Berechnung des *Flächeninhalts* A ist ähnlich wie bei einem *Dreieck* mit dem Unterschied, dass durch die Einzeichnung der *Diagonale* e zwei *Dreiecke* vorliegen. Somit muss der *Flächeninhalt* A_Δ eines der *Dreiecke* verdoppelt werden, sodass sich daraus wiederum der *Flächeninhalt* der *Raute* $A = 2A_\Delta$ ergibt. Somit gilt für den *Umfang* U und dem *Flächeninhalt* A (wobei in der Abbildung die *Grundseite* g gleich a ist):

$$\begin{aligned} A &= gh \\ U &= 4a \end{aligned} \tag{3.15}$$

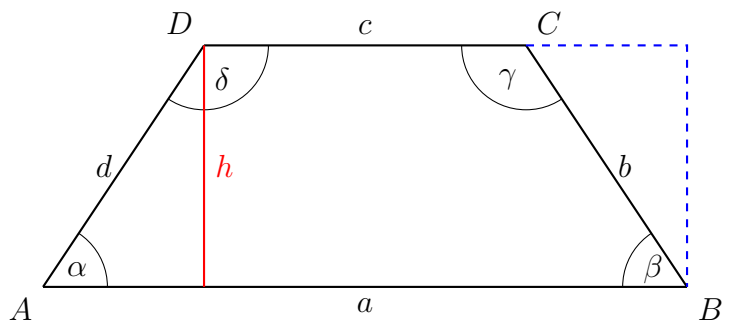
Wenn nun die benachbarten *Seiten* eine unterschiedliche Länge besitzen aber die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander sind, wird von einem *Parallelogramm* gesprochen.



Dabei unterscheidet sich zur *Raute* lediglich der *Umfang* U, welcher nach wie vor durch die Aufsummierung der *Seiten* gegeben ist:

$$\begin{aligned} A &= gh \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{3.16}$$

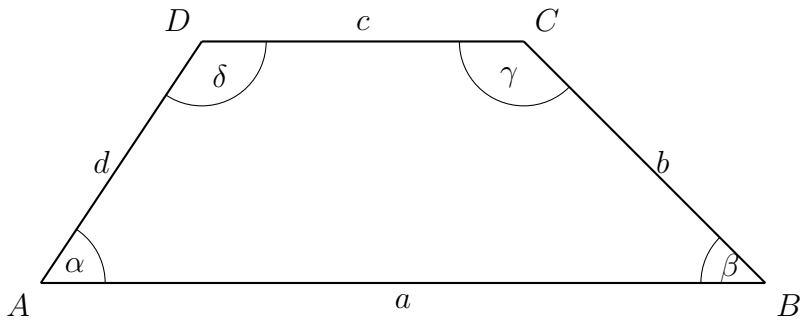
Wenn mindestens zwei *Seiten parallel* zu einander sind, allerdings sonst keine Größen zwingend gleich groß sein müssen, ist die Rede von einem *Trapez*.



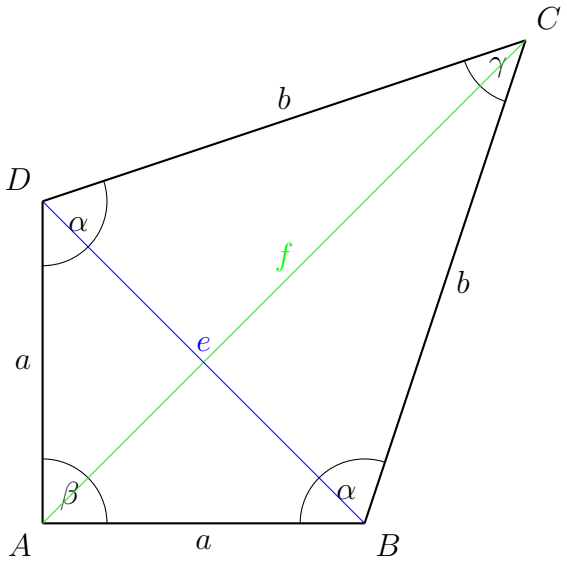
Die Abbildung zeigt ein *Trapez* bei dem die *Winkel* δ und γ sowie α und β gleich groß und aus diesem Grund auch die *Seiten* d und $b$gleich lang sind. Auch zeigt die Abbildung wie aus einem solchen *Trapez* wieder ein *Rechteck* gewonnen werden kann. Dabei wären die Seiten dieses *Rechtecks* gegeben durch die *Höhe* h und dem *Mittelwert* m der *Summe* von a und c. Hierbei gilt $m = \frac{a+c}{2}$ und somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2}h \\ U &= a + b + c + d \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wie bereits erwähnt müssen nur zwei *Seiten parallel* zu einander sein, sodass von einem *Trapez* gesprochen werden kann.



Dabei verändert sich die Berechnungsmethode das *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U nicht und ist genauso durch zu führen wie in Gleichung (3.17)
Als letztes soll der *Drachen* eingeführt werden. Er zeichnet sich dadurch aus, dass zwei *Winkel* gleich groß sind, welche sich gegenüber liegen.



Wie die Abbildung zeigt sind die *Schenkel* des *Winkels* β und die *Schenkel* des *Winkels* γ jeweils gleichlang, was auch ein Merkmal eines *Drachens* ist. Dabei ist ein *Drachen* aus zwei *Dreiecken* aufgebaut, deren *Flächeninhalte addiert* werden können. Die *Höhen* dieser *Dreiecke* sind gegeben durch die Einzeichnung der *Diagonalen* e und f. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{fe}{2} \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.7.1 Übungsaufgaben zu Vierecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von jeweiligen angegeben Viereck.*

a) Quadrat: $a = 2cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm,\ b = 3cm$ und $h_a = 2cm$
d) Trapez: $a = 4cm,\ c = 11cm,\ b = d$ und $h = 4cm$
e) Drachen: $a = 4cm,\ b = 6cm$ und $e = 6cm$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Quadraten.*

a) $a = 4cm$	*b)* $a = 11cm$	*c)* $a = 15dm$
d) $a = \frac{5}{6}cm$	*e)* $a = \frac{3}{4}km$	*f)* $a = \frac{5}{12}m$
e) $a = \sqrt{5}mm$	*g)* $a = \sqrt{149}m$	*h)* $a = \sqrt{88}dm$
i) $a = emm$	*j)* $a = \pi m$	*k)* $a = \ln 2dm$

Aufgabe 3: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Rauten.*

a) $a = 4cm$	und $h = 6cm$	*b)* $a = 9dm$	und $h = 11dm$
c) $a = 2m$	und $h = 50cm$	*d)* $a = 3km$	und $h = 100m$
e) $a = \frac{1}{2}\mu m$	und $h = \frac{1}{3}\mu m$	*f)* $a = \frac{7}{8}cm$	und $h = \frac{3}{4}cm$
g) $a = \frac{11}{3}mm$	und $h = \frac{6}{7}mm$	*h)* $a = \frac{14}{5}km$	und $h = \frac{5}{9}km$
i) $a = \frac{7}{4}dm$	und $h = \frac{7}{5}cm$	*j)* $a = \frac{17}{9}cm$	und $h = \frac{11}{8}mm$
k) $a = \sqrt{5}Mm$	und $h = \sqrt{3}Mm$	*l)* $a = \sqrt{17}nm$	und $h = \sqrt{2}nm$
m) $a = emm$	und $h = \pi dm$	*n)* $a = \ln 9m$	und $h = \ln 2m$

Aufgabe 4: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Parallelogramm.*

$a)$	$a = 3cm,\ b = 7cm$	und $h_a = 4cm$
$b)$	$a = 7dm,\ b = 6dm$	und $h_a = 5dm$
$c)$	$a = 9m,\ b = 8m$	und $h_a = 6m$
$d)$	$a = 4km,\ b = 44km$	und $h_a = 2km$
$e)$	$a = 2cm,\ b = 5dm$	und $h_a = 5mm$
$f)$	$a = 4m,\ b = 9cm$	und $h_a = 25dm$
$g)$	$a = 90dm,\ b = 60mm$	und $h_a = 4m$
$h)$	$a = 46km,\ b = 1dm$	und $h_a = 1dm$
$i)$	$a = \frac{1}{4}cm,\ b = \frac{1}{2}cm$	und $h_a = \frac{1}{6}cm$
$j)$	$a = \frac{11}{3}dm,\ b = \frac{6}{7}dm$	und $h_a = \frac{7}{8}dm$
$k)$	$a = \frac{13}{8}dm,\ b = \frac{1}{10}mm$	und $h_a = \frac{144}{10}cm$
$l)$	$a = \sqrt{7}dm,\ b = \sqrt{2}dm$	und $h_a = \sqrt{3}dm$
$m)$	$a = \lg 125cm,\ b = \ln 6cm$	und $h_a = \mathrm{lb}5cm$
$n)$	$a = edm,\ b = \pi dm$	und $h_a = \sqrt{5}dm$

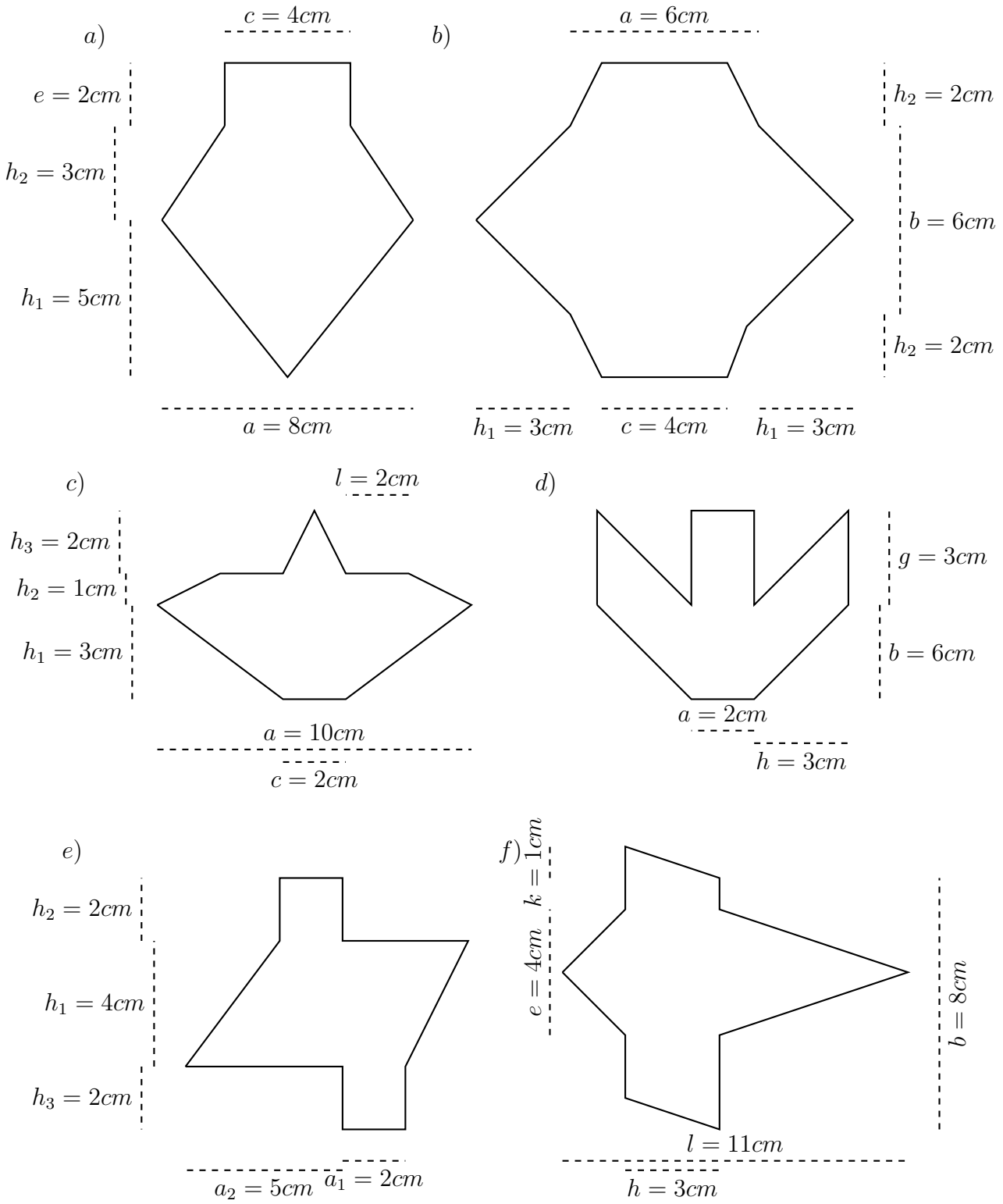
Aufgabe 5: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Trapez.*

$a)$	$a = 4cm, c = 3cm, d = b$	und	$h_a = 5cm$
$b)$	$a = 7cm, c = 5cm, d = b$	und	$h_a = 3cm$
$c)$	$a = 120mm, c = 6cm, d = b$	und	$h_a = 2,4cm$
$d)$	$a = 5dm, c = 11cm, d = b$	und	$h_a = 9cm$
$e)$	$a = 11cm, c = 4mm, d = b$	und	$h_a = \frac{7}{5}cm$
$f)$	$a = 3km, c = 1,5km, d = b$	und	$h_a = 1,65km$
$g)$	$a = 9cm, c = \frac{1}{5}dm, d = b$	und	$h_a = 5,53cm$
$h)$	$a = \frac{3}{4}cm, c = \frac{5}{4}cm, d = b$	und	$h_a = \frac{4}{7}cm$
$i)$	$a = \frac{15}{8}mm, c = \frac{7}{10}mm, d = b$	und	$h_a = \frac{5}{4}cm$
$j)$	$a = \frac{11}{5}dm, c = \frac{38}{9}cm, d = b$	und	$h_a = \frac{1}{8}dm$
$k)$	$a = \frac{7}{6}m, c = \frac{11}{4}dm, d = b$	und	$h_a = \frac{3}{4}m$
$l)$	$a = \frac{9}{4}m, c = \frac{6}{5}m, d = b$	und	$h_a = \frac{8}{3}dm$
$m)$	$a = \sqrt{17}cm, c = \sqrt{3}cm, d = b$	und	$h_a = \sqrt{7}cm$
$n)$	$a = \ln 2cm, c = \pi mm, d = b$	und	$h_a = emm$

Aufgabe 6: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Drachen.*

$a)$	$a = 4cm, b = 9cm,$	und	$e = 6cm$
$b)$	$a = 5cm, b = 6cm,$	und	$e = 5,5cm$
$c)$	$a = 3,2cm, b = 114mm,$	und	$e = 7,2cm$
$d)$	$a = 4dm, b = 1,7m,$	und	$e = 2,25m$
$e)$	$a = \frac{1}{4}cm, b = \frac{4}{5}cm,$	und	$e = \frac{5}{8}cm$
$f)$	$a = \frac{4}{7}mm, b = \frac{1}{6}cm,$	und	$e = \frac{5}{4}mm$
$g)$	$a = \frac{2}{30}dm, b = \frac{7}{3}cm,$	und	$e = \frac{3}{100}m$
$h)$	$a = \sqrt{10}cm, b = \pi cm,$	und	$e = ecm$

Aufgabe 7: *Bestimme Umfang U und Flächeninhalt A für die jeweiligen Vielecke.*



Aufgabe 8: *Die Winkelsumme eines Vierecks beträgt immer* $360°$. *Berechne alle Winkel der jeweiligen Vierecke.*

a) Der erste Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β, aber nur halb so groß wie der Winkel γ. Dabei ist der Winkel δ viermal größer als der Winkel γ.
b) Der erste Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β, der doppelt so groß wie der Winkel γ ist, der wiederum doppelt so groß wie der Winkel δ ist.
c) Bei einem Parallelogramm ist der Winkel α dreimal größer als der Winkel β.
d) Bei einem Drachen ist die Summe der gleichgroßen Winkel α zweimal größer als die Summe der anderen beiden Winkel. Der Winkel β ist dabei nur 1,5-mal größer als der Winkel γ.
e) Die Summe der Winkel α und β ist doppelt so groß wie die Summe der Winkel γ und δ. Dabei sind α und β gleich groß und δ dreimal kleiner als γ.
f) Bei einem symmetrischen Trapez ist der Winkel δ genau 125° groß.
g) Der erste Winkel α ist zweimal kleiner als der Winkel β, der dreimal kleiner als der Winkel γ ist, der wiederum viermal kleiner als der Winkel δ ist.
h) Bei einem Drachen ist der Winkel β doppelt so groß wie der Winkel γ. Beide zusammen haben eine Summe von 130°.

Aufgabe 9: *Berechne die fehlenden Größen für ein Trapez.* (Benötigt „Spezielle Vierecke“)

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4		5		$0,5$	$\frac{4}{5}$
Seite c	6	8		$4,5$		
Hilfsgröße $m = \frac{a+c}{2}$		6	8			$\frac{9}{4}$
Höhe h	3	7		$2,1$	4	
Flächeninhalt A			25	42	18	$\frac{13}{2}$

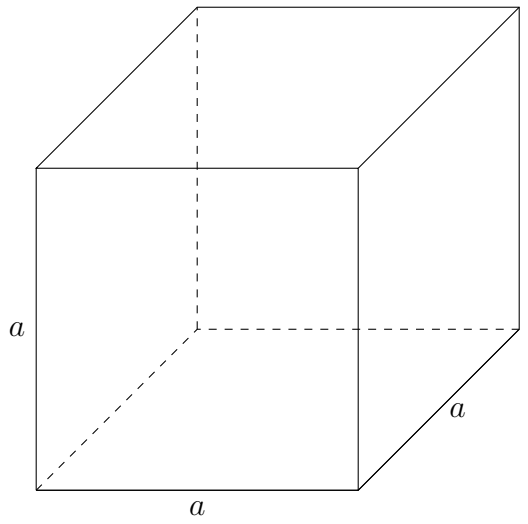
Aufgabe 10: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.23) Lösungen zu Vierecken.

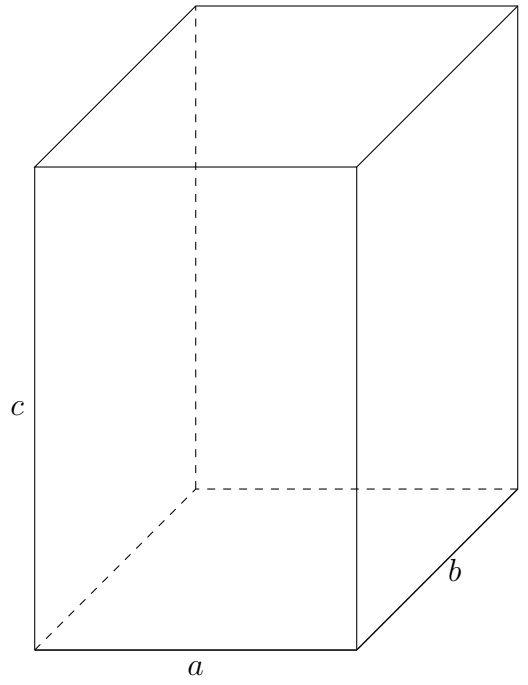
Behauptung	wahr	falsch
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.		
Bei einem Drachen sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.		
Ein Rechteck ist gleichzeitig ein Trapez.		
Ein Kreis hat 180°.		
Ein Drachen besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.		
Jedes Rechteck ist ein Trapez.		
Ein Quadrat ist eine Raute.		
Die Seiten einer Raute sind alle gleichlang.		
Ein Parallelogramm hat eine Winkelsumme von 180°.		
Die Winkelsumme eines Sechsecks beträgt immer 720°.		
Ein Trapez, dass ein Parallelogramm ist und einen rechten Winkel hat, nennt man immer Rechteck.		
Die längste Seite eines Dreiecks wird Hypotenuse genannt.		
Jede Raute ist ein Parallelogramm.		
Die gegenüberliegenden Winkel einer Raute sind gleichgroß.		
Ein gleichmäßiges Sechseck besteht aus gleichseitigen Dreiecken.		

3.8 Mehrdimensionale Vielecke

Nachdem die wichtigsten Objekte in zwei *Dimensionen* besprochen wurden, wird eine weitere *Dimension* eingeführt. So kommt nach der x-Richtung und der y-Richtung die z-Richtung hinzu, welche auch wieder in einem 90°-*Winkel* zu den beiden anderen Richtungen steht. Da ein Blatt Papier nur eine zweidimensionale *Fläche* ist, muss die dritte *Dimension* durch eine Konvention hinzugefügt werden. Dazu wird die z-Richtung in einem 45° zur x- und y-Richtung eingezeichnet. Dabei wird die Länge in z-Richtung beim Einzeichnen halbiert. *Strecken*, die sich hinter *Flächen* befinden, werden gestrichelt. So würde ein *Quadrat*, welches in z-Richtung ebenso um die gleiche *Seitenlänge* a erweitert wird, *Würfel* genannt werden.



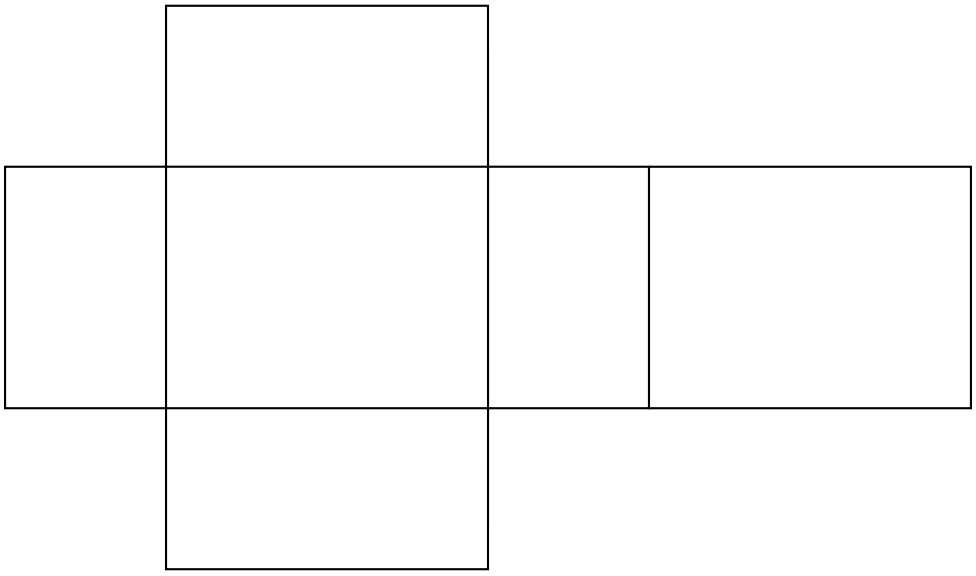
Die Abbildung zeigt genau so einen *Würfel*. Der *Würfel* zeichnet sich dadurch aus, dass alle *Winkel* 90° besitzen und alle *Seiten* gleich lang sind. Wie im zweidimensionalen das *Quadrat* ein Spezialfall des *Rechtecks* ist, so ist auch im dreidimensionalen ein *Würfel* ein Spezialfall eines sogenannten *Quaders*.



Wie die Abbildung zeigt, sind nur alle *Strecken*, die *parallel* zu einander sind gleich lang. Das sind die *Strecken*, die jeweils in eine *Dimension* zeigen. Wie auch schon bei der *Flächenberechnung* soll nun das *Volumen* des Körpers bestimmt werden. Das *Volumen* V ist ein *Größe*, die in $1m^3$ gemessen wird. Dabei gilt $1m^3 = 1m \cdot 1m \cdot 1m$ und somit wird das *Volumen* eines *Quaders* durch die *Multiplikation* der jeweiligen unterschiedlichen *Seiten* bestimmt. Folglich Länge mal Breite mal Höhe.

$$V = abc \tag{3.19}$$

Jeder *Quader* zeichnet sich auch dadurch aus, dass er acht *Ecken*, zwölf *Kanten* und sechs *Seiten* besitzt. Jeder dreidimensionale Körper kann aufgeklappt werden. Dazu werden alle *Flächen* so aneinander gezeichnet, sodass dadurch der Körper wieder erschaffen werden kann. So sind die Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* ersichtlicher.

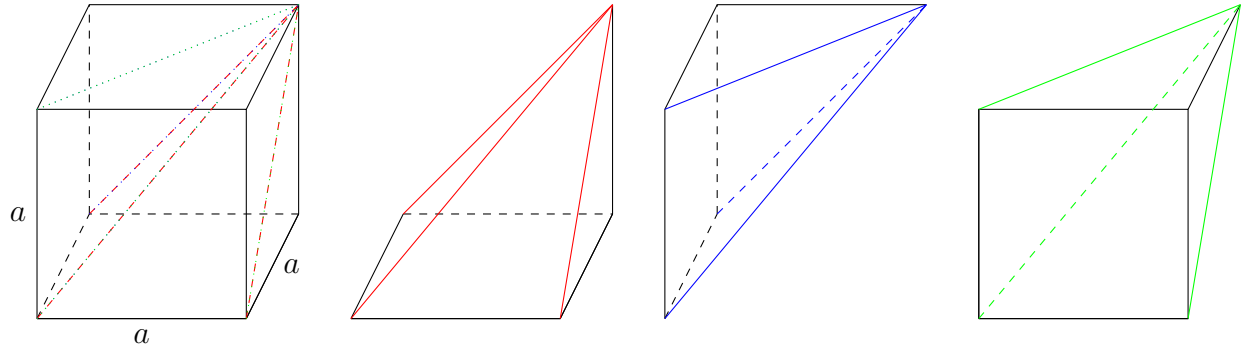


Die Abbildung zeigt so eine *Darstellung*, welche *Netz* genannt wird. Das *Netz* des *Quaders* zeigt, dass die *Oberfläche* O über die *Summe* der jeweiligen *Rechteckflächeninhalte* berechnet werden kann. Dabei ist die *Oberfläche*, die *Fläche*, die das *Volumen* umrandet und wird wie jede *Fläche* in $1m^2$ gemessen.

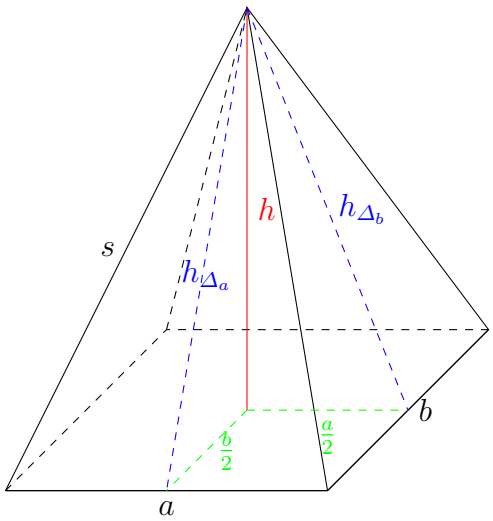
$$O = 2ab + 2ac + 2bc \tag{3.20}$$

Aus der *Flächenberechnung*, wo eine *Fläche* stets durch einen *Umfang* umrandet und nun aus der *Volumenberechnung*, wo das *Volumen* durch eine *Oberfläche* umrandet wird, kann generell gesagt werden, dass der sogenannte *Rand* immer eine *Dimension* kleiner ist als die Gesamtanzahl der *Dimensionen*.

Bisher wurde der *Quader* und der *Würfel* betrachtet, bei denen jeweils acht *Eckpunkt* vorhanden werden. Wenn nun ein Körper eine viereckiger *Grundfläche* haben soll, aber nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen soll, dann wäre die *Volumenbestimmung* scheinbar schwieriger Natur. Allerdings kann jeder *Quader* der „unten“ wie „oben“ die *Grundfläche* aufweist in drei exakt gleiche Körper verschnitten werden, die nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen und eine viereckiger *Grundfläche* besitzen.



Die Abbildung zeigt, wie so ein *Quader* zerlegt werden könnte. Ein solcher *Körper* heißt *Pyramide*. Dabei ist es nicht wichtig, wo sich der zulaufende *Punkt*, die Spitze, befindet. Im Folgenden soll sich dieser *Punkt* über dem *Schwerpunkt* der *Grundfläche* befinden.

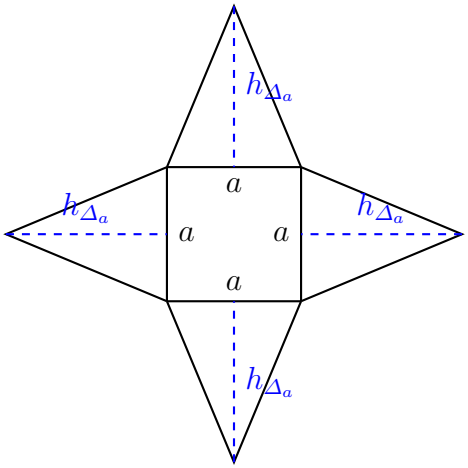


Das *Volumen* V der *Pyramide* mit *rechteckiger Grundseite* aus der Abbildung wäre gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3}abh \quad , \tag{3.21}$$

da die *Pyramide* dreimal in einen *Quader* mit den Maßen a, b und h passen würde.

Die *Oberfläche* O wäre nach Betrachtung des *Netzes* der *Pyramide* auch nichts weiter als die *Flächeninhalt* der *Dreiecke* addiert mit der *Grundfläche*, welche in diesem Beispiel *quadratisch* gewählt sei (b=a).



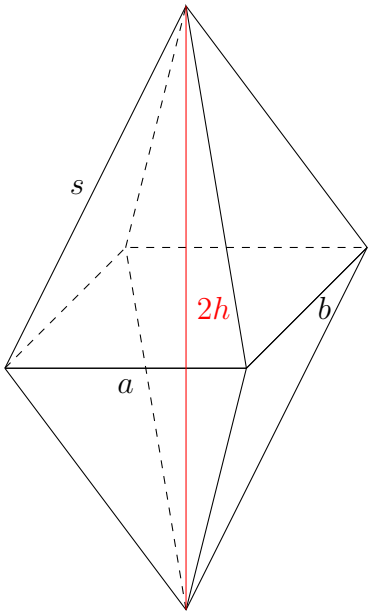
Wie das *Netz* schon vermuten lässt, wird die *Höhe* der *Dreiecke* h_{Δ_a} benötigt. Diese kann über den *Satz des Pythagoras* bestimmt werden (siehe dazu die Abbildung der *Pyramide*):

$$h_{\Delta_a} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \quad . \tag{3.22}$$

Somit ergibt sich für die *Oberfläche* der *Pyramide* O aus:

$$O = ah_{\Delta_a} + bh_{\Delta_b} + ab \quad . \tag{3.23}$$

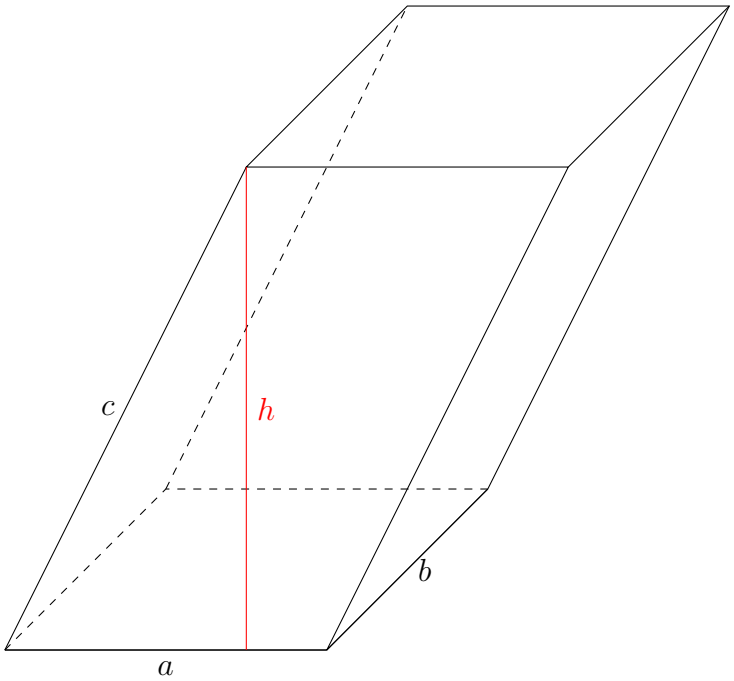
Viele Körper sind aus *Quadern* und *Pyramiden* zusammen gesetzt, wie zum Beispiel das *Oktaeder*:



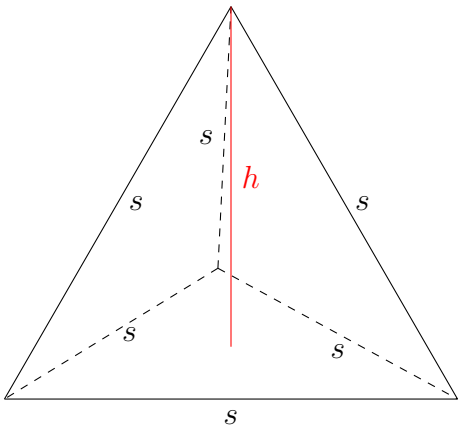
Wie aus der Abbildung des *Oktaeders* zu erkennen ist, ist dieser Körper aus zwei *Pyramiden* zusammengesetzt, sodass das *Volumen* V und die *Oberfläche* O (also zwei *Pyramiden* ohne die *Grundflächen*) gegeben ist als:

$$\begin{aligned} O &= 2ah_{\Delta_a} + 2bh_{\Delta_b} \\ V &= \frac{2}{3}abh \quad . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Wie schon bei der *Pyramide*, müssen die Körper nicht nur *rechte Winkel* aufweisen, wie zum Beispiel dieses *schiefe Prisma* mit *rechteckiger Grundfläche*:



Da die *Winkel* im Verhältnis zu einander kleiner und größer geworden sind, wird das *Volumen* durch die *Höhe* h limitiert. Generell gilt für jeden Körper zur Berechnung des *Volumens* immer „*Grundseite* mal *Höhe*“. Somit ist es völlig ausreichend einen Körper zu unterteilen in Teilkörper, die berechnet werden können.
Zu guter Letzt soll noch das *Tetraeder* vorgestellt werden:



Das *Tetraeder* zeichnet sich dadurch aus, dass es auf vier *gleichseitigen Dreiecken* besteht und der einzige Körper mit nur vier *Flächen* ist. Die *Oberfläche* O und das Volumen V ist gegeben durch das Prinzip, welches anhand der *Pyramide* erläutert wurde, als:

$$\begin{aligned} O &= s^2\sqrt{3} \\ V &= \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \ . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bei einem *Tetraeder* sind die *Winkel* der zwischen den *Kanten* gleich groß und haben den Wert von $109,5°$.
Da nun viele eckige Körper eingeführt wurden soll im folgenden Abschnitt der *Kreis* und danach die *Ellipse* vorgestellt werden, sodass auch *Rundungen* berechnet werden können.

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 16.4 .

3.8.1 Übungsaufgaben zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1: *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O der Quader.*

$a)$ Länge: $a = 4cm$, Breite: $b = 5cm$ und Höhe: $c = 4cm$
$b)$ Länge: $a = 3cm$, Breite: $b = 4cm$ und Höhe: $c = 6cm$
$c)$ Länge: $a = 3cm$, Breite: $b = 1cm$ und Höhe: $c = 9cm$
$d)$ Länge: $a = 7cm$, Breite: $b = 7cm$ und Höhe: $c = 1cm$
$e)$ Länge: $a = 8cm$, Breite: $b = 3cm$ und Höhe: $c = 2cm$
$f)$ Länge: $a = 4cm$, Breite: $b = 9cm$ und Höhe: $c = 4cm$
$g)$ Länge: $a = 2cm$, Breite: $b = 11cm$ und Höhe: $c = 8cm$
$h)$ Länge: $a = 9cm$, Breite: $b = 6cm$ und Höhe: $c = 7cm$
$i)$ Länge: $a = 7cm$, Breite: $b = 4cm$ und Höhe: $c = 2cm$
$j)$ Länge: $a = 2km$, Breite: $b = 5km$ und Höhe: $c = 5km$
$k)$ Länge: $a = 1dm$, Breite: $b = 9dm$ und Höhe: $c = 11dm$
$l)$ Länge: $a = 12m$, Breite: $b = 2m$ und Höhe: $c = 3m$
$m)$ Länge: $a = \frac{14}{7}m$, Breite: $b = \frac{144}{12}m$ und Höhe: $c = \frac{8}{4}m$
$n)$ Länge: $a = 12mm$, Breite: $b = 12mm$ und Höhe: $c = 0mm$

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O der Quader.*

$a)$ $a = \frac{1}{2}cm, b = \frac{2}{5}cm$ und $c = \frac{1}{3}cm$
$b)$ $a = \frac{3}{4}cm, b = \frac{1}{4}cm$ und $c = \frac{3}{5}cm$
$c)$ $a = \frac{4}{9}cm, b = \frac{5}{1}cm$ und $c = \frac{2}{7}cm$
$d)$ $a = \frac{10}{3}cm, b = \frac{1}{10}cm$ und $c = \frac{5}{8}cm$
$e)$ $a = \frac{7}{9}cm, b = 3cm$ und $c = \frac{15}{4}cm$
$f)$ $a = \frac{12}{7}cm, b = \frac{1}{100}cm$ und $c = \frac{12}{11}cm$
$g)$ $a = \frac{4}{5}dm, b = \frac{1}{2}cm$ und $c = \frac{3}{4}cm$
$h)$ $a = \frac{5}{2}cm, b = \frac{35}{3}mm$ und $c = \frac{8}{7}cm$
$i)$ $a = \frac{56}{5}mm, b = \frac{37}{4}cm$ und $c = \frac{9}{8}dm$
$j)$ $a = \frac{1}{2}m, b = \frac{4}{3}dm$ und $c = \frac{45}{12}cm$

Aufgabe 3: *Wenn die Seiten a und b die Grundfläche $G = a \cdot b$ bilden und die Höhe $h = c$ eines Quaders gegeben ist, wie groß ist dann das jeweilige Volumen V der Quader?*

a) Grundfläche: $G = 12cm^2$ und Höhe: $h = 3cm$
b) Grundfläche: $G = 6cm^2$ und Höhe: $h = 5cm$
c) Grundfläche: $G = 11cm^2$ und Höhe: $h = 9cm$
d) Grundfläche: $G = 11cm^2$ und Höhe: $h = 3cm$
e) Grundfläche: $G = 7km^2$ und Höhe: $h = 7km$
f) Grundfläche: $G = 289dm^2$ und Höhe: $h = 1dm$
g) Grundfläche: $G = \frac{16}{4}m^2$ und Höhe: $h = \frac{35}{5}cm$

Aufgabe 4: *Wenn ein Kubikdezimeter dm^3 einem Liter l entspricht, wie viele Liter Wasser passen in die Quader hinein?*

a) Länge: $a = 4dm$, Breite: $b = 4dm$ und Höhe: $c = 4dm$
b) Länge: $a = 5dm$, Breite: $b = 2dm$ und Höhe: $c = 3dm$
c) Grundfläche: $G = 8dm^2$ und Höhe: $h = 9dm$
d) Länge: $a = 10cm$, Breite: $b = 1m$ und Höhe: $c = 4dm$
e) Grundfläche: $G = 11dm^2$ und Höhe: $h = 3dm$
f) Grundfläche: $G = 17dm^2$ und Höhe: $h = 12dm$

Aufgabe 5: *Ein Würfel hat ein Volumen V von $60dm^3$, wie viel Liter könnte eine Pyramide mit den gleichen Maßen halten?*

Aufgabe 6: *Ein Schwimmbecken ist $250dm$ lang und $100dm$ breit. Es hat eine Tiefe von $20dm$. Wie viel Liter Wasser passen in dieses Schwimmbecken?*

Aufgabe 7: *Ein Geschenk soll Geschenkpapier eingepackt werden. Dabei ist das Geschenk 12cm lang, 6cm breit und 4cm hoch. Wie viel Quadratzentimeter Geschenkpapier werden benötigt?*

Aufgabe 8: *In einem Karton mit der Länge $10cm$, der Breite $10cm$ und der Höhe $10cm$ befinden sich Zuckerwürfel mit einer Länge von $1cm$, einer Breite von $1cm$ und einer Höhe von $1cm$. Wie viele Zuckerwürfel befinden sich in dem Karton, wenn dieser vollständig mit*

Zuckerwürfel gefüllt ist.

Aufgabe 9: *Eine Kiste hat ein Volumen von* $81dm^3$ *und besitzt eine Grundfläche von* $9dm^2$*. Wie hoch ist die Kiste?*

Aufgabe 10: *Ein Gefäß hat eine dreieckige Grundfläche, die* $1dm^2$ *groß ist. Es hat eine Höhe von* $2dm$*. Wie viel Liter Milch kann in dieses Gefäß gefüllt werden?*

Aufgabe 11: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Würfel.*

a) $a = 4cm$	*b)* $a = 7dm$	*c)* $a = 11m$	*d)* $a = 12km$
e) $a = \frac{3}{5}cm$	*f)* $a = \frac{6}{7}dm$	*g)* $a = \frac{11}{9}m$	*h)* $a = \frac{17}{3}km$
i) $a = 3,6cm$	*j)* $a = 2,8dm$	*k)* $a = 8,2m$	*l)* $a = 14,24km$
m) $a = \sqrt{7}cm$	*n)* $a = \sqrt{15}dm$	*o)* $a = \sqrt{467}m$	*p)* $a = \sqrt{214,346}km$
q) $a = \ln 5cm$	*r)* $a = \ln 2dm$	*s)* $a = em$	*t)* $a = \pi km$

Aufgabe 12: *Bestimme das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Prismen.*

a)	Dreiecksprisma: $G = 4cm^2$	und	$h = 3cm$
b)	Vierecksprisma: $G = 6cm^2$	und	$h = 8cm$
c)	Sechsecksprisma: $G = 7,4cm^2$	und	$h = 3,2cm$
d)	Zehnecksprisma: $G = \frac{1}{3}cm^2$	und	$h = \frac{5}{6}cm$
e)	Dreiecksprisma: $G = \frac{13}{4}cm^2$	und	$h = \frac{9}{2}cm$
f)	Fünfecksprisma: $G = \frac{6}{7}cm^2$	und	$h = \frac{7}{9}cm$
g)	Neunecksprisma: $G = \sqrt{2}cm^2$	und	$h = \sqrt{3}cm$
h)	Vierecksprisma: $G = ecm^2$	und	$h = \pi cm$

Aufgabe 13: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.*

$a)$	$a = 4cm\ ,\ b = 4cm$	und	$h = 6cm$
$b)$	$a = 3cm\ ,\ b = 4cm$	und	$h = \frac{9}{2}cm$
$c)$	$a = 3cm\ ,\ b = \frac{7}{3}cm$	und	$h_{\Delta_a} = 5cm$
$d)$	$a = \frac{9}{7}cm\ ,\ b = \frac{5}{4}cm$	und	$h_{\Delta_b} = 8cm$
$e)$	$a = \frac{5}{9}cm\ ,\ b = \frac{3}{5}cm$	und	$h = \frac{11}{3}cm$
$f)$	$a = \sqrt{2}cm\ ,\ b = \sqrt{3}cm$	und	$h = \sqrt{5}cm$
$g)$	$a = \ln 2cm\ ,\ b = \ln 3cm$	und	$h = \ln 5cm$
$h)$	$a = \pi cm\ ,\ b = ecm$	und	$h_{\Delta_b} = \sqrt{17}cm$

Aufgabe 14: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Oktaeder.*

$a)$	$a = 7cm\ ,\ b = 7cm$	und	$h = 3cm$
$b)$	$a = 9cm\ ,\ b = 2cm$	und	$h = \frac{9}{5}cm$
$c)$	$a = 8cm\ ,\ b = \frac{11}{4}cm$	und	$h_{\Delta_a} = 7cm$
$d)$	$a = \frac{5}{4}cm\ ,\ b = \frac{7}{3}cm$	und	$h_{\Delta_b} = 6cm$
$e)$	$a = \frac{11}{7}cm\ ,\ b = \frac{5}{9}cm$	und	$h = \frac{17}{3}cm$
$f)$	$a = \sqrt{7}cm\ ,\ b = \sqrt{11}cm$	und	$h = \sqrt{5}cm$
$g)$	$a = \ln 10cm\ ,\ b = \ln 5cm$	und	$h = \ln 7cm$
$h)$	$a = \pi cm\ ,\ b = ecm$	und	$h_{\Delta_b} = \sqrt{5}cm$

Aufgabe 15: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Tetraeder.*

$a)$	$s = 4cm$	$b)$	$s = 9cm$	$c)$	$s = \frac{3}{4}cm$
$d)$	$s = \frac{7}{5}cm$	$e)$	$s = \frac{13}{3}cm$	$f)$	$s = \sqrt{2}cm$
$g)$	$s = \ln 3cm$	$h)$	$s = \pi cm$	$i)$	$s = edm$

Aufgabe 16: *Bestimme Oberfläche O und Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Körper.*

$a)$Würfel: $a = 3cm$
$b)$Quader: $a = 2cm, b = 9cm$ und $c = 4cm$
$c)$Pyramide: $b = a = 4cm$ und $h = 6cm$
$d)$Pyramide: $a = 3cm, b = 4cm$ und $h = 5cm$
$e)$Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$:
$a = 6cm, b = 5cm$ und $c = h = 4cm$
$f)$Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf:
$a = 2,5cm, b = 5cm$ und $c = h = 2,5cm$

Aufgabe 17: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen gleichmäßigen Prismen.*

$a)$ gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$b)$ gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$c)$ gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$d)$ gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$e)$ gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$f)$ gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = 4cm$ und $h = 3cm$
$g)$ gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$
$h)$ gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$
$i)$ gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$
$j)$ gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$
$k)$ gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$
$l)$ gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = \frac{4}{3}cm$ und $h = \frac{11}{4}cm$

Aufgabe 18: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen schiefen Prismen.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) schiefes gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = 2cm$, $c = 4cm$ und $\alpha = 60°$
b) schiefes gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = 2cm$, $c = 4cm$ und $\alpha = 60°$
c) schiefes gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = 2cm$, $c = 4cm$ und $\alpha = 60°$
d) schiefes gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = 2cm$, $c = 4cm$ und $\alpha = 60°$
e) schiefes gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = \frac{6}{5}cm$, $c = \frac{7}{3}cm$ und $\alpha = 44°$
f) schiefes gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = \frac{6}{5}cm$, $c = \frac{7}{3}cm$ und $\alpha = 44°$
g) schiefes gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = \frac{6}{5}cm$, $c = \frac{7}{3}cm$ und $\alpha = 44°$
h) schiefes gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = \frac{6}{5}cm$, $c = \frac{7}{3}cm$ und $\alpha = 44°$

Aufgabe 19: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Pyramiden mit den angegebenen Grundflächen.*

a) Pyramide mit gleichmäßiger Dreieckgrundfläche: $a = 4cm$ und $h = 7cm$
b) Pyramide mit gleichmäßiger Fünfeckgrundfläche: $a = 4cm$ und $h = 7cm$
c) Pyramide mit gleichmäßiger Sechseckgrundfläche: $a = 4cm$ und $h = 7cm$
d) Pyramide mit gleichmäßiger Dreieckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}cm$ und $h = \frac{11}{5}cm$
e) Pyramide mit gleichmäßiger Fünfeckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}cm$ und $h = \frac{11}{5}cm$
f) Pyramide mit gleichmäßiger Sechseckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}cm$ und $h = \frac{11}{5}cm$

Aufgabe 20: *Berechne für die angegebenen Werte der Quader die Höhe h.*

a) $V = \frac{7}{5}cm^3$ und $G = \frac{11}{6}cm^2$
b) $V = 8cm^3$ und $G = \frac{10}{3}cm^2$
c) $V = \frac{1}{2}cm^3$ und $G = \frac{1}{10}cm^2$
d) $V = \frac{8}{7}cm^3$ und $G = 2cm^2$
e) $V = \frac{11}{12}cm^3$ und $G = \sqrt{83}cm^2$
f) $V = \pi cm^3$ und $G = ecm^2$

Aufgabe 21: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Quader.*

	1	2	3	4	5	6
a	6	3		3,3		5,5
b	2		9		5,7	
c	8	7	4	5,6	3,2	
V		58		68,7	156	128
O			164			236

Aufgabe 22: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Tetraeder.*

	1	2	3	4	5	6
s	7			3,45		
V		116			$\frac{83}{7}$	
O			23			$\frac{174}{11}$

Aufgabe 23: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene gleichmäßige Prismen.*

Aufgabe 24: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.*

	1	2	3	4	5	6
G	13	27		3,95		
h	7		5		$\frac{11}{2}$	
V		86			$\frac{67}{6}$	$\frac{55}{7}$
O			59	24,5		$\frac{599}{17}$
Ecken der Grundfläche	4	4	4	3	6	4

	1	2	3	4	5	6
a	8	5	6,5		2,3	4,8
b	8	4			7,4	6,6
h	11		8,8	6,9		
h_{Δ_a}				7,75		
h_{Δ_b}						
s		9	9,7	8,2	9,1	
V						54,3
O						

Aufgabe 25: *Ein Quader hat eine Oberfläche O von $192cm^2$ mit den Seiten $a = 4cm$ und $b = 8cm$. Wie lang ist die fehlende Seite?* (Benötigt „Mehrdimensionale Vielecke“)

Aufgabe 26: *Berechne die fehlenden Größen für ein Quaders.* (Benötigt „Mehrdimensionale Vielecke“)

	1	2	3	4	5	6
Seite a	2		5	2	3	
Seite b	3	4		11	8	$\frac{4}{5}$
Seite c	4	7	6			$\frac{3}{4}$
Volumen V		252	210	77	45	2
Oberfläche O						

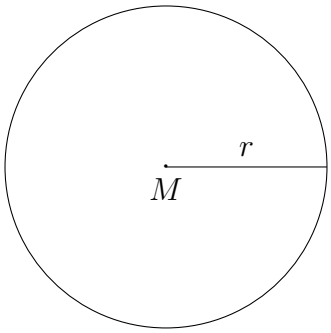
Aufgabe 27: *Sortiere die Begriffe nach der Gleichung zur Berechnung des Volumens in die Spalten ein: Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel, schiefes Prisma, Oktaeder, Tetraeder, Würfel.*

$V = Gh$	$V = \frac{1}{3}Gh$	$V = \frac{4}{3}Gh$

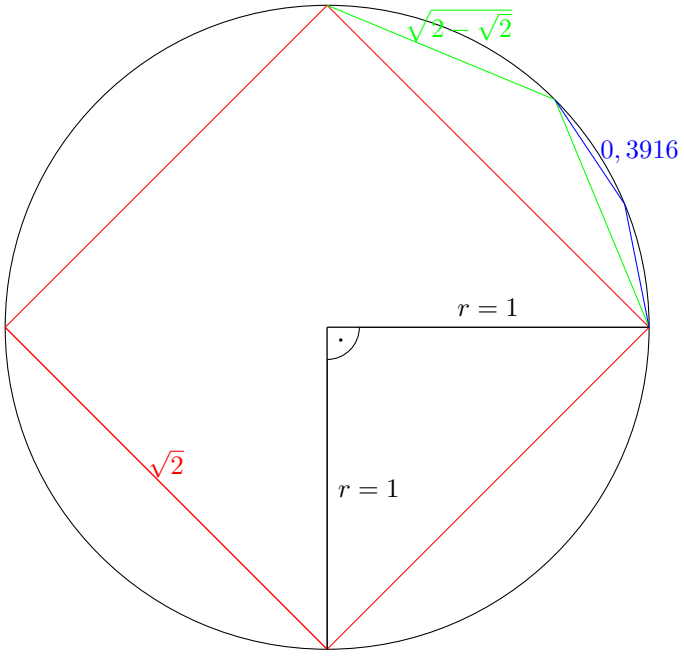
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.24) Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken.

3.9 Kreis

Ein *Kreis* zeichnet sich dadurch aus, dass er rund ist und der *Abstand* vom *Mittelpunkt* zum *Kreis* selbst immer gleich groß ist. Dieser *Abstand* wird *Radius* r genannt. Der doppelte *Radius* wird als *Durchmesser* $d = 2r$ bezeichnet.



Die Abbildung zeigt einen *Kreis* mit *Radius* r mit dem *Mittelpunkt* M. In der *Geometrie* sind grade die *Größen* des *Flächeninhalts* und des *Umfangs* interessant. Beide Werte sollen anhand eines *Kreises* mit *Radius* $r = 1$ ermittelt werden. Da wird zu nächst ein *Quadrat* in den *Kreis* gezeichnet, welches die *Seitenlänge* $a = \sqrt{2}$ besitzt. Dies wird offensichtlich durch die Verwendung des *Satz des Pythagoras*. Anschließend soll in der noch nicht vom roten *Quadrat* ein *gleichschenkliges Dreieck*, welches grün sein soll, eingezeichnet werden, sodass alle *Eckpunkte* sich auf dem schwarzen *Kreisbogen* befinden. Anschließend wird wieder ein *Dreieck*, das blau sein soll, so eingezeichnet, dass es im noch nicht erschlossenen Raum liegt und dazu wieder alle *Eckpunkte* sich auf dem *Kreisbogen* befinden.



Die Abbildung zeigt genau dieses Verfahren. Wenn diese Prozedur oft genug wiederholt wurde, soll der *Umfang* des eckigen Körpers und auch der *Flächeninhalt* bestimmt werden. Dies wird

nun im Weiteren schrittweise geschehen.

Um den *Umfang* zu bestimmen, werden jeweils die *Schenkellängen* der *gleichschenkligen Dreiecke* benötigt, welche dann mit der Anzahl der *Ecken* des jeweiligen resultierenden Vielecks *multipliziert* wird. (Die genaue Berechnung der jeweiligen *Schenkellängen* und auch der *Höhen* für den *Flächeninhalt* soll hier nicht genauer erläutert werden, dies kann jeder Schüler nach Bearbeitung des Kapitels „Trigonometrie“ selbst nachrechnen.)

$$\begin{aligned} U_{\text{rot},4} &= 4 \cdot \sqrt{2} = 5,6568 \\ U_{\text{grün},8} &= 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 6,1229 \\ U_{\text{blau},16} &= 16 \cdot 0.3916 = 6,2656 \\ \vdots &= \vdots \\ U_{\infty} &= 6,2832 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Beim *Flächeninhalt A* müssen noch über den *Satz des Pythagoras* die jeweiligen *Höhen der Dreiecke* bestimmt werden. Sie sind immer gegeben als die *Wurzel* aus der neuen *Seitenlänge* zum *Quadrat subtrahiert* mit der halben alten *Seitenlänge* zum *Quadrat*.

$$\begin{aligned} A_4 = A_{\text{rot}} &= 2 \\ A_8 = A_{\text{rot}} + 4A_{\text{grün}} &= 2,82843 \\ A_{16} = A_8 + 8A_{\text{blau}} &= 3,07216 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{\infty} &= 3,14159 := \pi \end{aligned} \tag{3.27}$$

Der *Flächeninhalt* A_∞ eines regelmäßigen Unendlichecks - einem *Kreis* -, dessen *Eckpunkte* alle auf dem *Kreisbogen* mit dem *Radius* $r = 1$ liegen beträgt genau π. π ist eine *irrationale Zahl*[3] und wird auch *Kreiszahl* genannt. Mittels dieser *Kreiszahl* π lassen sich die *Größen* eines *Kreises* mit beliebigen *Radius* r darstellen.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ U &= 2\pi r \end{aligned} \tag{3.28}$$

Auch noch andere weitere *Größen* des *Kreises* lassen sich über π darstellen, dazu werden im nächsten Unterabschnitt Teile des *Kreises* berechnet und anschließend das *Bogenmaß* eingeführt.

3.9.1 Bogenmaß

Da der *Kreis* mit dem *Radius* $r = 1$, der sogenannte *Einheitskreis*, einen *Umfang* von $U = 2\pi$ besitzt, kann ein Zusammenhang zwischen *Umfang* und einen *vollen Winkel* 360° gesehen werden. Der *Kreis* steht symbolisch für einen *vollen Winkel* und dadurch kann die Beziehung

[3] irrationale Zahlen können nicht durch Brüche dargestellt werden: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

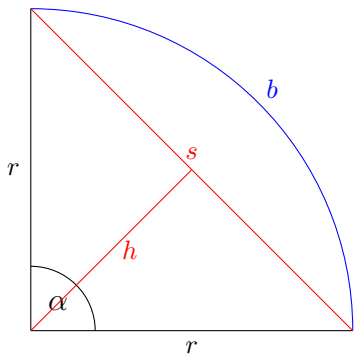
$$\begin{aligned} 2\pi\,\text{rad} &= 360^\circ \\ \Rightarrow 1^\circ &= \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \\ \Leftrightarrow 1\,\text{rad} &= \frac{180^\circ}{\pi} \end{aligned} \tag{3.29}$$

aufgestellt werden. Dabei ist rad die *Einheit Radiant*, welche für die Länge des jeweiligen *Kreisbogen* steht. Oftmals empfiehlt es sich in *Radiant* zu rechnen, da dies nicht selten die Gleichungen erheblich vereinfachen würde. Je nach dem, ob *Grad* oder *Radiant* als *Einheit* gewählt wurde, muss diese auch im Taschenrechner verändert werden, da sonst die Ergebnisse nicht der Realität entsprechen. Die Umrechnung ist über den Dreisatz oder der folgenden Gleichung möglich:

$$\begin{aligned} \alpha\ [\text{rad}] &= \frac{2\pi}{360^\circ}\alpha\ [^\circ] \quad , \\ \alpha\ [^\circ] &= \frac{360^\circ}{2\pi}\alpha\ [\text{rad}] \quad . \end{aligned} \tag{3.30}$$

3.9.2 Kreisteile

Wie schon oben beschrieben, ist der *Umfang* des *Kreises* durch $U = 2\pi r$ und der *Flächeninhalt* durch $A = \pi r^2$ gegeben. Somit ergeben sich auch Teilgrößen wie der *Kreisbogen* b, der *Kreisausschnitt* und der *Kreisabschnitt*.



Die Abbildung zeigt einen *Kreisauschnitt* mit allen Unterteilungen für einen *Kreisabschnitt* sowie den *Kreisbogen*. Dabei ist der *Kreisbogen* b ein *Bruchteil* des *Umfangs*, der durch $2\pi r$ und 360° beschrieben wird. Somit ergibt sich, dass für einen *Winkel* α folgende *Bogenlänge* b ergibt:

$$b = \frac{2\pi r}{360}\alpha \quad . \tag{3.31}$$

Der *Flächeninhalt* des *Kreisausschnittes*, der durch die gesamte umrandete *Fläche* beschrieben wird, der anteilige *Flächeninhalt* eines ganzen *Kreises*:

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 = \frac{br}{2}\alpha \quad . \tag{3.32}$$

Der *Flächeninhalt* dieses *Kreisausschnittes* ohne die des *Dreiecks* mit der *Grundfläche* s und der *Höhe* h, wird *Kreisabschnitt* genannt. Durch die Beschreibung wird klar wie der *Flächeninhalt* eines *Kreisabschnittes* berechnet wird:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2} = \frac{br - sh}{2}\alpha \quad . \tag{3.33}$$

Mit diesen *Teilgrößen* des *Kreises* und dem Wissen über den ganzen *Kreis*, lassen sich nahezu alle Probleme berechnen.

3.9.3 Übungsaufgaben zu Kreisen

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreise.*

$a)\ r = 3cm,$	$b)\ r = 6cm,$	$c)\ d = 11cm,$
$d)\ r = \frac{2}{3}mm,$	$e)\ r = \frac{5}{6}dm,$	$f)\ d = \frac{7}{4}m,$
$g)\ r = \frac{2}{7}cm,$	$h)\ r = \frac{9}{5}cm,$	$i)\ d = \frac{11}{3}cm,$
$j)\ r = \sqrt{5}cm,$	$k)\ r = \pi cm,$	$l)\ d = \ln 6cm,$
$m)\ d = 0,5cm,$	$n)\ r = 2,718cm,$	$o)\ d = \frac{6}{7}cm.$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisausschnitt.*

$a)\ \alpha = 60°$	und $r = 5cm$	$b)\ \alpha = 230°$	und $r = 2cm$
$c)\ \alpha = 177°$	und $r = \sqrt{17}cm$	$d)\ \alpha = 55°$	und $r = 3cm$
$e)\ \alpha = 145°$	und $r = 7cm$	$f)\ \alpha = 310°$	und $r = 2,5cm$
$g)\ \alpha = 130,4°$	und $r = \frac{3}{4}cm$	$h)\ \alpha = \frac{145°}{6}$	und $r = \frac{7}{2}cm$
$i)\ \alpha = \frac{99°}{5}$	und $r = \frac{5}{3}cm$	$j)\ \alpha = \frac{189°}{7}$	und $r = \frac{9}{7}cm$
$k)\ \alpha = \frac{4°}{5}$	und $r = \frac{11}{12}cm$	$l)\ \alpha = \sqrt{3025}°$	und $r = \sqrt{111}cm$

Aufgabe 3: *Rechne die Einheiten um.*

$a)$ $180° =$	$b)$ $360° =$	$c)$ $90° =$
$d)$ $45° =$	$e)$ $30° =$	$f)$ $120° =$
$g)$ $36° =$	$h)$ $55° =$	$i)$ $193° =$
$j)$ $11° =$	$k)$ $466° =$	$l)$ $1643° =$
$m)$ $\frac{3\pi}{4}\text{rad} =$	$n)$ $\frac{3\pi}{2}\text{rad} =$	$o)$ $\frac{5\pi}{4}\text{rad} =$
$p)$ $1,2\pi\text{rad} =$	$q)$ $1,75\text{rad} =$	$r)$ $0,\bar{3}\text{rad} =$
$s)$ $\frac{4\pi}{5}\text{rad} =$	$t)$ $\frac{\pi}{9}\text{rad} =$	$u)$ $\frac{9\pi}{7}\text{rad} =$
$v)$ $\frac{\pi}{12}\text{rad} =$	$w)$ $\frac{7\pi}{3}\text{rad} =$	$x)$ $\frac{11\pi}{9}\text{rad} =$

Aufgabe 4: *Zeichne die angegebenen Kreismuster.*

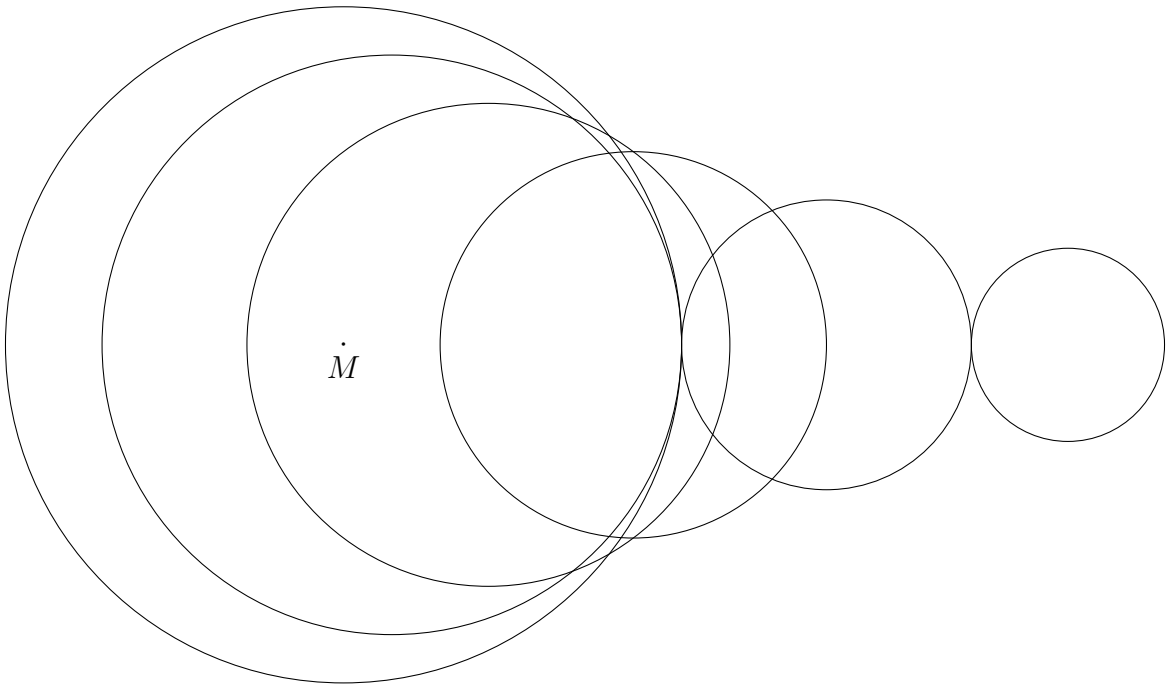
$a)$ Alle Kreise mit geradem Radius sollen im Mittelpunkt M gezeichnet werden und alle mit ungeradem Radius im Mittelpunkt N. Dabei gilt, dass M $1cm$ links von N ist. Zeichne für folgende Radien: $r = \{2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm\}$.

$b)$ Zeichne einen Kreis mit Radius $r = 7cm$ im Mittelpunkt M, zeichne danach einen Kreis der einen Radius von einem Zentimeter weniger hat und sich der Mittelpunkt $1cm$ weiter links befindet. Wiederhole dies bis du einen Kreis mit Radius $r = 2cm$ gezeichnet hast.

$c)$ Wähle einen Punkt P auf deinem Blatt, zeichne dann jeweils einen Kreisbogen mit $116°$, sodass die Strecke vom jeweiligen Kreisbogenmittelpunkt zum Punkt P hin den Kreisbogen halbieren würde, mit Radius $r = 4cm$ mit einem Abstand von $3cm$ nach links, rechts, oben und unten zu P.

$d)$ Wähle einen Punkt P und gehe von ihm aus $\sqrt{50}cm$ diagonal nach links oben, rechts oben, links unten und rechts unten. Zeichne in diesen Punkten einen Viertelkreis, sodass die Linie zum Punkt P den Kreisbogen halbieren würde. Zeichne dann einen Kreis vom Punkt P aus, sodass dieser alle vier Viertelkreise berührt. Welchen Radius hat dieser innere Kreis?

Aufgabe 5: *Beschreibe das Schema der Zeichnung.*



Aufgabe 6: *Zeichne einen Halbkreis und verbinde die Enden des Kreisbogens. Zeichne anschließend vier beliebige Dreiecke in diesen Halbkreis unter der Bedingung, dass die Enden des Halbkreis zwei Eckpunkte der Dreiecke sind und der letzte Eckpunkt des jeweiligen Dreiecks sich auf dem Kreisbogen befindet. Messe anschließend den Winkel der Dreiecke beim jeweiligen Eckpunkt, der auf dem Kreisbogen und nicht an den Enden des Kreisbogens ist. Was auffällt wird „Satz des Thales“ genannt.*

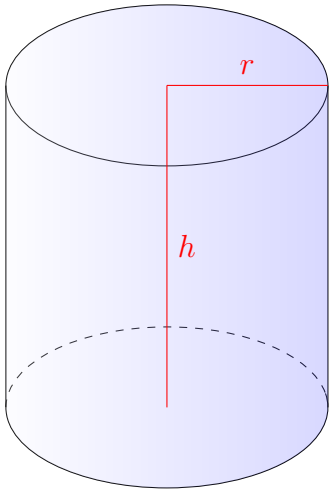
Aufgabe 7: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisabschnitt.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) $r = 5cm$	und $\alpha = 90°$	*b)* $r = 4cm$	und $\alpha = 75°$
c) $r = 7,45cm$	und $\alpha = 122°$	*d)* $r = \frac{9}{4}cm$	und $\alpha = 23°$
e) $r = \frac{7}{13}cm$	und $\alpha = 95°$	*f)* $r = \sqrt{7}cm$	und $\alpha = 146°$
g) $r = \ln 4cm$	und $\alpha = \frac{3}{4}\pi\,\text{rad}$	*h)* $r = ecm$	und $\alpha = \frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$

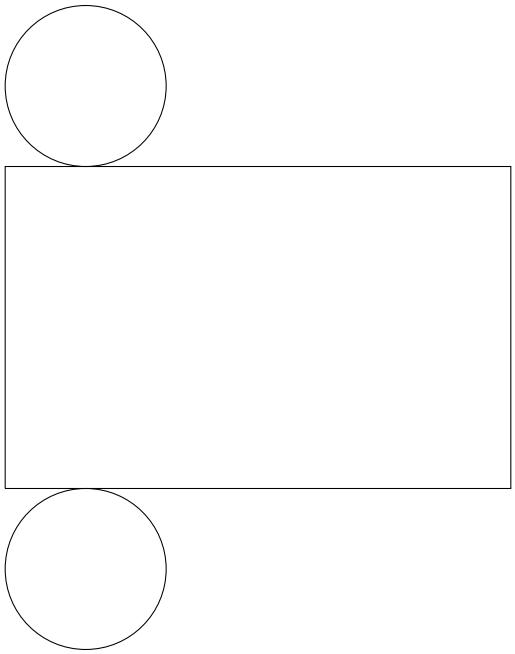
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.25) Lösungen zu Kreisen.

3.10 Zylinder und Kegel

Ein dreidimensionaler Körper, der einen *Kreis* als *Grundfläche* hat, welche gegenüberliegend mit einem *Abstand* einer *Höhe* h wieder vorzufinden ist, wird *Zylinder* genannt.



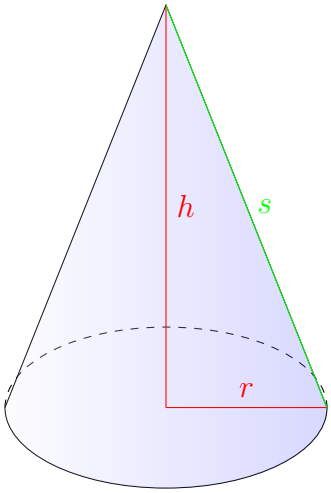
Die Abbildung zeigt, dass sich der *Zylinder* ähnlich wie das das *Prisma* behandeln lässt. Der einzige Unterschied ist dadurch gegeben, dass es sich um runde *Grundflächen* handelt und dass ein *Zylinder* nur zwei *Kanten*, drei *Flächen* und keinen *Eckpunkt* besitzt, wie das *Netz* offenbart:



Das *Volumen* V ist erneut gegeben durch „*Grundfläche* G mal *Höhe* h“ und am *Netz* aus der Abbildung ist erkennbar, dass die *Oberfläche* O sich aus zwei gleichen *Kreisen* und einem *Rechteck* mit den *Seitenlängen* $2\pi r$ und h zusammensetzt:

$$\begin{aligned} V &= Gh = \pi r^2 h \\ O &= 2 \cdot \pi r^2 + \pi r h \quad . \end{aligned} \tag{3.34}$$

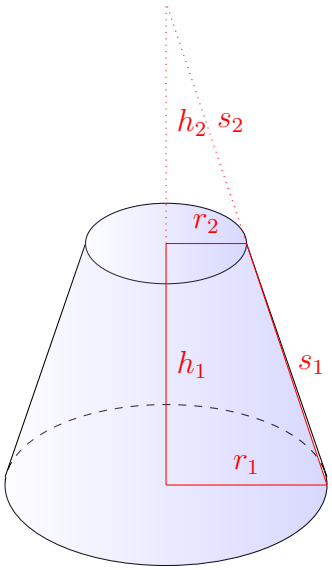
Sobald der Körper in der *Höhe* h wieder zu einem *Punkt* wieder zusammenläuft und dabei als *Grundfläche* einen *Kreis* besitzt, wird dieser Körper als *Kegel* bezeichnet.



Der *Kegel* ist im Vergleich zum *Zylinder* genauso zu handhaben wie die *Pyramide* im Vergleich zum *Quader*. Somit ergibt sich das *Volumen* des *Kegels* V als ein Drittel des *Volumens* eines *Zylinders*. Bei der *Oberfläche* ist dies nicht so trivial, denn ein *Kreis* als *Grundfläche* wird mit einem *Kreisausschnitt addiert*. Dabei hat der *Kreisausschnitt* den *Radius* s und eine *Kreisbogenlänge* $b = 2\pi r$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s) \quad . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Falls ein *Zylinder* mit unterschiedlich großen *Kreisen* vorzufinden ist, wird im allgemeinen von einem *Kegelstumpf* gesprochen. Hierbei wurde lediglich ein Teil eines *Kegels* mit der *Höhe* $h = h_1 + h_2$ abgeschnitten.



Durch umstellen von Gleichungen ergibt sich das *Volumen* und die *Oberfläche* des *Kegelstumpfes* zu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}G_1h_1 - \frac{1}{3}G_2h_2 = \frac{1}{3}\pi h_1\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right) \\ O &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1(r_1 - r_2)\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Generell bleibt noch anzumerken, dass die *Mantelfläche M* immer gegeben ist als die *Oberfläche* ohne *Grundfläche*.

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 16.4 .

3.10.1 Übungsaufgaben zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Zylinder.*

a) $r = 5cm$ und $h = 11cm$, *b)* $r = 47cm$ und $h = 85cm$

c) $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm$, *d)* $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm$

e) $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm$, *f)* $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm$

Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegel.*

a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm$, *b)* $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm$

c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm$, *d)* $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm$

e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm$, *f)* $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm$

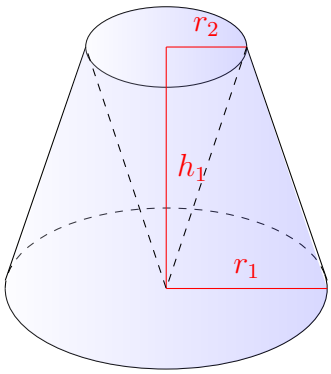
Aufgabe 3: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegelstümpfe.*

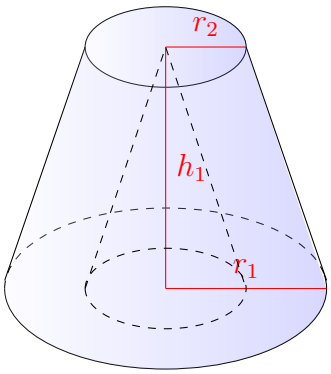
a) $r_1 = 4cm,\ r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm$, *b)* $r_1 = 3,5cm,\ r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm$,

c) $r_1 = 6cm,\ r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm$, *d)* $r_1 = \frac{1}{3}cm,\ r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm$,

e) $r_1 = 1cm,\ r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm$, *f)* $r_1 = \pi cm,\ r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm$.

Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O der Körper. (Es handelt sich um einen Kegelstumpf mit $h_1 = h_2 = 4cm$ und $r_1 = 4cm$ aus dem ein Kegel der Höhe h_1 und Radius $r_2 = 2cm$ herausgeschnitten wurde.)*





Aufgabe 5: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Zylinder.*

	1	2	3	4	5	6
r	5	4		4		$\frac{17}{4}$
h	7		5		$\frac{7}{3}$	
V		9	12	24	$\frac{22}{5}$	
O						$\frac{999}{10}$

Aufgabe 6: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Kegel.*

Aufgabe 7: *Beweise, dass die Gleichung für das Volumen eines Kegelstumpfes gilt. (Tipp: Benutze den Strahlensatz um einen Ausdruck für h_2 zu finden!)*

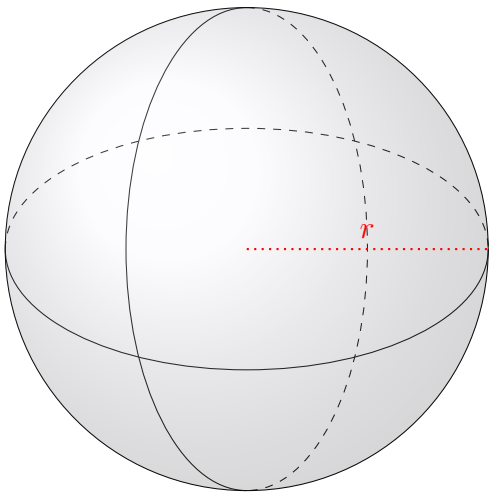
$$V = \frac{1}{3}G_1h_1 - \frac{1}{3}G_2h_2 = \frac{1}{3}\pi h_1\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.26) Lösungen zu Zylindern und Kegeln.

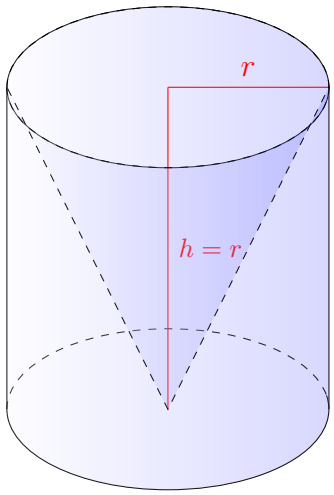
	1	2	3	4	5	6
r	5	4				2
h	7		5		$\frac{7}{3}$	
s		7	9	5,6		
V					$\frac{22}{5}$	
O				15		$\frac{1544}{5}$

3.11 Kugeln

Ähnlich wie beim zweidimensionalen *Kreis* die *Größen* über ein Näherungsverfahren (ein *iteratives* Verfahren - also schrittweise) bestimmt wurden, kann auch das *Volumen* und die *Oberfläche* einer *Kugel* mit *iterativen* Methoden bestimmt werden. Dabei ist eine *Kugel* ein Objekt, dass von seinem *Mittelpunkt* ausgehend in drei *Raumdimensionen* immer den gleichen *Abstand* zu seiner *Oberfläche* besitzt.



Um das *Volumen* zu berechnen, wird der *Satz von Cavalieri* benutzt, welcher aussagt, dass Körper, die auf jeder *Höhe* den gleichen *Flächeninhalt* besitzen auch das gleiche *Volumen* haben müssen. Somit muss eine *Halbkugel* das gleiche *Volumen* haben wir ein *Zylinder* aus dem ein *Kegel* mit *Radius* r und *Höhe* $h = r$ herausgeschnitten wurde:



Da wie bereits anhand von *Pyramiden* und *Quadern* gezeigt, passen drei der *Kegel* aus der Abbildung in den *Zylinder*. Somit ist das *Volumen* einer *Halbkugel* gegeben als $\frac{2}{3}\pi r^3$ und folglich, dass einer *Kugel* durch:

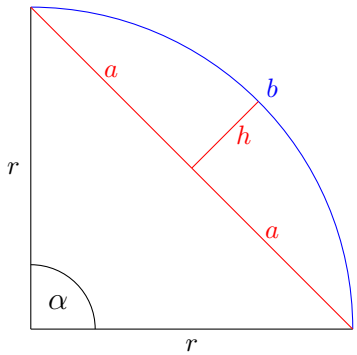
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3.37}$$

Während bei der *Oberfläche* wieder ein *iteratives* Verfahren verwendet werden kann, sodass

$$O = 4\pi r^2 \tag{3.38}$$

gefunden werden kann.

Wie auch schon beim *Kreis* gibt es bei der *Kugel* sogenannte *Kugelabschnitte* und *Kugelausschnitte*. Für den *Kugelausschnitt* gilt erneut, dass es sich um einen *Bruchteil* einer *Kugel* handelt.



Die Abbildung ist auf zwei *Dimensionen* reduziert, zeigt aber die wichtigen *Größen* für die Berechnung. So ergibt sich für den *Kugelausschnitt*:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 (2h + a) \quad . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Beim *Kugelabschnitt* muss der *Kegel* mit dem *Radius a* vom *Volumen subtrahiert* werden. Ebenso muss dies bei der *Oberfläche* berücksichtigt werden, sodass die *Grundfläche* des *Kegels* hinzu *addiert* werden muss, während die *Mantelfläche*[4] wegfällt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h^2 \left(3r - h\right) \\ O &= \pi \left(2rh + a^2\right) = \pi \left(4rh - h^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Da nun alle wichtigen *geometrischen* Körper und *Größen* eingeführt wurden, können diese nun auch alle vollständig berechnet werden. Um noch den Zusammenhang zwischen den *Winkeln* und den *Seitenlängen* eines Körpers in Verbindung zu bringen, wird im nachfolgenden Kapitel das Verständnis für *geometrische* Probleme weiter vertieft.

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 16.4 .

[4]Die Mantelfläche ist die Oberfläche ohne Grundfläche.

3.11.1 Übungsaufgaben zu Kugeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugeln.*

a) $r = 3cm$, *b)* $r = \pi cm$, *c)* $d = 4cm$,

d) $d = 0,5cm$, *e)* $r = 2,718cm$, *f)* $d = \frac{6}{7}cm$.

Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) $r = 4cm$ und $\alpha = 90°$ *b)* $r = 7cm$ und $\alpha = 45°$

c) $r = 3,33cm$ und $\alpha = 100°$ *d)* $r = \frac{32}{7}cm$ und $\alpha = 12°$

e) $r = \frac{23}{33}cm$ und $\alpha = 88°$ *f)* $r = \sqrt{8}cm$ und $\alpha = 177°$

g) $r = \ln 6cm$ und $\alpha = \frac{5}{6}\pi\,\text{rad}$ *h)* $r = ecm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 3: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) $r = 8cm$ und $\alpha = 90°$ *b)* $r = 3cm$ und $\alpha = 33°$

c) $r = 6,12cm$ und $\alpha = 134°$ *d)* $r = \frac{21}{4}cm$ und $\alpha = 5°$

e) $r = \frac{7}{13}cm$ und $\alpha = 87°$ *f)* $r = \sqrt{14}cm$ und $\alpha = 2°$

g) $r = \ln 5cm$ und $\alpha = \frac{3}{11}\pi\,\text{rad}$ *h)* $r = ecm$ und $\alpha = \frac{1}{9}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 4: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Kugeln.*

	1	2	3	4	5	6
r	11			8,62		
V		43			$\frac{137}{3}$	
O			541			$\frac{287}{5}$

Aufgabe 5: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.*

a) $r = 7cm$ und $a = 3cm$ *b)* $r = 3,4cm$ und $a = 1,1cm$

c) $r = 7,12cm$ und $a = 2,55cm$ *d)* $r = \frac{23}{4}cm$ und $a = \frac{7}{3}cm$

e) $r = \frac{17}{11}cm$ und $a = \frac{3}{5}cm$ *f)* $r = \sqrt{17}cm$ und $a = \frac{7}{6}cm$

g) $r = \pi cm$ und $a = \ln 6cm$ *h)* $r = ecm$ und $a = \sqrt{2}cm$

Aufgabe 6: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) $b = 9cm$ und $\alpha = 60°$ *b)* $b = 3,7cm$ und $\alpha = 44°$

c) $b = 6,6cm$ und $\alpha = 154°$ *d)* $b = \frac{22}{3}cm$ und $\alpha = 26°$

e) $b = \frac{7}{5}cm$ und $\alpha = 76°$ *f)* $b = \sqrt{22}cm$ und $\alpha = 64°$

g) $b = \ln 9cm$ und $\alpha = \frac{4}{5}\pi\,\text{rad}$ *h)* $b = ecm$ und $\alpha = \frac{4}{11}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 7: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)\ r = 7cm$	und $b = 5cm$	$b)\ r = 3cm$	und $b = 5,4cm$
$c)\ r = 6,42cm$	und $b = 8,7cm$	$d)\ r = \frac{33}{4}cm$	und $b = 13,15cm$
$e)\ r = \frac{13}{8}cm$	und $b = \frac{11}{4}cm$	$f)\ r = \sqrt{18}cm$	und $b = \frac{35}{6}cm$
$g)\ r = \ln 11cm$	und $b = \sqrt{23}cm$	$h)\ r = ecm$	und $b = \ln 8cm$

Aufgabe 8: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.*

$a)\ r = 5cm$	und $a = 2cm$	$b)\ r = 3,9cm$	und $a = 1,6cm$
$c)\ r = 6,62cm$	und $a = 2,85cm$	$d)\ r = \frac{27}{4}cm$	und $a = \frac{5}{3}cm$
$e)\ r = \frac{21}{9}cm$	und $a = \frac{8}{5}cm$	$f)\ r = \sqrt{19}cm$	und $a = \frac{11}{8}cm$
$g)\ r = 2\pi cm$	und $a = \ln 15cm$	$h)\ r = e^2cm$	und $a = \ln(22)cm$

Aufgabe 9: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)\ b = 8cm$	und $\alpha = 100°$	$b)\ b = 4,7cm$	und $\alpha = 83°$
$c)\ b = 9,2cm$	und $\alpha = 139°$	$d)\ b = \frac{55}{6}cm$	und $\alpha = 34°$
$e)\ b = \frac{11}{5}cm$	und $\alpha = 111°$	$f)\ b = \sqrt{26}cm$	und $\alpha = 72°$
$g)\ b = \ln 11cm$	und $\alpha = \frac{6}{7}\pi\,\text{rad}$	$h)\ b = ecm$	und $\alpha = \frac{11}{12}\pi\,\text{rad}$

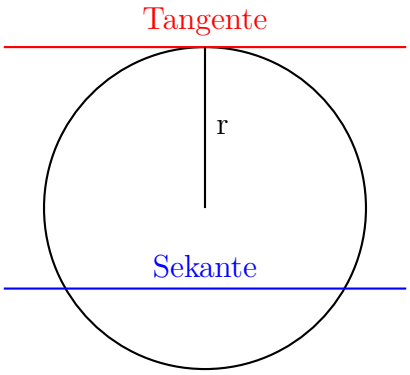
Aufgabe 10: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)\ r = 6,5cm$	und $b = 11cm$	$b)\ r = 5cm$	und $b = 7,3cm$
$c)\ r = 5,9cm$	und $b = 8,73cm$	$d)\ r = \frac{28}{5}cm$	und $b = 11,6cm$
$e)\ r = \frac{12}{7}cm$	und $b = \frac{16}{9}cm$	$f)\ r = \sqrt{31}cm$	und $b = \frac{53}{7}cm$
$g)\ r = \ln 13cm$	und $b = \sqrt{27}cm$	$h)\ r = ecm$	und $b = \ln 12,3cm$

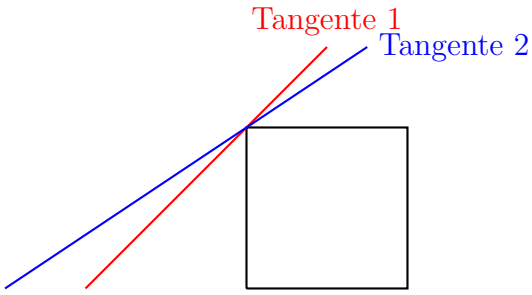
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.27) Lösungen zu Kugeln.

3.12 Tangenten und Sekanten

Am Ende dieses Kapitels werden noch zwei spezielle *Geraden* in Bezug auf andere Körper eingeführt. Die erste spezielle *Gerade* ist die *Sekante*, welche einen Körper schneidet. Dabei hat die *Sekante* oftmals mehr als nur einen *Schnittpunkt*, da ein *geometrisches* Objekt nach allen *Seiten* begrenzt ist. Die zweite spezielle *Geradenart* wird *Tangente* genannt, welche einen Körper nur **berührt** aber **nicht schneidet**. Somit hat eine *Tangente* nur einen *Berührpunkt* und steht bei einem *Kreis orthogonal* auf dem *Radius*.



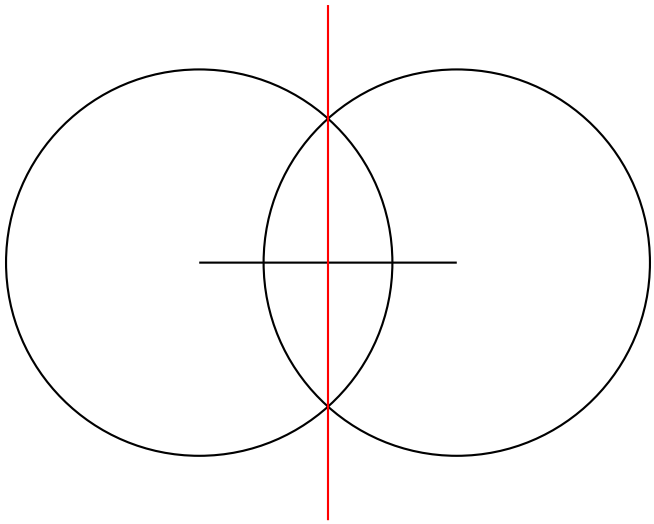
Die Abbildung zeigt anhand eines *Kreises* deutlich die Unterschiede dieser *Geradenarten*. Die *Tangente* ist dabei die wichtigere Art, da über diese in den nachfolgenden Kapiteln weitere mathematische Definitionen und Erkenntnisse gewonnen werden können. Bei Objekten oder Figuren, welche keine *Eckpunkte* verfügen, existiert zu jedem *Punkt* des Objekts oder der Figur nur eine einzige *Tangente*, während an *Eckpunkten* eine unendliche Anzahl an *Tangenten* existiert.



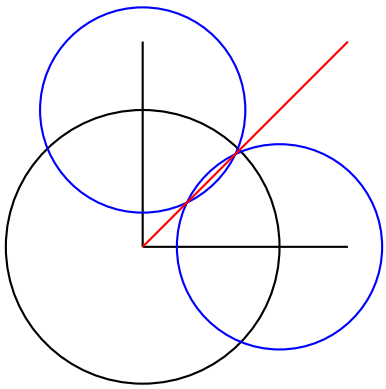
Die Abbildung zeigt, dass an jedem *Eckpunkt* mehrere *Tangenten* existieren. Der Unterschied zwischen *Eckpunkten* und „glatten“ Figuren wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ eine entscheidende Bedeutung zukommen.

3.13 Zirkelkonstruktionen

Mit Hilfe des Zirkels können viele spezielle Geraden konstruiert werden. In diesem Abschnitt werden solche häufig vorkommende Konstruktionen vorgestellt. Zu erst wird die Konstruktion einer Orthogonalen besprochen - Hierbei wird eine Strecke gezeichnet und an deren Enden ein Kreis mit dem Zirkel gezogen, welcher einen Radius haben soll, welcher größer ist als die Hälfte der zuvor gezeichneten Strecke. Wenn die beiden Schnittpunkte der Kreise verbunden werden, entsteht dadurch eine Orthogonale zur Strecke (in rot).

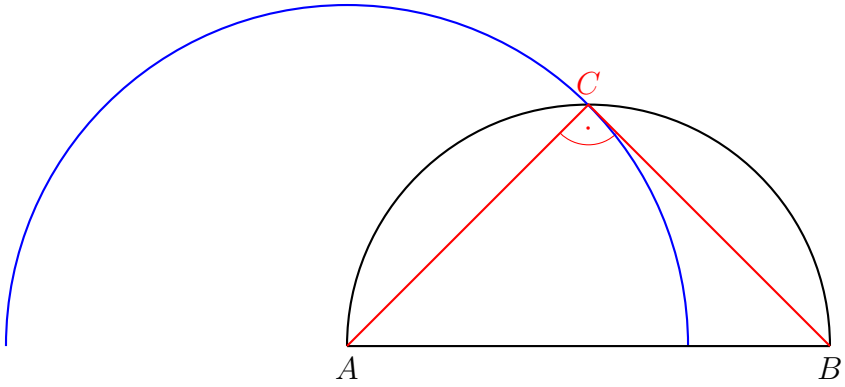


Wenn die beiden Kreise dabei den gleich großen Radius besitzen, wird damit eine spezielle Orthogonale gefunden, die sogenannte Mittelsenkrechte, welche die Strecke in zwei gleich lange Teilstrecken unterteilt.
Ebenso lässt sich ein Winkel mit dem Zirkel halbieren. Dazu wird im Schnittpunkt der Schenkel des Winkels ein Kreis mit dem Zirkel gezogen. An den Schnittpunkten des Kreises mit den Schenkeln werden zwei Kreise mit gleichem Radius (in blau) gezeichnet. Wenn die Schnittpunkt dieser Kreise mit einer Geraden verbunden werden, entsteht dadurch die Winkelhalbierende des Winkels (in rot).

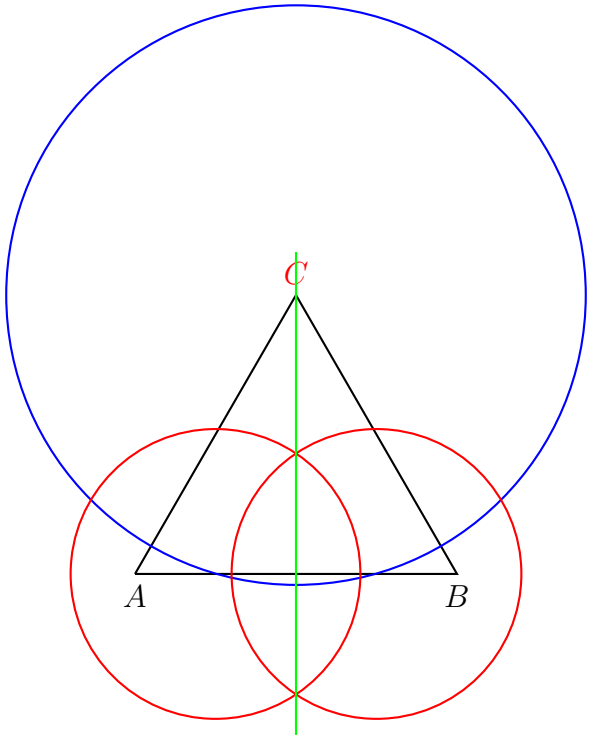


Besonders für das Dreieck existieren viele Zirkelkonstruktionen für spezielle Strecken. So kann mit dem Satz des Thales immer ein rechtwinkliges Dreieck ohne großen Aufwand konstruiert werden. Dazu wird die längste Seite gezeichnet und in der Mitte dieser Seite des Dreiecks ein Halbkreis gezogen, sodass dieser bei den Eckpunkten der gezeichneten Seite endet. Anschließend kann eine Seite durch abmessen eines Winkels eingezeichnet werden bis diese den Kreis berührt,

sodass alle Eckpunkte des rechtwinkligen Dreiecks somit ermittelt sind. Aber auch eine Länge der Seite kann eingezeichnet werden, indem diese Länge als Zirkelradius eingestellt und ein Kreis mit dem Mittelpunkt an dem zutreffenden Eckpunkt gezeichnet wird. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist dann der gesuchte Eckpunkt des rechtwinkligen Dreieckes.



In einem Dreieck können auch die Höhen mit Hilfe des Zirkels konstruiert werden. So wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Eckpunkt (in blau) zeichnet. An den Schnittpunkten des Kreises mit der gegenüberliegenden (manchmal verlängerten) Seite werden anschließend Kreise mit dem gleichen Radius (in rot) gezogen. Werden die Schnittpunkte der beiden Kreisen mit den gleichen Radius mit einer Gerade verbunden ist die Höhe (in grün) gefunden.



Mittels dieser Konstruktionen können über Kombination alle weiteren Größen konstruiert werden. So kann ein Dreieck gezeichnet werden, indem an den Enden einer Seiten Kreise mit jeweils des Radius mit der Länge der jeweiligen Seiten gezogen werden. Der Schnittpunkt dieser Kreise ergibt dann den letzten Eckpunkt. Auch ein regelmäßiges Sechseck kann leicht konstruiert werden, indem ein Kreis gezeichnet wird und anschließend an einem beliebigen Punkt auf dem Kreis als Mittelpunkt wieder ein Kreis mit gleichem Radius gezogen wird. Die beiden Schnittpunkte bilden dann wieder neue Mittelpunkt für weitere Kreise mit diesem Radius, solange

bis sechs Punkte bestimmt wurden. Wenn diese Punkte verbunden werden, entsteht ein regelmäßiges Sechseck. Wenn jeweils ein Punkt ausgelassen wird, entsteht dadurch wiederum ein gleichmäßiges Dreieck.

3.13.1 Übungsaufgaben zu Zirkelkonstruktionen

Aufgabe 1: *Zeichne folgende Strecken s und halbiere diese mit einer orthogonalen Strecke mit Hilfe eines Zirkels.* (Keine Lösung!)

$a)\ s = 4cm$	$b)\ s = 6cm$	$c)\ s = 8cm$
$d)\ s = 5,5cm$	$e)\ s = 4,8cm$	$f)\ s = 6,1cm$
$g)\ s = 8,2cm$	$h)\ s = 5,9cm$	$i)\ s = 6,4cm$
$j)\ s = 4,7cm$	$k)\ s = 5,3cm$	$l)\ s = 7,2cm$

Aufgabe 2: *Zeichne folgende Winkel α und halbiere diese mit Hilfe eines Zirkels.* (Keine Lösung!)

$a)\ \alpha = 90°$	$b)\ \alpha = 45°$	$c)\ \alpha = 120°$
$d)\ \alpha = 55°$	$e)\ \alpha = 110°$	$f)\ \alpha = 160°$
$g)\ \alpha = 20°$	$h)\ \alpha = 10°$	$i)\ \alpha = 80°$
$j)\ \alpha = 33°$	$k)\ \alpha = 142°$	$l)\ \alpha = 7°$

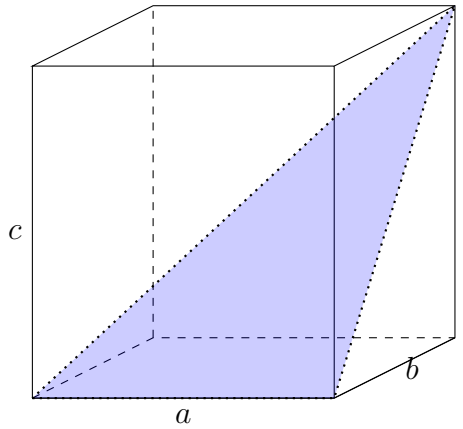
Aufgabe 3: *Zeichne die Dreiecke und konstruiere alle Winkelhalbierenden, alle Höhen und alle Mittelsenkrechten. Verbinde und messe die Strecke zwischen ihren Schnittpunkten. Beschreibe dann die Auffälligkeit der Verhältnisse der Strecken zwischen den ermittelten Schnittpunkten. Konstruiere anschließend alle Winkelhalbierenden. Zeichne einen Kreis mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden als Mittelpunkt, der alle Seiten tangiert. Zeichne danach einen Kreis mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten als Mittelpunkt, der alle Ecken des Dreiecks berührt.* (Keine Lösung der Zeichnungen!)

$a)\ a = 9cm\ ;\ b = 8cm$ und $\gamma = 30°$	$b)\ c = 10cm\ ;\ b = 7cm$ und $\alpha = 50°$
$c)\ a = 9cm\ ;\ b = 11cm$ und $\gamma = 65°$	$d)\ a = 8cm\ ;\ c = 10cm$ und $\beta = 80°$
$e)\ a = 7,5cm\ ;\ c = 9cm$ und $b = 6cm$	$f)\ a = 5cm\ ;\ c = 8cm$ und $b = 5cm$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.27) Lösungen zu Zirkelkonstruktionen.

3.14 Gemischte Geometrieaufgaben

Aufgabe 1: *Berechne den Flächeninhalt und die Hypotenuse des markierten Dreieckes.*



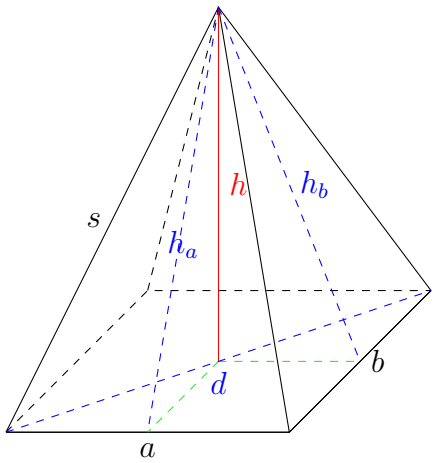
Der Quader besitzt

$a)$ eine Länge a von $12cm$, eine Breite b von $7cm$ und eine Höhe c von $15cm$.

$b)$ eine Länge a von $13,3cm$, eine Breite b von $6,24cm$ und eine Höhe c von $17,41cm$.

$c)$ eine Länge a von $24,73cm$, eine Breite b von $\sqrt{42}cm$ und eine Höhe c von $0,214m$.

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen der Pyramide.*



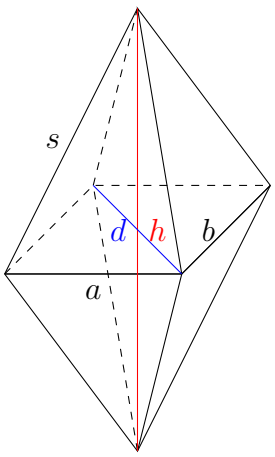
Die Pyramide besitzt

$a)$ eine Seitenhöhe h_a von $8cm$, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $4,5cm$.

$b)$ eine Kantenlänge s von $11,3cm$, eine Breite b von $5,17cm$ und eine Länge a von $7,65cm$.

$c)$ eine Kantenlänge s von $12,7cm$, eine Breite b von $\sqrt{29}cm$ und eine Grunddiagonalenlänge d von $8,7cm$.

Aufgabe 3: *Berechne das Volumen des Oktaeders.*



Das Oktaeder besitzt

$a)$ eine Höhe h von $9,25cm$, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $6,5cm$.

$b)$ eine Kantenlänge s von $12,7cm$, eine Breite b von $4,8cm$ und eine Länge a von $5,3cm$.

$c)$ eine Kantenlänge s von $8,93cm$, eine Breite b von $\sqrt{56}cm$ und eine Mitteldiagonalenlänge d von $0,136m$.

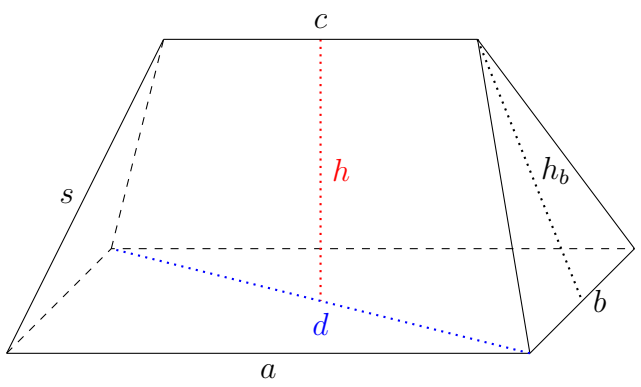
Aufgabe 4: *In eine Kugel mit dem Radius $r = 14cm$ soll ein Würfel positioniert werden, dessen Ecken die Kugeloberfläche tangieren. Der Würfel soll aus Iridium mit einer Dichte von $\rho = 22,56\frac{g}{cm^3}$ gebaut werden. Bestimme die Kantenlänge des Würfels und bestimme sein Gewicht.*

Aufgabe 5: *Ein quaderförmiger Kuchenteig mit den Maßen $a = 63cm$, $b = 31,5cm$ und $c = 2,25cm$ soll aufgerollt entlang von b zu einem Zylinder aufgerollt werden. Welchen Radius r hat dann die Grundfläche des Zylinders?*

Aufgabe 6: *Ein zylinderförmige Kuchenteigrolle mit den Maßen $r = 12cm$ und $h = 45cm$ soll in 12 Teile zerschnitten werden. Aus diesen Stücken sollen Kugeln geformt werden. Welchen Radius r haben diese Kugeln?*

Aufgabe 7: *In eine quaderförmige Karton sollen 12 Kugel mit einem Radius von $r = 3,5cm$ verpackt werden. Berechne die Fläche, die minimal benötigt wird um 12 Kugeln zu verpacken und berechne wie viel Prozent Luftanteil sich der Verpackung befindet.*

Aufgabe 8: *Berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers.*



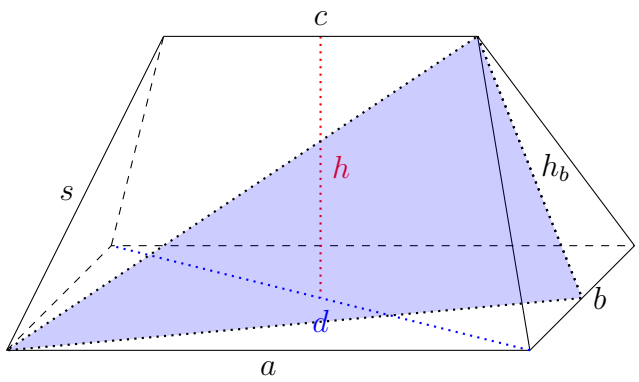
Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $3,3cm$, eine Länge a von $6,5cm$ und eine Breite $4,2cm$ mit der Strecke $c = 2cm$.

b) eine Seitenhöhe h_b von $4cm$, eine Breite b von $4,8cm$ und eine Länge a von $5,3cm$ mit der Strecke $c = 3,2cm$.

c) eine Kantenlänge s von $7,27cm$, eine Breite b von $3,62cm$ und eine Diagonalenlänge d von $9,28cm$ mit der Strecke $c = 5,12cm$.

Aufgabe 9: *Berechne die Fläche des eingezeichneten Dreiecks.*



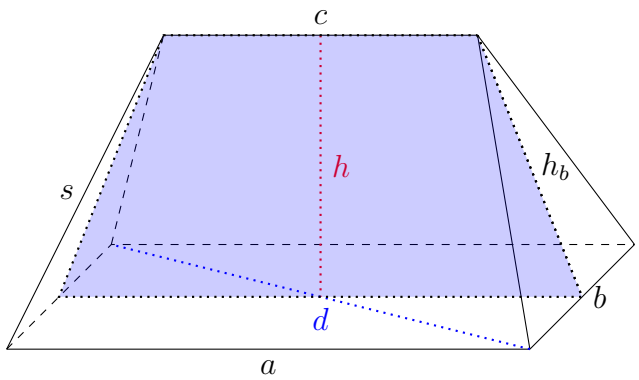
Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $2,64cm$, eine Länge a von $5,65cm$ und eine Breite $4,06cm$ mit der Strecke $c = 3,94cm$.

b) eine Seitenhöhe s von $3,58cm$, eine Breite b von $2,58cm$ und eine Länge a von $6,21cm$ mit der Strecke $c = 4,52cm$.

c) eine Kantenlänge s von $\sqrt{50}cm$, eine Breite b von $\sqrt{13}cm$ und eine Diagonalenlänge d von $\sqrt{70}cm$ mit der Strecke $c = \sqrt{27}cm$.

Aufgabe 10: *Berechne die Fläche des eingezeichneten Trapez.*



Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $3,74cm$, eine Länge a von $6,12cm$ und eine Breite $4,34cm$ mit der Strecke $c = 4,28cm$.

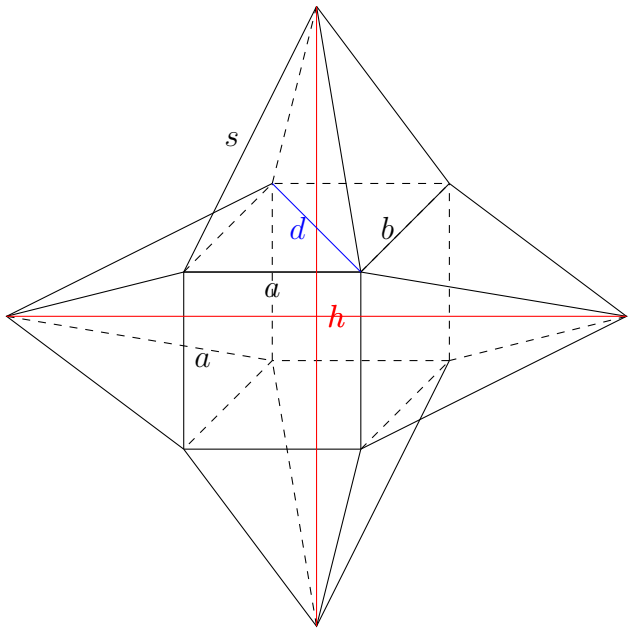
b) eine Seitenhöhe s von $3,77cm$, eine Breite b von $2,67cm$ und eine Länge a von $7,55cm$ mit der Strecke $c = 5,43cm$.

c) eine Kantenlänge s von $\sqrt{66}cm$, eine Breite b von $\sqrt{17}cm$ und eine Diagonalenlänge d von $\sqrt{83}cm$ mit der Strecke $c = 0,036m$.

Aufgabe 11: *Aus einem Zylinder mit dem Radius $r = 4cm$ und einer Höhe $h = 9cm$ soll an den Enden ein Kegelstumpf mit dem Grundflächenradius $r_1 = 3cm$ und Abschnittsradius $r_2 = 2,33cm$ mit einer Höhe von $4,5cm$ herausgeschnitten werden. Berechne das Volumen des resultierenden Körpers.*

Aufgabe 12: *Aus einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit der Seitenlänge $a = 6,6cm$ und einer Höhe von $8,2cm$ soll ein Zylinder mit maximalen Volumen geschnitten werden. Wie groß ist das Volumen des größtmöglichen Zylinders?*

Aufgabe 13: *Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers.*



Der Körper besitzt

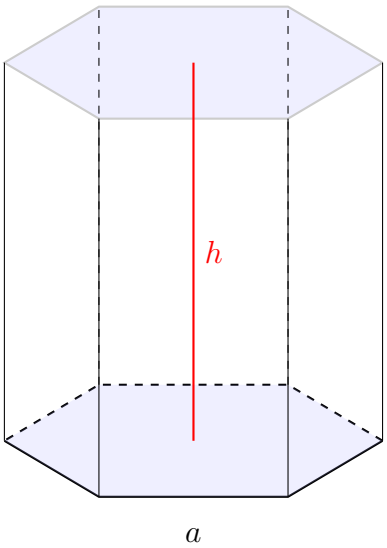
a) eine Kantenlänge s von $4,25cm$, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $5,1cm$.

b) eine Kantenlänge s von $9,42cm$, eine Breite b von $5,25cm$ und eine Länge a von $3,73cm$.

c) einen Würfel in der Mitte mit einer Kantenlänge von 3cm und einer Kantenlänge s von $0,041m$.

Aufgabe 14: *In einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 7,17cm$ soll ein Oktaeder so gestellt werden, dass das Oktaeder mit seinen Ecken die Seiten des alten Würfels in der Mitte berührt. Wie groß ist das Volumen des Oktaeders? Wie groß wäre das Volumen eines Würfels, welchen man auf die gleiche Art und Weise in das Oktaeder stellt? Welche Verhältnisse lassen sich aufstellen?*

Aufgabe 15: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Hexagonprisma.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche und

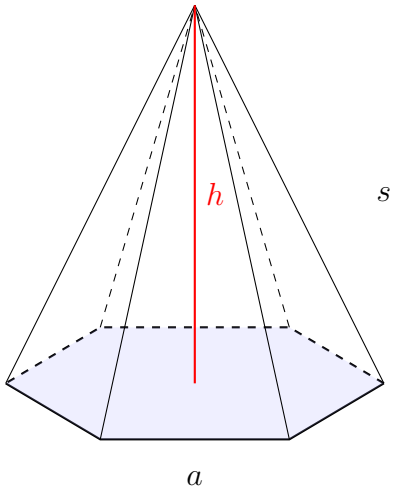
a) eine Höhe h von $7cm$ und eine Grundfläche G von $30cm^2$.

b) eine Höhe h von $3,4cm$ und eine Kantenlänge vom Hexagon a von $2,2cm$.

c) eine Höhe h von $6,4cm$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 5,5cm$ liegen.

d) eine Höhe h von $5,8cm$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 13cm$ liegen.

Aufgabe 16: *Berechne das Volumen und die Oberfläche von der Hexagonpyramide.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche und

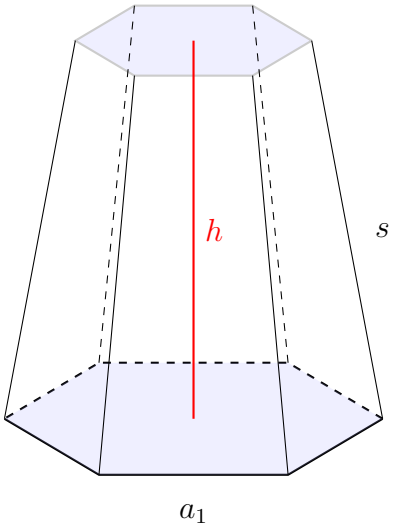
a) eine Höhe h von $4cm$ und eine Grundfläche G von $12cm^2$.

b) eine Höhe h von $6,2cm$ und eine Kantenlänge vom Hexagon a von $3cm$.

c) eine Höhe h von $78mm$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 2,4cm$ liegen.

d) eine Kante s von $1,25dm$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 3,7cm$ liegen.

Aufgabe 17: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Hexagonpyramidenstumpf.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grund- und Abschnittsfläche und

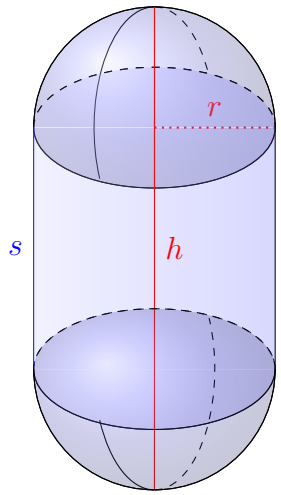
a) eine Höhe h von $3cm$, eine Grundfläche G_1 von $12cm^2$ und eine Abschnittsfläche G_2 von $6cm^2$.

b) eine Höhe h von $4cm$, eine Kantenlänge vom unteren Hexagon a_1 von $2cm$ und vom oberen Hexagon a_2 von $1,3cm$.

c) eine Höhe h von $6cm$ und eine Grundfläche G_1, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r_1 = 3,2cm$ liegen, während die Abschnittsfläche G_2 ein Hexagon aufweist mit einer Kantenlänge a_2 von $0,5cm$.

d) eine Kante s von $14,5cm$ und eine Grundfläche G_1, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d_1 = 3,7cm$ liegen, während die Abschnittsfläche G_2 ein Hexagon besitzt, dessen Eckpunkte auf einen Kreis mit Radius $r_2 = 0,6cm$ liegen.

Aufgabe 18: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Körper.*



Der Körper besitzt

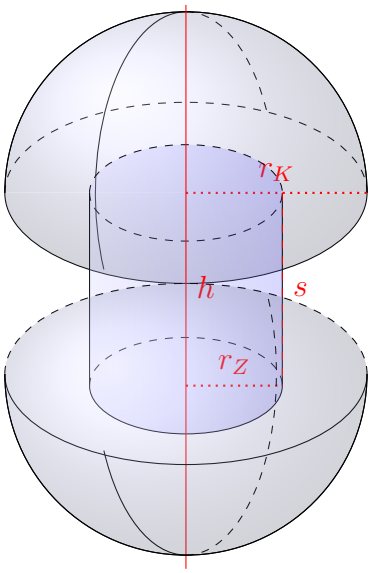
a) einen Radius r von $3cm$ und einen Kantenlänge s von $4cm$.

b) einen Radius r von $5,6cm$ und einen Kantenlänge s von $3,2cm$.

c) einen Radius r von $2,6cm$ und eine Höhe h von $9,3cm$.

d) einen Kantenlänge s von $6,74cm$ und eine Höhe h von $11,23cm$.

Aufgabe 19: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Körper.*



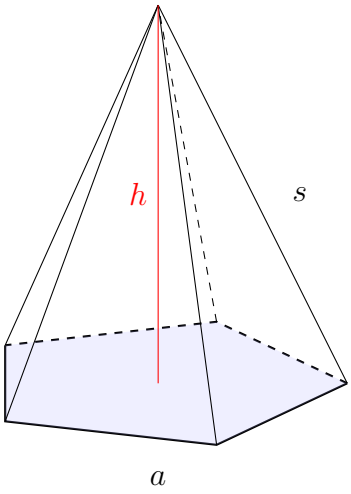
Der Körper besitzt

a) einen Zylinderradius r_Z von $2cm$, eine Zylinderhöhe s von $4cm$ und einen Halbkugelradius r_K von $4,5cm$.

b) einen Zylinderradius r_Z von $3,3cm$, eine Höhe h von $10,9cm$ und einen Halbkugelradius r_K, der um ein Achtel größer ist als der Zylinderradius r_Z.

c) einen Zylinderradius r_Z, der dreimal kleiner ist als der Halbkugelradius r_K, der wiederum viermal kleiner ist als die Höhe h von $12,45cm$.

Aufgabe 20: *Berechne das Volumen und die Oberfläche von der Pentagonpyramide.*



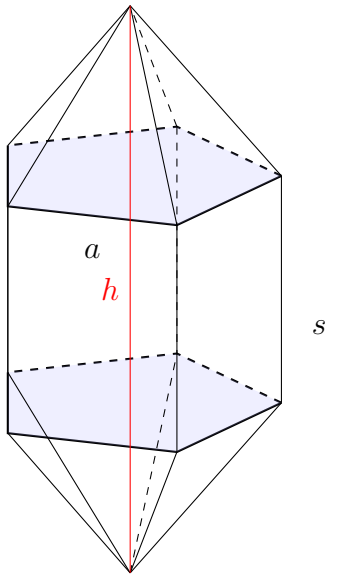
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundseite

a) mit einer Kantenlänge a von $2cm$ und einer Höhe h von $6cm$.

b) mit einer Kantenlänge s von $7,3cm$ und einer Höhe h von $5,9cm$.

c) mit einer Kantenlänge s von $11,2cm$ und Grundfläche, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit Radius $r = 1,7cm$ liegen.

Aufgabe 21: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom pentagonischen Körper.*



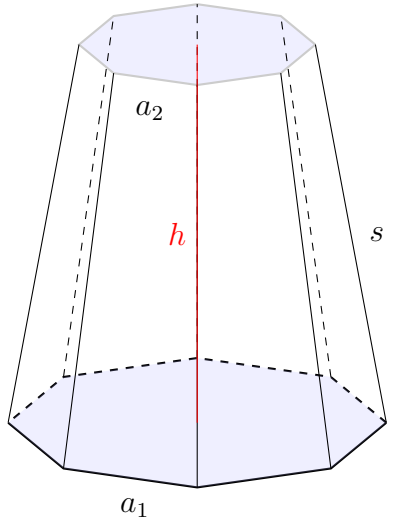
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche

a) mit einer Kantenlänge $a = 0,4cm$ und einer Höhe $h = 2,3cm$, welche zu gleichen Teilen in den Körpersegmenten aufgeteilt ist.

b) mit einer Kantenlänge $a = 1,05cm$ und einer Höhe $h = 7,34cm$ sowie einer Kantenlänge $s = 2,8cm$.

c) mit der Eigenschaft, dass die Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 4,3cm$ liegen. Außerdem besitzt der Körper einer Höhe $h = 5,8cm$ sowie eine Kantenlänge $s = 0,65cm$.

Aufgabe 22: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Octagonpyramidenstumpf.*



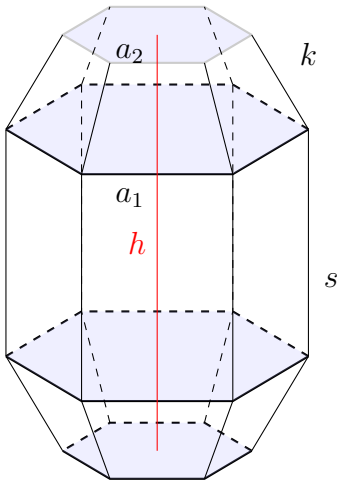
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche

a) mit einer Kantenlänge $a_1 = 3,2cm$, einer Höhe $h = 11,1cm$ und eine Abschnittsfläche G_2 von $6,13cm^2$.

b) mit einer Kantenlänge $a_1 = 6,72cm$, einer Höhe $h = 4,53cm$ sowie einer Kantenlänge $s = 5,18cm$.

c) mit der Eigenschaft, dass die Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 4,3cm$ liegen. Außerdem besitzt der Körper einer Höhe $h = 13,7cm$ sowie eine Kantenlänge der Abschnittsfläche $a_2 = 0,77cm$.

Aufgabe 23: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom hexagonischen Körper.*

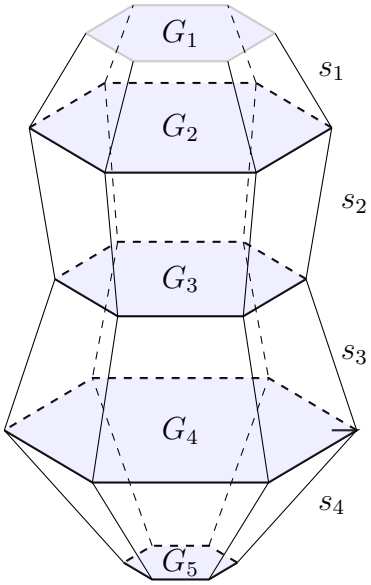


Der Körper besitzt gleichmäßige Querschnitts- und Abschnittsflächen und ist in horizontal symmetrisch.

a) Die Kantenlänge a_1 beträgt $2,05cm$ und ist somit doppelt so lang wie die Kantenlänge a_2. Die Höhe h des Körpers ist doppelt so lang wie die Kante s, welche $3,3cm$ misst.

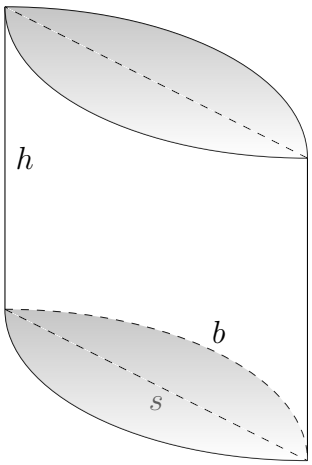
b) Die Kantenlänge k beträgt $1,8cm$, während die Kante s eine Länge von $4,2cm$ hat. Die Querschnittsfläche G_1 besitzt einen Umkreis mit dem Radius $r_1 = 2,6cm$ und die Abschnittsfläche G_2 einen Umkreis mit dem Durchmesser $d_2 = 1,9cm$.

Aufgabe 24: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom hexagonischen Körper.*

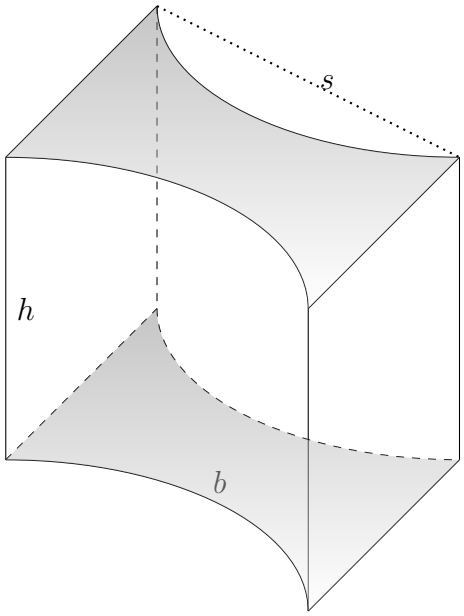


Der Körper besteht aus gleichmäßigen Querschnittsflächen, wobei lediglich die Kantenlängen durch Messungen bekannt sind. Die Messungen ergaben: $a_1 = 0,7cm$, $a_2 = 2,3cm$, $a_3 = 1,9cm$, $a_4 = 2,6cm$ und $a_5 = 0,3cm$. Die Kantenlängen konnten ebenfalls gemessen werden: $s_1 = 1,2cm$, $s_2 = 1,5cm$, $s_3 = 1,6cm$ und $s_4 = 1,1cm$.

Aufgabe 25: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom bikonvexen Körper.*



Aufgabe 26: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom bikonkaven Körper.*

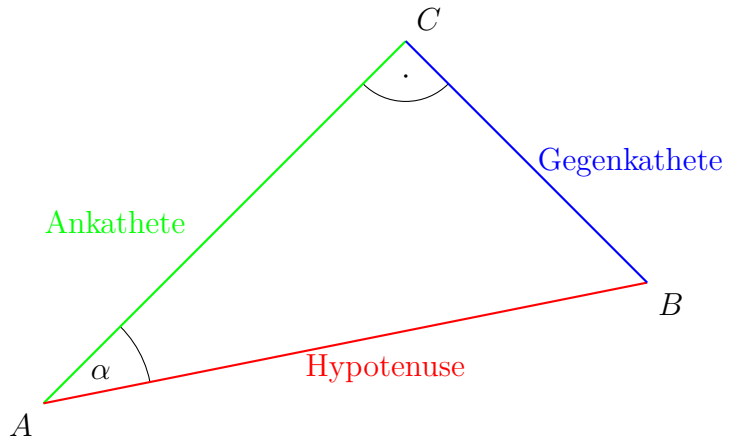


Weitere Behauptung zur Geometrie zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.28) Lösungen zu den gemischten Geometrieaufgaben.

4 Trigonometrie

Die *Trigonometrie* beschreibt den Zusammenhang von *Winkeln* mit *Seitenlängen* von *geometrischen* Objekten. Dazu wird sich in erster Linie auf das *rechtwinklige Dreieck* konzentriert, da jede *Fläche* außer kreisartige Objekte durch *rechtwinklige Dreiecke darstellbar* sind. Dabei wird ein *rechtwinkliges Dreieck* betrachtet mit einem *Winkel* α.



Wie die Abbildung zeigt, werden dann die *Seiten* im Bezug auf den *Winkel* α benannt. Dabei ist die *Ankathete* immer die *Kathete* des *rechtwinkligen Dreiecks*, welche sich am zu untersuchenden *Winkel* befindet. Nun wird ein Verhältnis aufgestellt, *definiert* und mit einem Namen versehen:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } \alpha = \sin(\alpha) = \sin\alpha \tag{4.1}$$

Dabei kann auch der *Winkel* β um den Eckpunkt B über dieses Verhältnis bestimmt werden, da wegen der *Winkelsumme* es *Dreiecks* bei einem *rechtwinkligen Dreieck* die *Winkelbeziehung* $90° - \alpha = \beta$ gilt. Somit muss auch die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } 90° - \beta = \sin(90° - \beta) \tag{4.2}$$

Allerdings wäre dann die *Gegenkathete* von α die *Ankathete* von β, sodass eine neue *Definition* getroffen werden kann:

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Kosinus vom Winkel } \alpha = \cos(\alpha) = \cos\alpha \quad , \tag{4.3}$$

wobei $\sin(90° + \delta) = \cos(\delta)$ gilt. Dies bedeutet, dass der *Kosinus* nur eine bequeme abkürzende Schreibweise und nichts weiter als ein *Sinus* ist, der um 90° verschoben wurde. Allerdings zeigt sich, dass sich diese Abkürzung lohnt, vor allem wenn der *Sinus* und der *Kosinus* genauer untersucht werden, was im Kapitel „Funktionen“ und auch „Differentation und Integration“ geschieht.

Wenn nun *Sinus* und *Kosinus* in ein Verhältnis gesetzt werden, ergeben sich weitere Abkürzungen, welche sich lohnen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} : \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} \\ &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ &:= \text{Tangens vom Winkel } \alpha = \tan(\alpha) = \tan\alpha \quad ,\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei durch die *Umkehrung* des Verhältnisses der *Kotangens* zu definieren ist:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} := \cot(\alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad . \tag{4.5}$$

Mit diesen *Definitionen* kann mit Hilfe eines *Winkels* und einer *Seitenlänge* alles in einem *rechtwinkligen Dreieck* berechnet werden. Da die *Hypotenuse* immer größer sein muss als die *Ankathete* ist der *Sinus* und somit auch der *Kosinus* bei der Betrachtung des *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen den Zahlen 1 und 0 stets vorzufinden. Das wiederum bedeutet, dass die Werte vom *Tangens* und *Kotangens* bei der *geometrischen* Betrachtung eines *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen 0 und ∞ liegen können.

Um einen *Winkel* mit diesen *trigonometrischen Funktionen* aus zwei *Seitenlängen* bestimmen zu können, muss auch die *Umkehrung* dieser *Funktion* eingeführt werden, welche in diesem Abschnitt gegeben sei als:

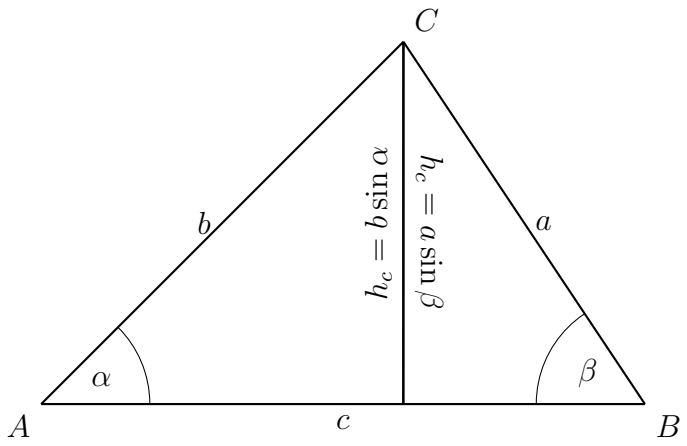
$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \\ \alpha &= \cot^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{b}{a}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei diese *Funktionen Arcussinus*, *Arcuskosinus*, *Arcustangens* und *Arcuskotangens* genannt werden. Für sie gilt für die *Äquivalenzumformung*:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \qquad |\arcsin \\ \arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mehr Details zu diesen *Umkehrungen* der *trigonometrischen Funktionen* werden im Abschnitt „Umkehrfunktionen“ und „Trigonometrische Funktionen“ zu finden sein. Es genügt zu diesem Zeitpunkt das Wissen, dass *Arcus-Funktionen* die *trigonometrischen Funktionen* aufheben und wo sie auf dem Taschenrechner zu finden sind.

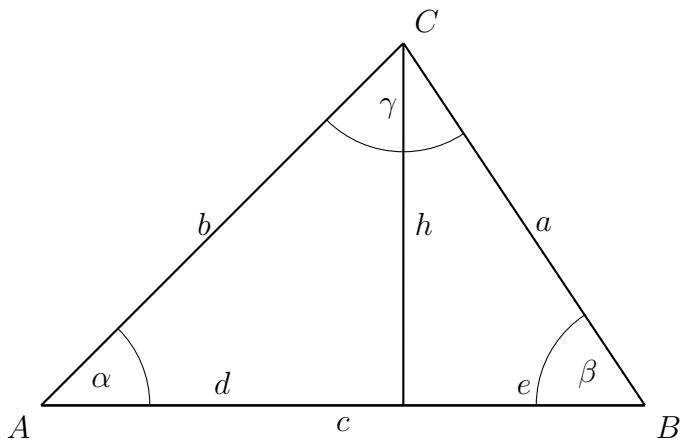
Mittels der *trigonometrischen Funktionen* kann auch bei einem beliebigen *Dreieck* jede *Seite* und jeder *Winkel* bestimmt werden. Dazu wird eine *Höhe* h_c konstruiert und diese dann über die *trigonometrischen Funktionen* anhand der beiden entstandenen *rechtwinkligen Dreiecke* berechnet.



Deutlich wird, dass die *Höhe* h_c über beide *Dreiecke* bestimmt werden kann. Daraus folgt, dass beide Ausdrücke gleichgesetzt werden können. Dies ist bekannt als der *Sinussatz*.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} \tag{4.8}$$

Ähnlich verhält sich dies beim so genannten *Kosinussatz*, welcher ebenso über ein beliebiges *Dreieck* mit einer *Höhe* h_c hergeleitet werden kann.



So kann die *Höhe* h über den *Satz des Pythagoras* bestimmt werden und gilt als Ausgangspunkt.

$$b^2 = d^2 + h^2 \tag{4.9}$$

Für d^2 und h^2 lassen sich dann die folgenden Ausdrücke finden:

$$\begin{aligned} d^2 &= (c-e)^2 = c^2 - 2ce + e^2 \\ h^2 &= a^2 - e^2 \quad , \end{aligned} \tag{4.10}$$

welche mit $a \cos\beta = e$ in die Gleichung für b^2 eingesetzt wird.

$$b^2 = d^2 + h^2 = c^2 - 2ce + e^2 + a^2 - e^2 = a^2 + c^2 - 2ce = a^2 + c^2 - 2ca\cos\beta \tag{4.11}$$

Diese Gleichung kann auch für die anderen *Seiten* beziehungsweise *Winkel* hergeleitet werden, sodass sich daraus die drei Versionen des *Kosinussatzes* ergeben.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 – 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 – 2ac\cos\beta \\ c^2 &= b^2 + a^2 – 2ba\cos\gamma \end{aligned} \tag{4.12}$$

Hierbei bleibt zu beachten, dass der *Winkel* α der *Seite* a gegenüberliegend ist. Generell kann der Schüler mit dem Wissen rund um das *rechtwinklige Dreieck* alle Probleme lösen und benötigt hierzu nicht den *Sinus*- und *Kosinussatz*. Allerdings ist es in Prüfungssituationen ratsam über diese Sätze zu kennen, da sie in seltenen Fällen zu einer Zeitersparnis führen.

4.0.1 Übungsaufgaben zur Trigonometrie

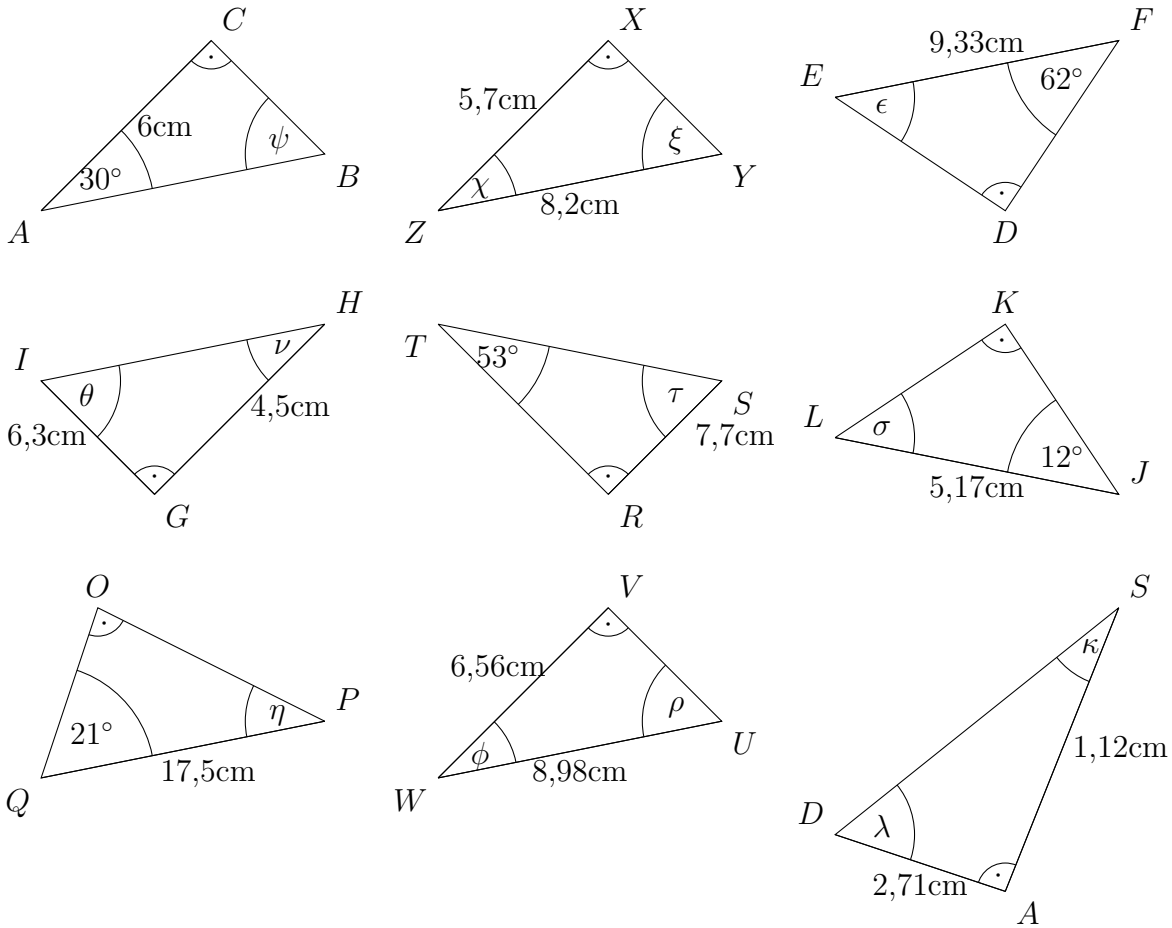
Aufgabe 1: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen rechtwinkligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 7cm$ und $c = 11cm$
b) $a = 4cm$ und $b = 6cm$
c) $\alpha = 55°$ und $c = 9cm$
d) $a = 5,35cm$ und $\beta = 18°$
e) $b = 14cm$ und $\beta = 81°$
f) $a = \pi cm$ und $\alpha = 27,18°$
g) $c = \sqrt{60}cm$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi\text{rad}$
h) $c = \frac{83}{17}cm$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\text{rad}$

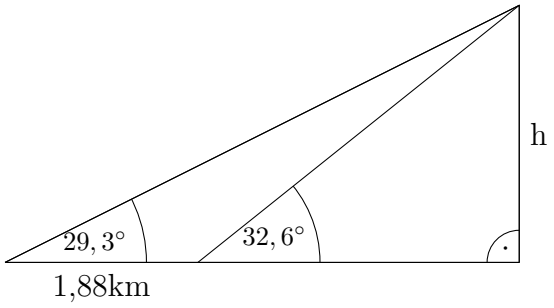
Aufgabe 2: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 4cm$, $b = 6cm$ und $\gamma = 60°$
b) $a = 5cm$, $c = 8cm$ und $\beta = 34°$
c) $c = 90mm$, $b = 0,6dm$ und $\alpha = 72°$
d) $a = \frac{3}{4}dm$, $b = \frac{50}{6}cm$ und $\gamma = 4°$
e) $b = 3cm$, $\gamma = 45°$ und $\beta = 23°$
f) $c = \frac{5}{4}cm$, $\alpha = 64°$ und $\gamma = 18°$
g) $a = 55,4km$, $\alpha = 86,3°$ und $\beta = 47°$
h) $c = \sqrt{17}$, $\gamma = 94,3°$ und $\beta = 36,6°$

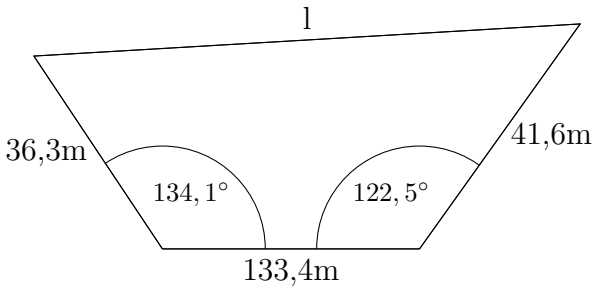
Aufgabe 3: *Bestimme alle unbekannten Winkel und Seiten. (Die Skizzen entsprechen nicht den realen Werten.) Beschrifte zu nächst das Dreieck komplett und finde für jeden Winkel die Bezeichnung der Katheten heraus.*



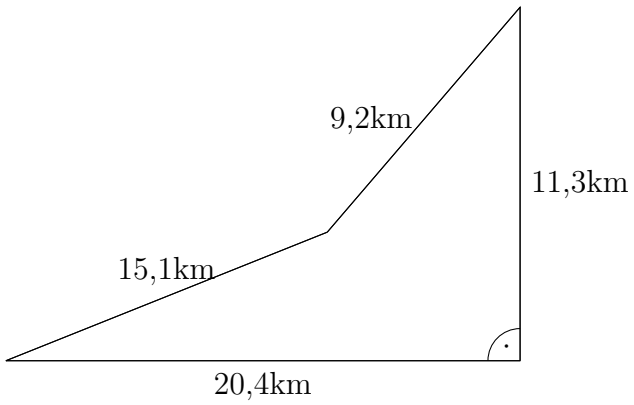
Aufgabe 4: *Nach einem Erdbeben veränderte sich ein Gebirgszug. Eine Gruppe von Landvermessern sollen die neue Höhe des größten Berges der Region messen und haben nach einigen Messungen eine Skizze mit ihren Messwerten angelegt. Wie hoch ist der Berg?*



Aufgabe 5: *Eine Autobahnbrücke soll über ein Flusstal gebaut werden. Nach einer neuen Verordnung darf eine Autobahn nicht mehr als 5% Steigung aufweisen. Die Ingenieure haben eine vereinfachte Skizze mit den bekannten Werten erstellt. Wie lang ist die Autobahnbrücke und darf sie gebaut werden?*

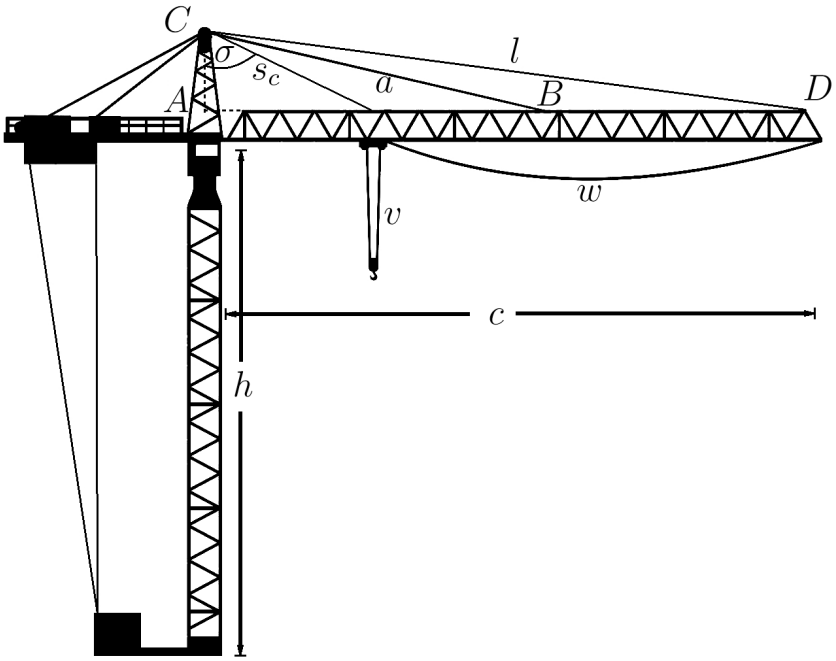


Aufgabe 6: *Ein Flugzeug hat zwei Phasen beim Aufstieg wie es in der Skizze dargestellt ist. Mit welchen Neigungswinkeln relativ zum Erdboden steigt das Flugzeug auf?*



Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*

a) Bestimme die Länge des Tragseils a. Dabei besitzt das Tragseil s_c eine Länge von $11m$, welches eine Seitenhalbierende des Dreiecks ΔABC ist. Das Tragseil s_c steht dabei in einem Winkel σ von $55°$ zum Kranturm.



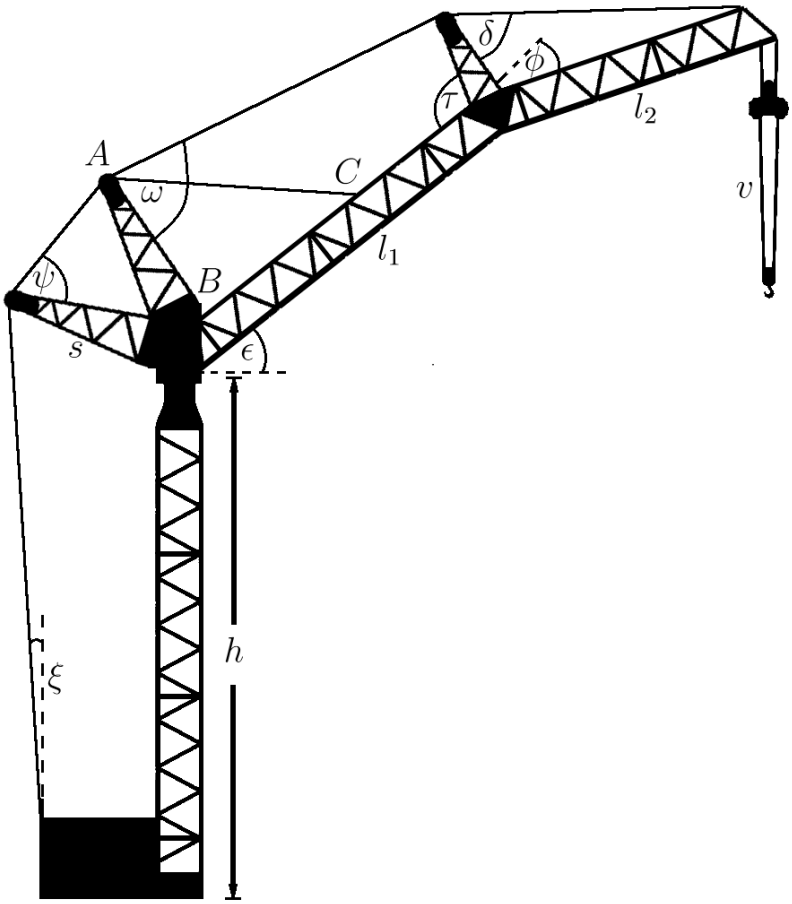
b) Bestimme die Länge des Auslegers $g = \overline{AD}$. Das Dreiecks ΔCBD besitzt einen Winkel δ am Punkt D von $6,5727°$.

c) Bestimme die Höhe des Auslegers h. Der Kran besitzt ein Gegengewicht, welches $5m$ von der Mitte des Kranhäuschen entfernt ist. Die vertikale Stützstrebe ist mit Tragseilen an diesem Gewicht verbunden. Das Gegengewicht hat eine Länge von $2,25m$. Das Gegengewicht ist zusätzlich mit einem Bodengewicht mit zwei Stahlseilen verbunden, die einen Winkel von $4,289°$ zu einander aufweisen. Dabei ist sind die Tragseile direkt am Boden beim Gewicht befestigt.

d) Bestimme die Gesamtlänge aller Seile mit Ausnahme der Seile v und w.

e) Neben dem Kran soll ein weiterer Kran gleicher Bauart errichtet werden, damit der Bau des Hauses schneller vonstatten gehen kann. Dieser Kran soll Objekte mit einer Höhe von bis zu $2,75m$ an seinem Haken tragen können. Die Seilestrecke vom Haken zum Ausleger kann bis auf $0,725m$ verkürzt werden. Wie hoch muss der zweite Kran mindestens sein, damit sich die Kräne nicht gegenseitig bei der Arbeit behindern? Beachte, dass der Ausleger aus Traversen aus insgesamt 30 gleichseitigen Dreiecken besteht.

Aufgabe 8: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*



a) Bestimme die Längen der Auslegerteilstücke l_1 und l_2. Bekannt ist im Dreieck ΔABC, dass der Winkel zum Punkt B ein rechter Winkel ist und das die Strecke $\overline{BC}$ halb so lang ist wie das Auslegerteilstück l_1. Die Stützstreben am ersten Gelenk haben eine Länge von $s = 3,125m$, während die Stützstrebe am zweiten Gelenk nur halb so lang ist. Der Winkel im Punkt C beträgt 38°. Das Verhältnis von l_1 zu l_2 beträgt 3 : 2.

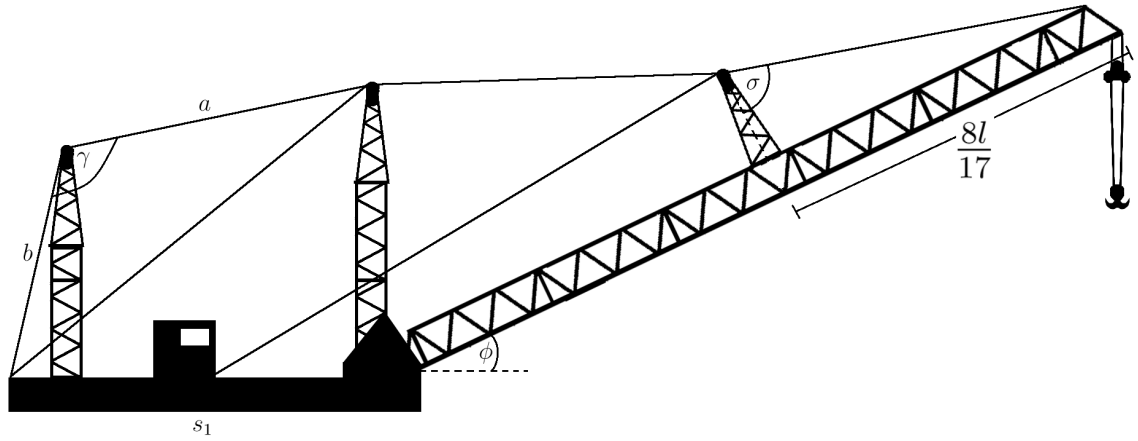
b) Am ersten Gelenk, kann der Winkel zum Boden ϵ minimal 15° und der Winkel ϕ, welcher sich relativ zum ersten Ausleger befindet, minimal 10° betragen. Welchen Aktionsradius hat der Kran maximal?

c) Maximal kann der Winkel $\epsilon = 75°$ und der Winkel $\phi = 45°$ sein. Bis zu welcher Höhe kann der Karn maximal benutzt werden, wenn das Hakenseil v maximal auf $0,4m$ verkürzt werden kann? Die Höhe h vom Boden bis zum ersten Gelenk beträgt $12m$.

d) Im Normalbetrieb hat der Kran folgende Tragseilwinkel: $\delta = 65°$; $\omega = 85°$; $\psi = 60°$; $\tau = 90°$ und $\xi = 6°$. Dabei ist die Entfernung g von der äußeren Kante des Bodengewichtes bis zur ersten Stützstrebe gleich der Kranhöhe bis zum ersten Gelenk. Als Näherung soll hierbei angenommen werden, dass g orthogonal zur ersten Stützstrebe steht. Wie lang ist das gesamte äußere Tragseil?

e) Wie dicht kann der Kran maximal an einem Haus stehen, wenn dieses die maximale Bauhöhe haben soll?

Aufgabe 9: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*



a) Bestimme die Gesamtlänge l des Auslegers des Schwimmkrans. Der Winkel σ beträgt dabei $72°$ und die Stützstrebe auf dem Ausleger hat eine Länge von $3m$. Beachte dass der Ausleger aus gleichseitigen Dreiecken besteht und die Länge der unteren Seite des Auslegers gesucht ist.

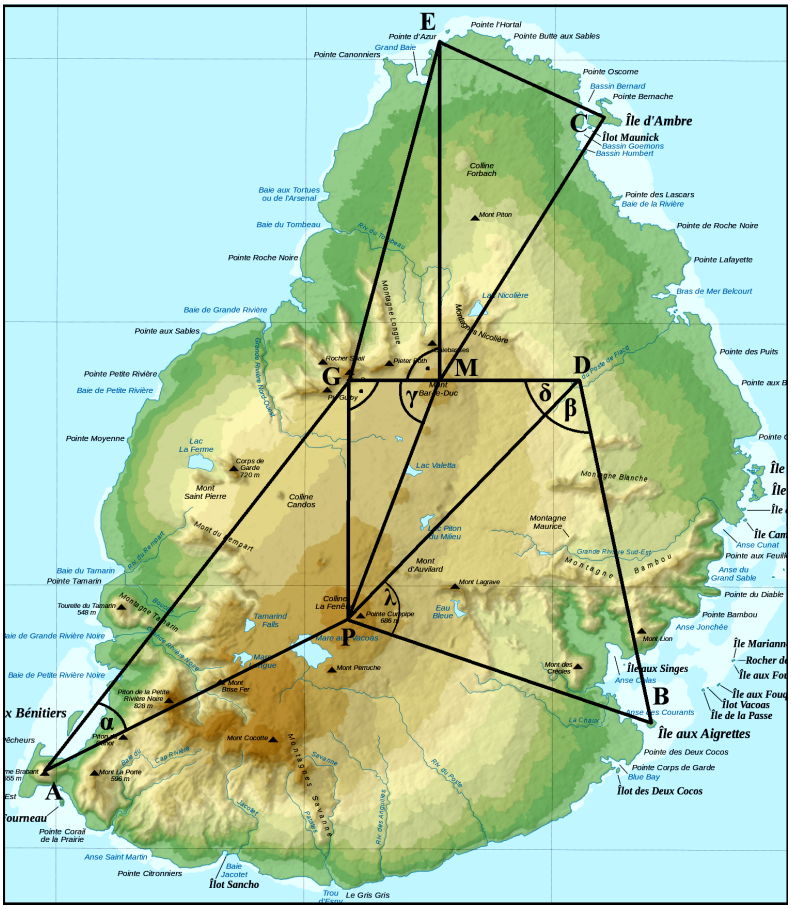
b) Der Ponton des Schwimmkrans ist $s_1 = 15m$ lang und sein Gewicht erzeugen eine Hebelkraft von $F_1 = 266000N$. Wie viel Gewicht kann der Kran maximal heben bevor er umkippen würde, wenn der Ausleger einen Winkel von $\phi = 20°$ zum Wasser vorweist. Beachte, dass die Kraft F_2 orthogonal zur betrachteten Länge s_2 beim Hebelgesetz $F_1 s_1 = F_2 s_2$ sein muss. Die Kraft F wird berechnet über das Produkt der Masse m in $[kg]$ mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81\frac{m}{s^2}$.

c) Der Schwimmkran muss eine Brücke passieren, welche allerdings nur $12m$ hoch ist. Kann der Schwimmkran ungehindert passieren? Nenne eine Grenze für den Winkel ϕ und bestimmt die Höhe der höchsten Stützstrebe, welche sich einen Meter vom Rand des Ponton befindet. Allerdings sind nur die Länge der Stahlseile $a = 13,3m$ und $b = 8,5m$ sowie der Winkel $\gamma = 104°$ bekannt.

d) Damit der Schwimmkran auch im Binnenhafen eingesetzt werden kann, muss eine Klappbrücke der Länge $l = 30m$ unterschifft werden. Die Brücke hat eine Höhe von $5m$. Der Kran kann nur mittig unter dieser Brücke hindurch fahren, da das Wasser außerhalb der Fahrrinne zu seicht wäre. Die Bücke ist an einer Seite über ein hydraulisches Gelenk am Winkel χ hebbar und der Kran besitzt zwei Stützstreben im vorderen Bereich, die jeweils $3m$ von der Mitte des Ponton entfernt sind. Berechne den Winkel χ um den die Klappbrücke mindestens angehoben werden muss und bestimme die gesamte Höhe der erhobenen Brückenseite für diesen Winkelwert. (Fertige vorher eine Skizze an!)

Aufgabe 10: *Löse alle Teilaufgaben zur Landkarte.*

a) Eine Gruppe von Wanderern ist auf Mauritius einen Fluss ins Inland gefolgt und haben beim Punkt D ihr Lager aufgeschlagen, um weitere Routen zu planen. Die Gruppe möchte unbedingt zum Berg im Punkt M, allerdings befindet sich auf der Karte ein Verhältnismassstab und somit sind keine Streckenlängen abzulesen. Die Strecke zwischen dem Berg und dem Lager $\overline{MD}$ beträgt dabei $14km$ erinnert sich einer der Wanderer. Anschließend möchte die Gruppe über das Tal im Punkt G zum höchsten Berg der Insel im Punkt P vordringen. Berechne die Strecke $\overline{GP}$ und $\overline{GM}$ aus den bekannten Winkeln $\gamma = 68°$ und $\delta = 42°$.



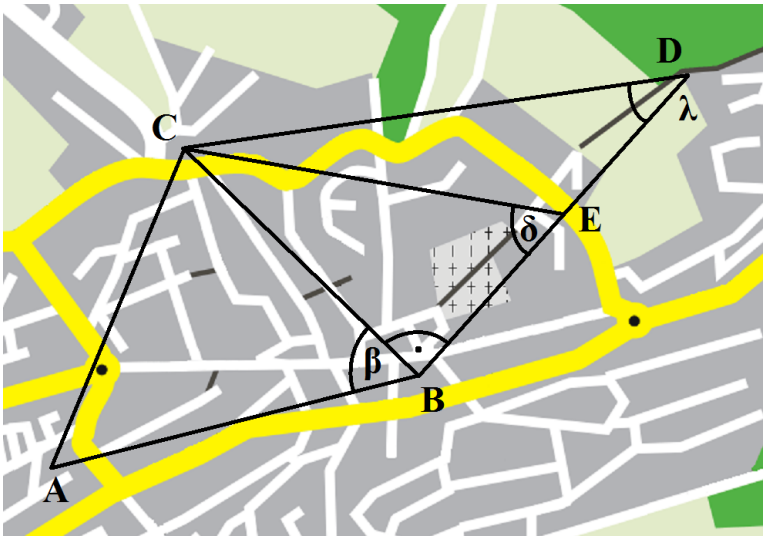
b) Die Wandergruppe möchte die Entfernung vom Lager D bis zum Berg P wissen, um den mehrtägigen Wanderausflug bei schlechtem Wetter eventuell abzukürzen.

c) Eine weitere mögliche Abkürzung für den Abbruch des Wanderausfluges wäre die Strecke $\overline{AG}$, welche berechnet werden muss. Auf der Karte konnte mit einem Winkelmesser die Winkel $\alpha = 27°$ und $\measuredangle\left(\overline{AG}, \overline{GP}\right) = 38°$ bestimmt werden.

d) Falls das Wetter gut bleiben sollte, möchte die Gruppe vom Berg P zur Insel in Punkt B wandern und übersetzen. Mit dem Winkelmesser konnten die Winkel $\beta = 58°$ und $\lambda = 56°$ bestimmt werden.

e) Als die Gruppe auf der Insel B ankam kam eine Vermisstenmeldung im Radio. Auch hieß es, dass eine Suchmannschaft ausgesandt wurde, welche am Tag $20km^2$ absuchen konnte. Die Vermissten werden im Dreieck ΔECM vermutet. Wie lange müsste maximal gesucht werden? Die Gruppe misst folgende Winkel: $\measuredangle\left(\overline{MG}, \overline{GE}\right) = 69°$, $\measuredangle\left(\overline{ME}, \overline{MC}\right) = 29°$ und $\measuredangle\left(\overline{EC}, \overline{GE}\right) = 88°$.

Aufgabe 11: *Löse alle Teilaufgaben zur Ortung.*



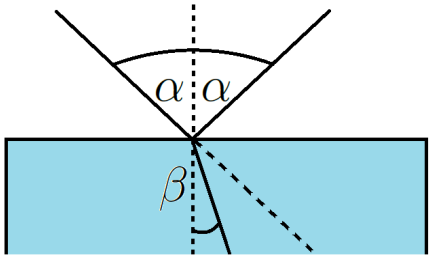
a) Bei einem Wettkampf, der von Mathematiklehrern organisiert wurde, sollen Schüler einen kleinen Funksender innerhalb der Stadt finden. Als Belohnung für die Findergruppe wurden zwei Wochen ohne Hausaufgaben ausgeschrieben. Die Schüler wissen nur, dass sich der Sender irgendwo im Dreieck ΔABC befinden muss. Eine Schülergruppe will tatsächlich mathematisch vorgehen und nutzt die bekannten Informationen, wie zum Beispiel die Entfernung von der Schuleingangstür im Punkt D bis zum Supermarkt im Punkt E, welche $875m$ beträgt. Von diesen beiden Punkten aus messen die Schüler mit einem Geodreieck zwischen den Funkmasten in C und B die Winkel $\lambda = 36°$ und $\delta = 57°$ und wollen aus diesen Informationen die Strecke $\overline{BC}$ bestimmen.

b) Da die Schüler gerade im Unterricht die speziellen Formen und Punkte des Dreiecks behandelt hatten, fällt einem der Schüler auf, dass es sich beim Dreieck ΔABC um ein gleichschenkliges Dreieck handelt mit der Basis $\overline{AB}$. Nutze diese Information aus um so viele Informationen über das Dreieck ΔABC zu erfahren.

c) Die Schüler versuchen sich genauer an die letzten Mathematikschulstunden zu erinnern und kommen auf die Idee, dass der Sender sich in einem speziellen Punkt des Dreiecks befinden muss. Aus diesem Grund wollen die Schüler den Schnittpunkt der Höhen bestimmen. Berechne die Längen aller Höhen und die Länge der Basis. Benutze dafür den Winkel $\beta = 55°$ den die Schüler mit ihrem Geodreieck bestimmt haben.

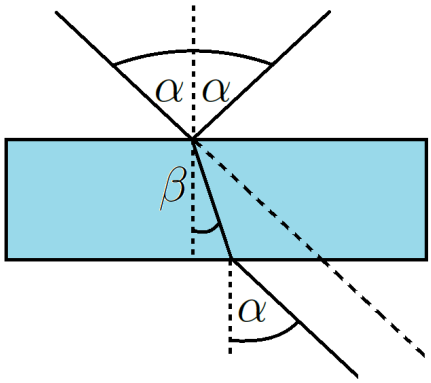
d) Um ihre These zu prüfen, müssen die Schüler von jedem Punkt die Höhe bis zum Schnittpunkt entlang laufen. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wollen die Schüler wissen, wie lang die Strecken zwischen den Funkmasten und Höhenschnittpunkten sind. (Die Gruppe fand den Sender und bekam die Belohnung.) Wie groß war die Fläche, die abzusuchen war?

Aufgabe 12: *Beantworte die Fragen zur Brechung des Lichtes.*



a) BlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBla

Aufgabe 13: *Beantworte die Fragen zur Brechung des Lichtes.*



a) BlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBlaBla

Aufgabe 14: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Weitere Übungen zur Trigonometrie zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.28) Lösungen zur Trigonometrie.

Behauptung	wahr	falsch
Man kann die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion ausdrücken.		
Gegenkathete durch Hypotenuse ist gleich der Kosinus des Winkels.		
Der Tangens ist der invertierte Kotangens.		
Der Sinus von 180° ist gleich 1.		
Der minimale Funktionswert vom Kosinus ist 0.		
Tangens ist der Quotient aus Sinus und Kosinus.		
Der Kosinus ist der um 90° verschobene Sinus.		
Da der Tangens von 90° nicht definiert ist, ist auch der Kotangens von 90° nicht definiert.		
$\cos(180°) = \cos(\pi rad)$.		
$\sin^{-1}(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$		
Der Kosinus wiederholt sich nach $4\pi rad$.		

4.1 Gemischte Trigonometrieaufgaben

Aufgabe 1: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
a	2	4	6	4,7	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
b	3	6	9	7,05	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{20}$
c						
$\frac{a}{b}$						
$\frac{b}{a}$						
$\frac{a}{c}$						
$\frac{b}{c}$						

Aufgabe 2: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
α in $[°]$	5	11	30	45	60	90
α in $[rad]$						
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						
$\cot\alpha$						

	1	2	3	4	5	6
α in $[°]$	120	135	210	240	300	315
α in $[rad]$						
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						
$\cot\alpha$						

Aufgabe 3: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
a	4	7	3,4	5,35	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{10}$
b	5	9	7,2	8,31	$\frac{8}{5}$	$\sqrt{15}$
c						
$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ in [°]						
$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]						
$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]						
$\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ in [°]						
$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]						
$\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]						

Aufgabe 4: *Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit dem angegeben Winkel.* (Keine Lösung!)

a) $\alpha = 25°$ *b)* $\beta = 55°$ *c)* $\alpha = 17°$ *d)* $\alpha = 63°$ *e)* $\alpha = 37°$
f) $\alpha = 45°$ *g)* $\beta = 74°$ *h)* $\beta = 27°$ *i)* $\alpha = 69°$ *j)* $\alpha = 5°$

Aufgabe 5: *Berechne alle fehlenden Größen mit maximaler Genauigkeit. (Benutze folglich nur die gegebenen oder ungerundete Werte!)*

a) $\gamma = 90°$; $c = 13cm$ und $a = 2cm$

b) $\gamma = 90°$; $c = 5km$ und $b = 2m$

c) $\gamma = 90°$; $b = 6,3cm$ und $a = 7,8cm$

d) $\gamma = 90°$; $\alpha = 34,6°$ und $b = 11dm$

e) $\beta = 90°$; $a = 2,567dm$ und $b = 63,41cm$

f) $\alpha = 90°$; $\beta = 59,18°$ und $b = 14,4cm$

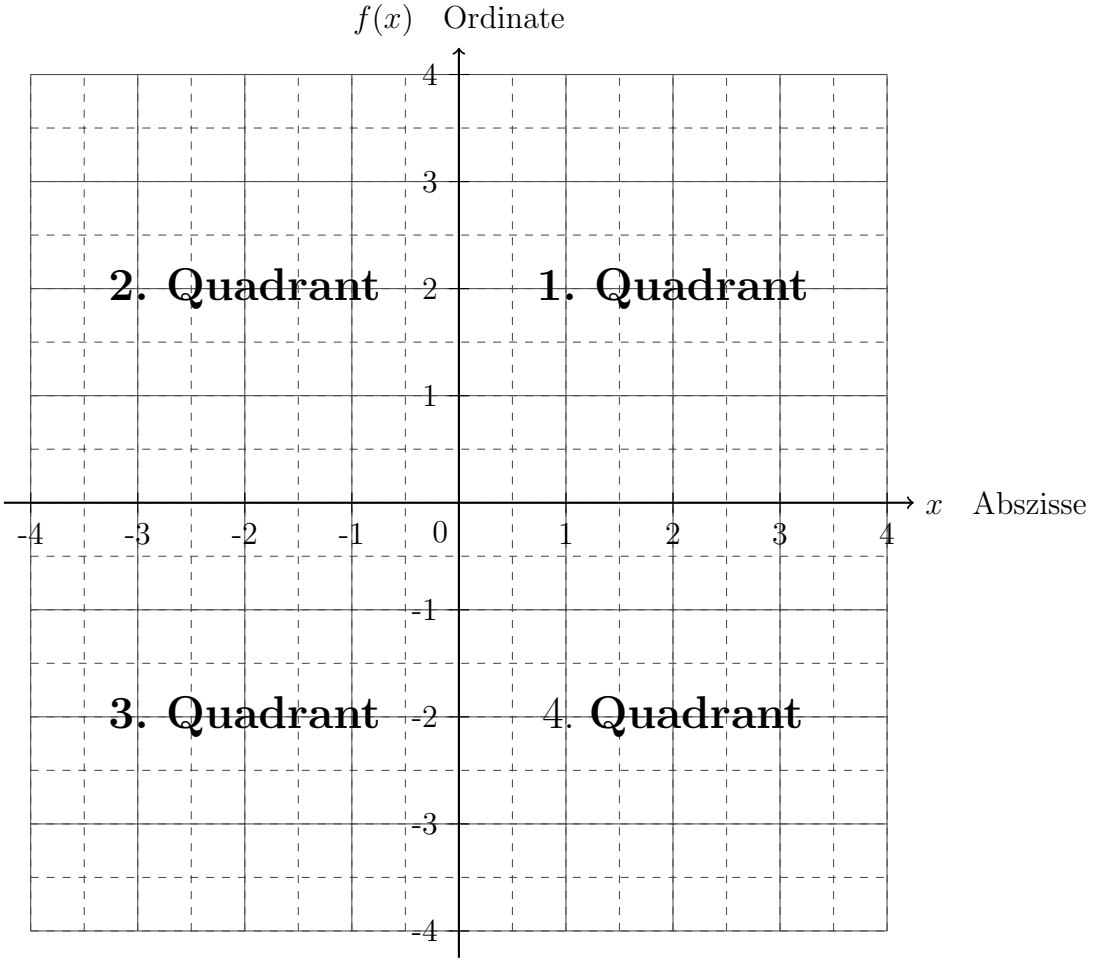
Aufgabe 6: *In einem Glasfaserkabel können Lichtimpulse über Reflexion geleitet werden. In einem solchen Kabel werden alle Lichtimpulse weitergeleitet, die einen Einfallswinkel zum Lot von* $63°$ *nicht unterschreitet. Dadurch benötigt das Licht mehr Zeit als wenn dieses gradlinig durch den Leiter transportiert werden würde. Ein solches Glasfaserkabel zum Beispiel hat einen Querschnittsdurchmesser* r *von* $1,5mm$*. Wie lange braucht das Licht maximal um die Erde in einem solchen Kabel zu umrunden? Ignoriere die Krümmung des Kabels um die Erde. (Lichtgeschwindigkeit* $c = 299792458\frac{m}{s}$ *und Erdradius* $R = 6371km$*.) Um wie viel Prozent ist dies langsamer als die minimale Umlaufzeit?*

Aufgabe 7: *Berechne Aufgabe 6 erneut unter der Bedingung, dass die Lichtgeschwindigkeit im Glasfaserkabel durch den Brechungsindex* n *reduziert wird:* $c_n = \frac{c_0}{n}$*. Dabei ist der Brechungsindex dieses Mediums als* $n = 1,458$ *gegeben. Stelle ein Verhältnis zwischen den Ergebnissen aus Aufgabe 6 und 7 auf.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.29) Lösungen zu den gemischten Trigonometrie.

5 Funktionen

Um *Funktionen* verstehen zu können, müssen zunächst Begrifflichkeiten des sogenannten *Koordinatensystems* besprochen und verinnerlicht werden. Ein *Koordinatensystem* in zwei *Dimensionen* ist ein *Zahlenstrahl* mit den sogenannten *Variablenwerten* x und einem darauf *orthogonalen Zahlenstrahl*, der den Variablenzahlenstrahl bei Null schneidet und auf dem die sogenannten *Funktionswerte* $f(x)$ aufgetragen sind. Dabei wird $f(x)$ gelesen als „f von x“. Der Variablenzahlenstrahl wird *Abszisse* genannt (oftmals auch x-Achse, was zu Verwirrungen führen kann, wenn die Variable einen anderen Namen als x hat), während der darauf *orthogonale Zahlenstrahl Ordinate* genannt wird. Ein *Koordinatensystem* ist somit in vier Bereiche aufgeteilt, welche *Quadranten* genannt werden. Die Reihenfolge der Benennung wird offensichtlicher nach der Besprechung einiger *Funktionen*.



Ein *Koordinatensystem* stellt also eine zweidimensionale *Fläche* dar, welche keine Umrandung besitzt - eine sogenannte *Ebene*.

Eine *Funktion* ist dabei eine Vorschrift, die fordert, dass für eine *Variable* ein Wert in eine Gleichung eingesetzt wird. Der resultierende Wert wird dann *Funktionswert* genannt. Somit entsteht immer ein *Wertepaar*, welches dann im *Koordinatensystem* eingesetzt wird. Mathematisch würde dies so formuliert werden: Eine *Funktion* f bildet Zahlen x einer *Zahlenmenge* auf eine andere *Zahlenmenge* ab. Dabei darf für jeden Wert von x nur ein abgebildeter Wert existieren. Diese Forderung wird *Eindeutigkeit* genannt.

$$f : x \mapsto f(x) \tag{5.1}$$

Ein Beispiel für eine solche *Funktion* wäre:

$$f(x) = 2x \tag{5.2}$$

Dabei wird das Doppelte der in die *Variable* x eingesetzten Zahl auf den *Funktionswert* $f(x)$ *abgebildet*.

Eine *Funktion* kann auch *punkt-* oder *achsensymmetrisch* sein. Dazu werden über das *Einsetzverfahren* folgende Gleichungen überprüft:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \qquad \text{Achsensymmetrie} \\ f(x) &= -f(-x) \qquad \text{Punktsymmetrie} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Bei der *Achsensymmetrie* ist die *Funktion* nach einer *Spiegelung* an der *Ordinate*, während bei der *Punktsymmetrie* die *Funktion* nach einer 180° *Drehung* um den *Koordinatenursprung* identisch ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der kann sich auch verschieben, allerdings kann dann das *Koordinatensystem* so verschoben werden, dass diese *Symmetrien* doch wieder mit der Gleichung (5.3) überprüft werden können. Hierzu zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6 \\ f(x) &= f(-x) \\ \Rightarrow 3x^2 - 6 &= 3(-x)^2 - 6 \quad \text{mit: } (-1)^2 = 1 \\ 3x^2 - 6 &= 3x^2 - 6 \Rightarrow \text{achsensymmetrisch!} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x \\ f(x) &= -f(-x) \\ \Rightarrow 2x^3 - 3x &= -\left(2(-x)^3 - 3(-x)\right) \quad \text{mit: } (-1)^3 = -1 \text{ und: } (-1)\cdot(-1) = 1 \\ \Rightarrow 2x^3 - 3x &= -\left(-2x^3 + 3x\right) \\ \Rightarrow 2x^3 - 3x &= 2x^3 - 3x \Rightarrow \text{punktsymmetrisch!} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Wie bereits schon aus den vorherigen Kapiteln bekannt ist, sind nicht alle Rechenoperationen zulässig, wie zum Beispiel die *Division* durch Null oder noch nicht zulässig, wie die *Wurzel* einer negativen Zahl. Deswegen besitzt jede *Funktion* einen sogenannten *Definitionsbereich*, welche Zahlen in eine *Funktion* eingesetzt werden können und durch die *Definitionsmenge* $\mathbb{D}$ beschrieben wird. Bei einer *Abbildung* des *Variablenwertes* auf einen *Funktionswert*, sind auch nicht alle Bereiche auf der *Ordinate* betroffen. Alle möglichen Zahlen des *Funktionswertes*, werden in der *Wertemenge* $\mathbb{W}$ beschrieben. Für das Beispiel auf Gleichung (5.2) wäre die *Definitions-* und *Wertemenge* gegeben als:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dabei kann jede *Definitionsmenge* berechnet werden, indem die Region die einen bestimmten Wert nicht erreichen darf mit diesem gleichgesetzt wird. So sei zum Beispiel $f(x) = \frac{1}{2x-2}$ gegeben. Folglich darf für dieses Beispiel der *Nenner* nicht Null werden und somit wird der *Nenner* alleine behandelt und gleich Null gesetzt $0 = 2x - 2$. Anschließend wird diese aufgestellte Gleichung nach x aufgelöst. Das resultierende Ergebnis ist die Zahl, für die die *Funktion* $f(x)$ nicht *definiert* ist.
Anzumerken bleibt, dass nicht jede *Funktion* mit dem Buchstaben f und nicht jede *Variable* mit x betitelt sein muss, so gilt zum Beispiel in der Physik die Strecke x als *Funktion* der Zeit t, also $x(t)$. Im Allgemeinen können alle Reaktionen auf etwas in *Variablen-* und *Funktionswert* übersetzt werden, sodass bei genügend Informationen daraus die *Funktion* ersichtlich wird. Mit dieser *Funktion* ist es möglich die Zukunft auszurechnen, wie zum Beispiel bei der physikalischen *Funktion* $x(t) = vt$, wobei v eine konstante Geschwindigkeit ist. Somit kann vorherbestimmt werden, welche Strecke x nach einer beliebigen Zeit t für die Geschwindigkeit v zurückgelegt wurde. Dies ist auch bei wesentlich komplexeren Zusammenhängen möglich, sodass gilt, dass alles berechnet werden kann. Jedoch müssen immer Vereinfachungen angenommen werden, da die Gleichungen sonst zu unübersichtlich und nicht mal von Hochleistungscomputern in annehmbarer Zeit berechnet werden können. Wie solche Methoden im Detail funktionieren, wird im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Physikalische Anwendungen“ skizziert.

Nachdem die Grundbegrifflichkeiten einer *Funktion* erläutert wurden, soll das Arbeiten mit *Funktionen* erschlossen werden.

5.1 Wertetabellen und Punkte

Um *Funktionen* zeichnen und dann später ihre Form ausnutzen zu können, bedarf es sogenannter *Wertetabellen*. Dabei werden verschiedene Werte für die *Variable* x eingesetzt und dann verrechnet. Der resultierende *Funktionswert* $f(x)$ wird dann so notiert, dass der Zusammenhang zwischen der eingesetzten Zahl für die *Variable* und dem *Funktionswert* erkennbar wird.

An zwei Beispielen soll das Prinzip der *Wertetabelle* erläutert werden - hierbei kann die Spalte mit „Rechnung“ und „Punkte“ beim Erstellen einer *Wertetabelle* weggelassen werden, welche hier lediglich für die Erklärung dient:

- Die erste Funktion die untersucht wird, sei die folgende:

$$f(x) = 2x + 1 \tag{5.7}$$

  Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

Punkte	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
x	-2	-1	0	1	2	3
Rechnung	$2 \cdot (-2) + 1$	$2 \cdot (-1) + 1$	$2 \cdot 0 + 1$	$2 \cdot 1 + 1$	$2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 3 + 1$
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

- Die zweite *Funktion* die untersucht wird, sei die folgende:

$$g(x) = x^2 - 1 \tag{5.8}$$

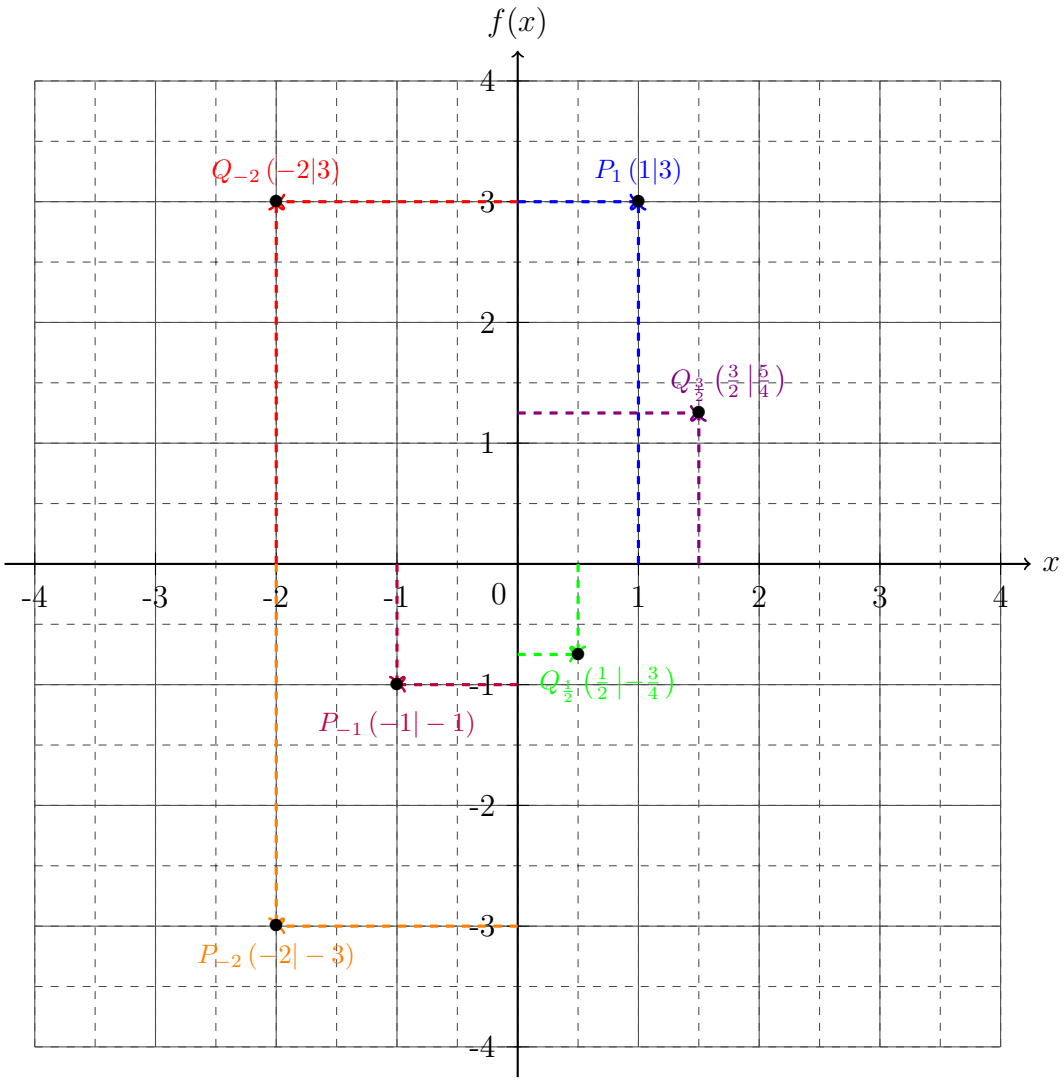
  Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

Punkte	Q_{-2}	Q_{-1}	Q_0	$Q_{\frac{1}{2}}$	Q_1	$Q_{\frac{3}{2}}$	Q_2
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Rechnung	$(-2)^2 - 1$	$(-1)^2 - 1$	$0^2 - 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$	$1^2 - 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1$	$2^2 - 1$
$g(x)$	3	0	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

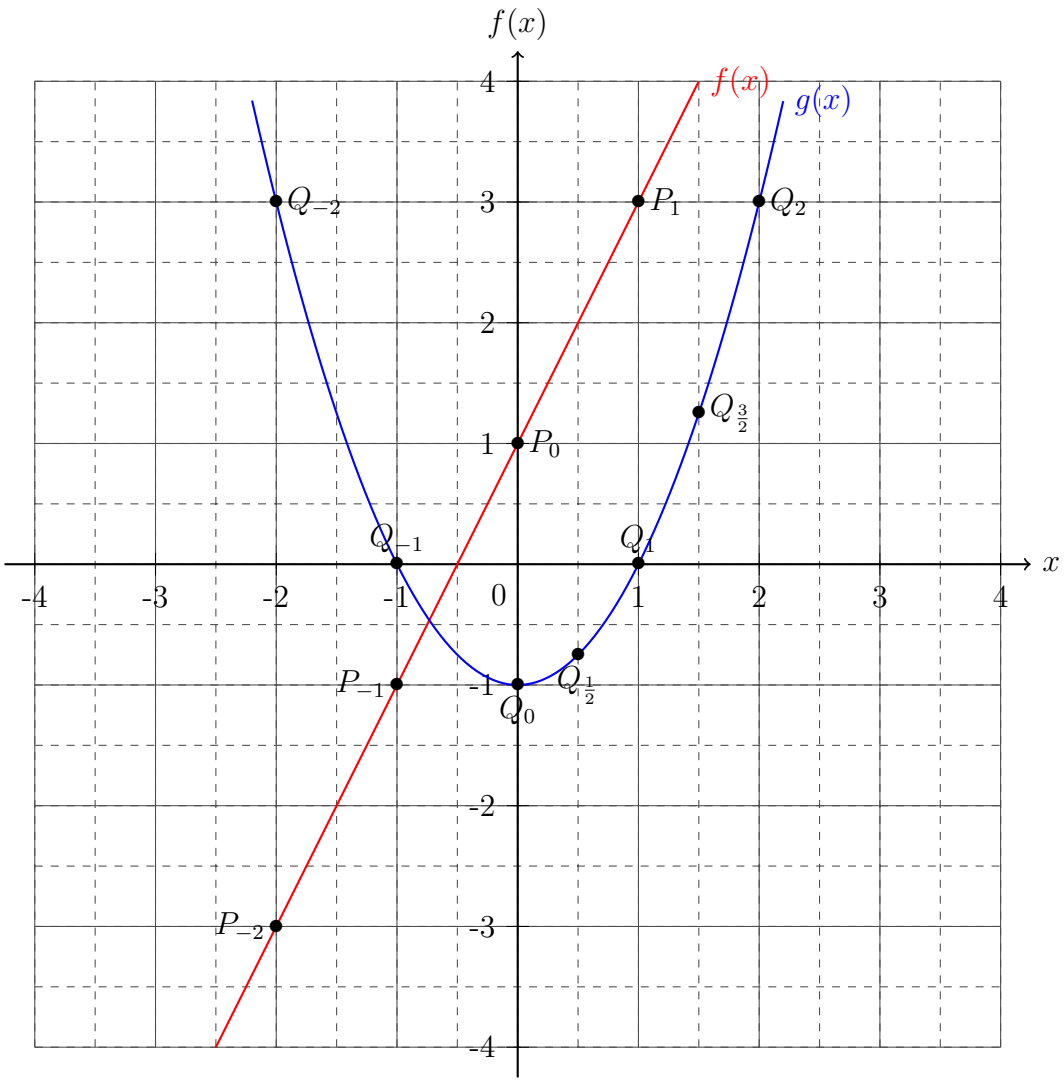
Die *Wertetabellen* zeigen, dass immer für die *Variable* x die entsprechende Zahl eingesetzt wurde. Dabei sind diese Zahlen frei zu wählen.
Die jeweiligen *Variablen-* und *Funktionswerte* bilden Paare, welche auch *Wertepaare* genannt werden. Diese symbolisieren einen *Punkt* im *Koordinatensystem*. Dabei wird bei einem *Punkt* P immer zu erst der *Variablenwert* x und anschließend der *Funktionswert* $f(x)$ genannt

$$P\left(x|f(x)\right) \quad . \tag{5.9}$$

Diese *Punkte* geben an, wie viele Schritte (den *Variablenwert*) auf der *Abszisse* zurückgelegt werden müssen, um dann anschließend die Anzahl der Schritte des *Funktionswertes* auf der *Ordinate* zu gehen. Im folgenden *Koordinatensystem* sind einige *Punkte* aus den beiden *Wertetabellenbeispielen* nach diesem Schema eingezeichnet.



Die *Punkte* der jeweiligen *Wertetabellen* können verbunden werden, sodass sich das Muster der *Punkte* zeigt. Dieses Muster wird *Graph* der *Funktion* genannt und bietet Aufschluss zu den Eigenschaften der *Funktion*.



Das Ziel einer *Wertetabelle* ist es den *Graphen* einer *Funktion* zeichnen zu können, um daraus und der Struktur der *Funktion* den *Werte-* und *Definitionsbereich* sowie weitere Eigenschaften bestimmen zu können. Im Kapitel „Differentiation und Integration“ wird auf dieses zeichnerische Element vollständig verzichtet, sodass alle Informationen einer *Funktion* errechnet werden können. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden spezielle Arten von *Funktionen* analysiert.

5.1.1 Übungsaufgaben zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1: *Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.*

$A\,(1\,\vert 6\,)$	$B\,(-2\,\vert 4\,)$	$C\,(6\,\vert 0\,)$	$D\,(-7,5\,\vert -1\,)$
$E\left(\frac{1}{2}\,\vert 3\right)$	$F\left(-\frac{7}{4}\,\vert -6,25\right)$	$G\,(8\,\vert -8\,)$	$H\left(\sqrt{6,25}\,\middle\vert -\frac{3}{4}\right)$
$I\,(7,25\,\vert -6,75\,)$	$J\left(-4\,\middle\vert -\frac{33}{4}\right)$	$K\left(-5\,\middle\vert \sqrt{2}\right)$	$L\left(2\,\vert -2^3\right)$
$M\left(289^0\,\vert \ln e^{1,5}\right)$	$N\left(-3!\,\middle\vert \frac{5!}{4!}\right)$	$O\left(-\sqrt[4]{81}\,\middle\vert \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$	$P\,(\pi\,\vert e\,)$

Aufgabe 2: *Berechne die angegebenen Wertetabellen für die jeweiligen Funktionen.*

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$							

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$							

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = -2x + 3$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{5}$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

f) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

g) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$

h) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

Aufgabe 3: *Zeichne die Funktionen und bestimme die Definitions- und Wertebereiche.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

d) $l(x) = -x^2 + 3x - 2$

e) $k(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

f) $m(x) = -4x^{-1}$

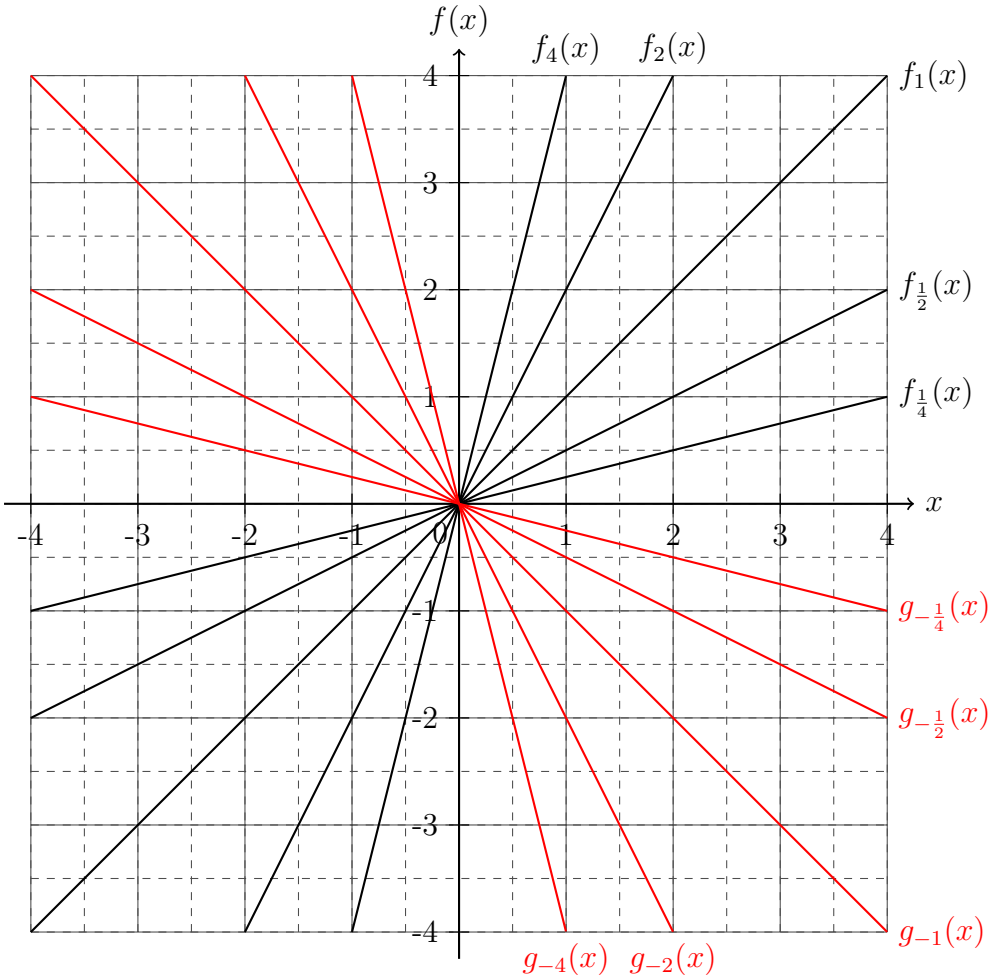
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.30) Lösungen zu Wertetabellen und Punkte.

5.2 Geraden

Geraden sind die simpelsten *Funktionen*. Sie sind *definiert* durch die allgemeine *Geradenfunktionsgleichung*:

$$f(x) = mx + b \quad , \tag{5.10}$$

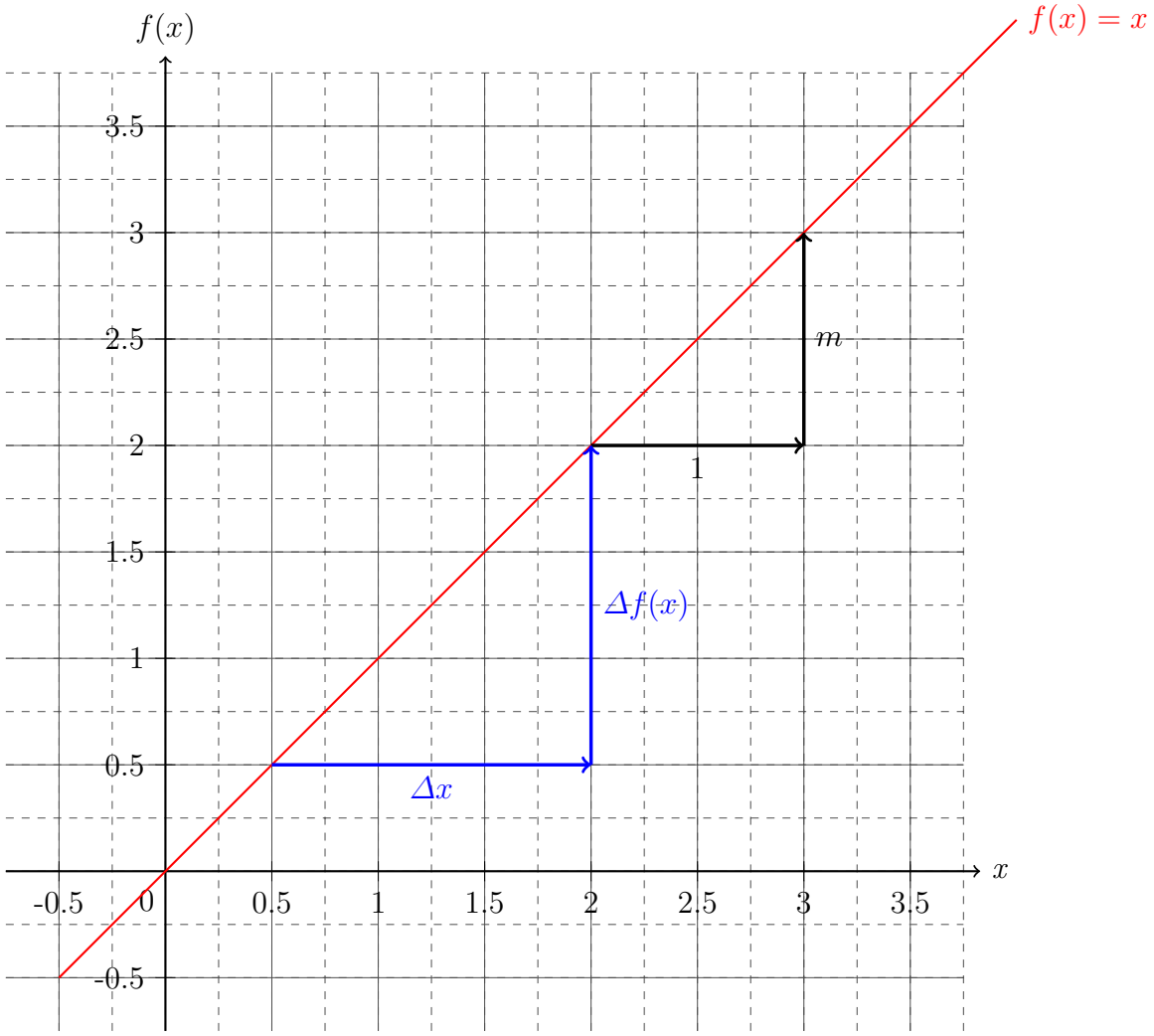
wobei x die *Variable* der *Funktion* $f(x)$ ist und m und b *Parameter* sind. Eine *Gerade* ist eine *lineare Funktion*, oder auch eine *Funktion erster Ordnung*, da der *Term* mit der höchsten *Potenz* als mx^1 gegeben ist. Da eine *Funktion* immer einen *Parameter* mehr besitzt als die Zahl ihrer *Ordnung*, werden für eine *Funktion erster Ordnung* zwei Informationen benötigt, um alle Eigenschaften der *Funktion* bestimmen und den *Graphen* zeichnen zu können. Diese Informationen können *Punkte* sein oder Angaben der *Parameter* m und b. Zu nächst wird sich auf die Bedeutung der *Parameter* beschränkt. Dazu werden für m verschiedene *Geraden* gezeichnet unter der Bedingung, dass $b = 0$ ist, wobei für positive Werte von m die *Funktion* f und für negative Werte g genannt wird.



Die Abbildung zeigt deutlich, dass die *Geraden* mit positiven Werten von m von links unten nach rechts oben gehen und je höher der Wert ist, desto stärker ist die *Steigung* der *Geraden*. Für negative Werte von m sinken die *Geraden* von links oben nach rechts unten. Auch hier

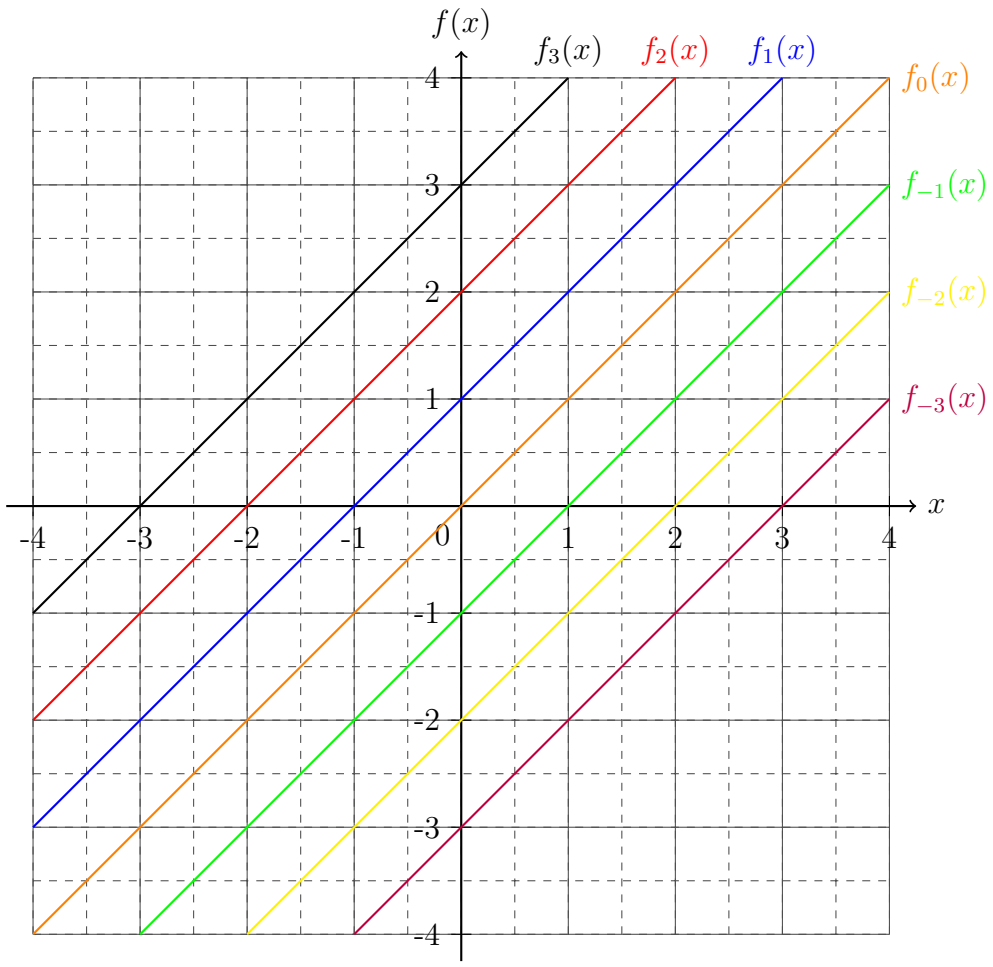
nimmt die *Steigung* zu je größer der *Betrag* von m wird. Somit kann festgehalten werden, dass m die *Steigung* der *Geraden* symbolisiert.

Die Steigung einer *Geraden* kann auch gemessen werden. Dabei wird auf der *Abszisse* einen Einheitenschritt nach rechts gegangen und dann *orthogonal* dazu wieder zur *Funktion parallel* zur *Ordinate*. Die Strecke die *parallel* zur *Ordinate* ist, ist der Wert des *Steigungsparameters* m.



Dies nennt man das *Steigungsdreieck*, dabei können auch mehrere Schritte entlang der *Abszisse* zurückgelegt werden, sodass im Allgemeinen $m = \frac{\text{Ordinatenschritte}}{\text{Koordinatenschritte}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, wobei Δx die *Differenz* zwischen zwei Werten von x also $\Delta x = x_2 - x_1$ für $x_2 > x_1$ und $\Delta f(x)$ die *Differenz* zwischen zwei Werten von $f(x)$ folglich $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ beschreibt.

Im nächsten Fall soll die *Steigung* m auf 1 festgelegt werden und der *Parameter* b variiert werden. Dabei wandern die Werte von b von -3 bis 3.



Im *Koordinatensystem* ist deutlich zu erkennen, dass der Wert von b mit dem Wert der *Ordinate* übereinstimmt, wenn sich *Ordinate* und die *Gerade* treffen, somit wird b auch der *Ordinatenschnittwert* oder *Offset* der *Funktion* genannt.

Da die *Parameter* diskutiert wurden, wird nun das Verfahren beschrieben wie aus zwei *Punkten* diese *Parameter* berechnet werden können. Dazu seien die beiden *Punkte* zum Beispiel: $P(-1|-4)$ und $Q(2|3)$. Diese *Punkte* werden in die allgemeine *Geradengleichung* eingesetzt

$$\begin{aligned} P: \quad & -4 = m \cdot (-1) + b \\ Q: \quad & 3 = m \cdot 2 + b \end{aligned} \tag{5.11}$$

und dann eine der beiden Gleichungen nach einem unbekannten *Parameter* aufgelöst.

$$P: \quad m - 4 = b \tag{5.12}$$

Diese Gleichung für den *Parameter* b wird nun in die zweite Gleichung eingesetzt und anschließend nach m aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
P \text{ in } Q: \qquad & 3 = 2m + (m-4) \\
& 3 = 3m - 4 \qquad |+4 \\
& 7 = 3m \qquad |:3 \\
& \frac{7}{3} = m \qquad .
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Der berechnete Wert für m wird dann wieder in die Gleichung (5.12) eingesetzt um b zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
P \text{ mit } m: \qquad & \frac{7}{3} - 4 = b \\
& -\frac{5}{3} = b \quad .
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Somit ergibt sich *Geradengleichung* mit den Werten von m und b zu:

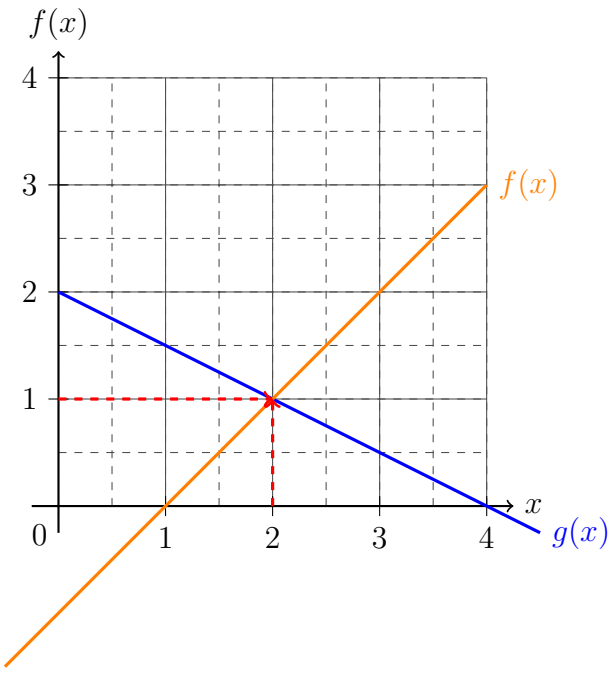
$$
\begin{aligned}
f(x) &= mx + b \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Mittels dieses Verfahrens ist nun die *Geradenfunktionsgleichung* berechnet. Auch für komplexere *Funktionen* kann genau dieses Verfahren angewendet werden, allerdings erhöht sich die Anzahl der *Parameter* und der Gleichungen, sodass es eher zu einer Übersichtsaufgabe wird. Wenn die *Steigung* einer *Geraden* gleich Null (m=0) ist, dann wird von einer *Konstanten* gesprochen.

Aber auch noch ein anderer Wert ist interessant, nämlich der *Variablenwert* für den *Schnittpunkt* mit der *Abszisse*. Dieser Wert wird *Nullstelle* genannt und kann berechnet werden, indem man den *Funktionswert* $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ setzt, da der *Ordinatenwert* beim schneiden der *Abszisse* Null ist. Somit folgt eine kurze *Äquivalenzumformung* nach x und die *Nullstelle* x_N ist berechnet:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\stackrel{!}{=} 0 = mx + b \\
\Rightarrow -\frac{b}{m} &= x_N \quad .
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Aber nicht nur die *Nullstellen* sind im Umgang mit *Funktionen* interessant, sondern auch die *Punkte* in denen sich die *Funktionen* schneiden.



Wie die Abbildung zeigt, besitzen die *Graphen* von $f(x)$ und $g(x)$ in dem *Punkt* $P(1|2)$ den gleichen *Variablen-* und *Funktionswerte*. Um diesen *Punkt* im Allgemeinen zu berechnen, können beide *Funktionen* gleichgesetzt werden und anschließend nach x aufgelöst werden. Für *Geraden* würde dies eine kleine *Äquivalenzumformung* bedeuten, während für höhere *Funktionen* sich die Techniken der *Äquivalenzumformung* wie zum Beispiel durch *quadratische Ergänzung* erweitern würden.

$$\begin{aligned} g(x) &\stackrel{!}{=} f(x) \\ -\frac{1}{2}x + 2 &= x - 1 \quad \Big| +\frac{1}{2}x + 1 \\ 3 &= \frac{3}{2}x \quad \Big| \cdot \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 2 &= x_\times \quad \Big| \cdot \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{5.17}$$

In Gleichung (5.17) wird die Berechnung der *Schnittstelle* $x_\times$ gezeigt. Anschließend muss noch $x_\times$ in $f(x)$ oder $g(x)$ eingesetzt und das Ergebnis berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(x_\times) &= x_\times - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Somit ist, wie im *Koordinatensystem* zu sehen war, der *Schnittpunkt* der *Funktionen* $P_\times = (x_\times \,|f(x_\times)) = (2|1)$.

5.2.1 Übungsaufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: *Bestimme aus den gegebenen Punkte die Geradenfunktionsgleichung, bestimme anschließend die Nullstelle und zeichne den Graphen.*

a) $P_a\,(-2\,|-2)$ und $Q_a\,(0\,|4)$

b) $P_b\left(\frac{1}{2}\,|1\right)$ und $Q_b\,(-1\,|-4)$

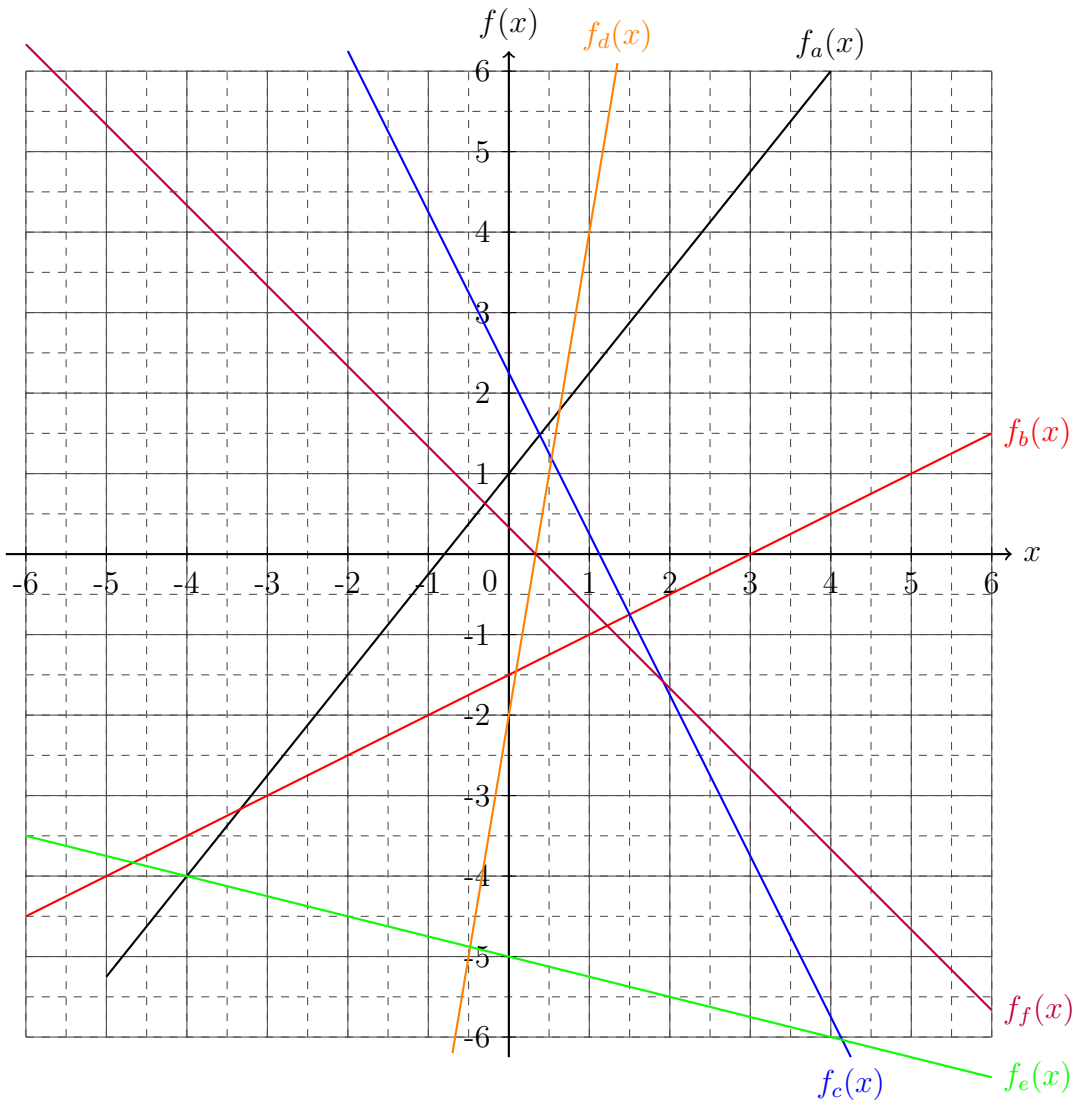
c) $P_c\,(-4\,|2)$ und $Q_c\,(4\,|5)$

d) $P_d\,(-3\,|-5)$ und $Q_d\,(5\,|2)$

e) $P_e\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$ und $Q_e\left(-\frac{1}{6}\,|-3\right)$

f) $P_f\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\sqrt{3}\right)$ und $Q_f\,(e\,|\pi)$

Aufgabe 2: *Bestimme den Steigungsparameter m und den Ordinatenschnittwert b aus den dargestellten Graphen. Gibt die Geradenfunktionsgleichung an.*



Aufgabe 3: *Bestimme den Schnittpunkt* $P_\times\,(x_\times\,|f(x_\times))$ *der beiden Geraden.*

a) $f(x) = 3x - 2$ und $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x + 2$ und $g(x) = -3x + \frac{4}{5}$

c) $f(x) = -3x$ und $g(x) = 2x - 6$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$ und $g(x) = \frac{7}{3}x - 3$

e) $f(x) = 9x - e^2$ und $g(x) = \pi x + \frac{1}{4}$

f) $f(x) = -\sqrt{2}x$ und $g(x) = x \ln 2 - 6$

Aufgabe 4: *Bestimme die Nullstellen der Geraden* x_N.

a) $f(x) = 5x - 9$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$

c) $f(x) = -3x + 4$

d) $f(x) = -12x + \frac{8}{17}$

e) $f(x) = 9x + 4$

f) $f(x) = 15x + \sqrt{2}$

g) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$

h) $f(x) = 3x - \frac{5}{6}$

i) $f(x) = -\sqrt{2}x - 45$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \ln 4$

Weitere Übungen zu Geraden zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

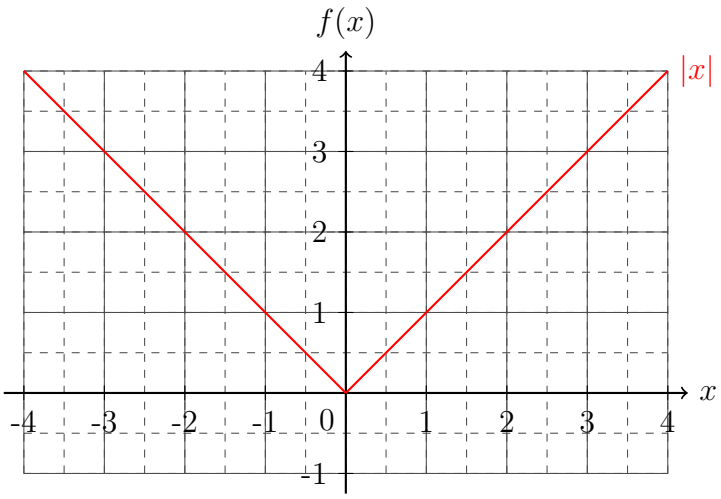
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.31) Lösungen zu Geraden.

5.3 Stufenfunktionen

Die *Betragsfunktion* ist die bekannteste Stufenfunktion und im Wesentlichen eine *Gerade* mit der *Steigung* $m = 1$, die an der *Ordinate* gespiegelt ist. Durch diesen Sprung im *Koordinatenursprung* wird die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche unterteilt und da diese *Funktionstyp* öfter vorkommt wird diese spezielle Form abgekürzt:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

Wie an Gleichung (5.19) zu erkennen ist, ist die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche geteilt. Dabei ist für negative Werte der *Variable* ein *Subtraktionsoperator* vorgestellt. Dies bedeutet, dass die negativen *Variablenwerte* zu positiven *Funktionswerten* umgewandelt werden. Für positive *Variablenwerte* hat die *Variable* ein Vorzeichen, sodass auch in diesem Bereich positive *Funktionswerte* resultieren. Der *Graph* dieser *Funktion* ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



An der Abbildung ist zu erkennen, dass die *Betragsfunktion* einen Knick im *Koordinatenursprung* besitzt und dass die *Funktion achsensymmetrisch* bezüglich der *Ordinate* ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der Knick der *Funktion* kann verschoben werden, indem in den *Betragsstrichen* eine Zahl *addiert* wird.

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 2 \\ -x & ,\forall x < 2 \end{cases} \tag{5.20}$$

Um den *Funktionswert* der *Betragsfunktion* eines beliebigen *Variablenwertes* zu bestimmen, kann in nahezu allen Fällen, die in der Schule diskutiert werden, die Zahl *quadriert* und anschließend die *Wurzel* daraus gezogen werden.

$$|a| = \sqrt{a^2} \tag{5.21}$$

Dieses Verfahren wird oftmals dazu verwendet um Längen zu bestimmen und findet seine Anwendung zum Beispiel im Kapitel „Vektoren“. Aber es existieren neben der Betragsfunktion auch noch andere Stufenfunktionen. Generell lässt sich festhalten, dass Stufenfunktionen immer für spezielle Intervalle definiert sind.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & ,\forall x \geq q \\ mx + b & ,\forall p < x < q \\ nx + d & ,\forall x \leq p \end{cases} \tag{5.22}$$

Somit ist die Funktion aus Gleichung (5.22) in drei Intervalle unterteilt. Stufenfunktionen kommen in vielen Bereichen der Naturwissenschaften öfters vor. Zwei weitere speziellen Stufenfunktionen werden im Abschnitt „Distributionen“ vorgestellt.

5.3.1 Übungsaufgaben zu Stufenfunktionen

Aufgabe 1: *Zeichne die Stufenfunktionen.*

a) $f(x) = |x-3|$

b) $f(x) = |x+1| - 3$

c) $f(x) = -|2x-2| + 2$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 & , \forall x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & , \forall x \leq 2 \\ 2x-3 & , \forall x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2 & , \forall x \leq -1 \\ x-1 & , \forall x > -1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x-2 & , \forall x \leq -2 \\ -x+3 & , \forall -2 < x \leq 2 \\ 2x-4 & , \forall x > 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -5,5 & , \forall x \leq -3,5 \\ -2x & , \forall -3,5 < x \leq -1,25 \\ x^2 - 2,5 & , \forall -1,25 < x \leq 2,75 \\ \sqrt{x} & , \forall x > 2,75 \end{cases}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.32) Lösungen zu Stufenfunktionen.

5.4 Parabeln

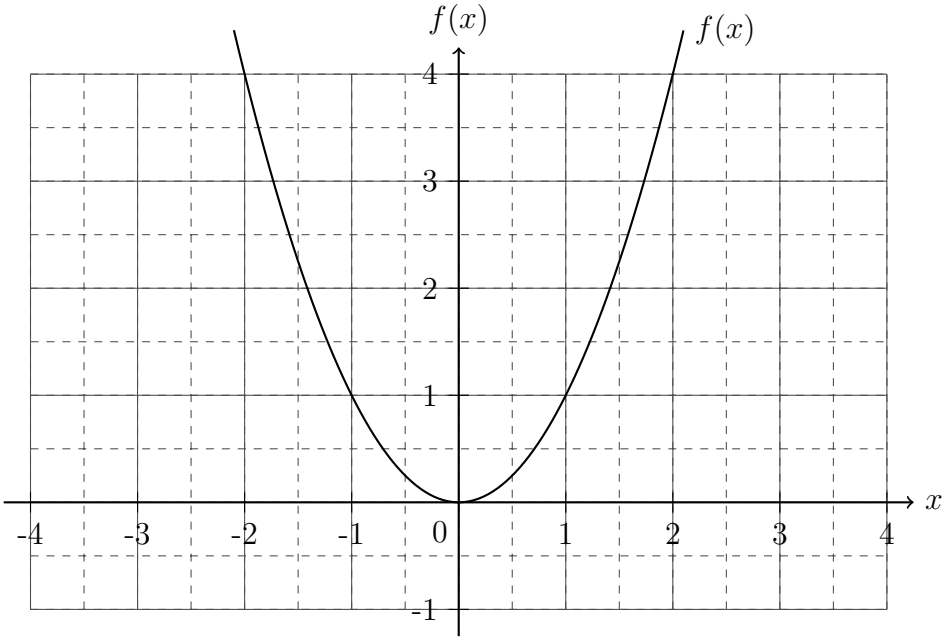
Nach den *Geraden* sind die *Parabeln* die nächst komplexere Form der *Funktionen*. *Parabeln* sind *Funktionen zweiter Ordnung* und werden auch *quadratische Funktionen* genannt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{5.23}$$

Wie die Gleichung (5.23) zeigt, besitzt eine *Parabel* drei *Parameter*. Diese *Darstellung* der *Parabel* wird auch *Parameterdarstellung* genannt. Da die *quadratische Ergänzung* schon eingeführt wurde, kann dieser Gleichung auch so umgeformt werden, dass sich eine *binomische Formel* offenbart (dabei wurden die *Parameter umdefiniert*):

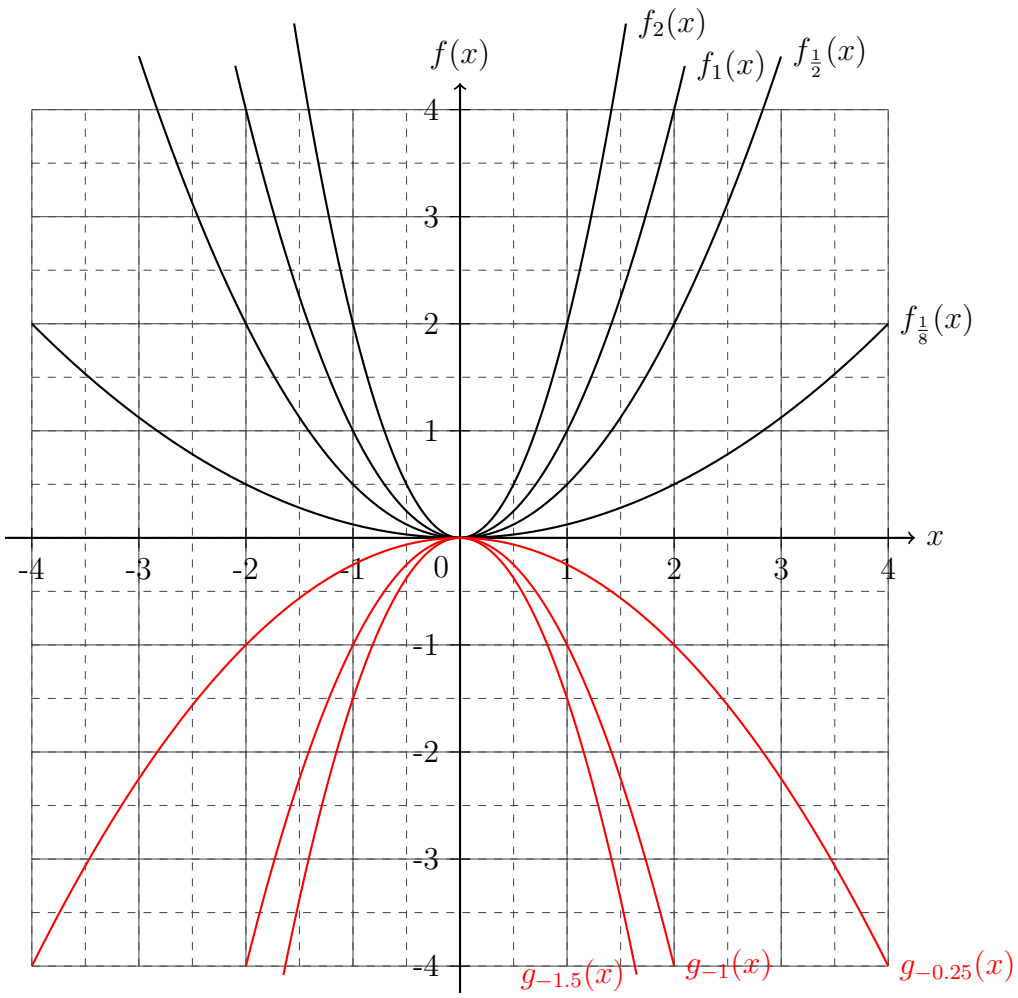
$$f(x) = \alpha(x - d)^2 + e \quad . \tag{5.24}$$

Diese *Darstellung* der *Parabel* wird *Scheitelpunktsform* genannt. Durch das Auflösen der *binomischen Formel* und einer Vereinfachung kann die Gleichung (5.24) auf die die Gleichung (5.23) gebracht werden. Anhand der *Scheitelpunktsform* werden im Folgenden die Eigenschaften der *Parabel* erläutert. Sei zu erst $\alpha = 1$, $d = 0$ und $e = 0$.



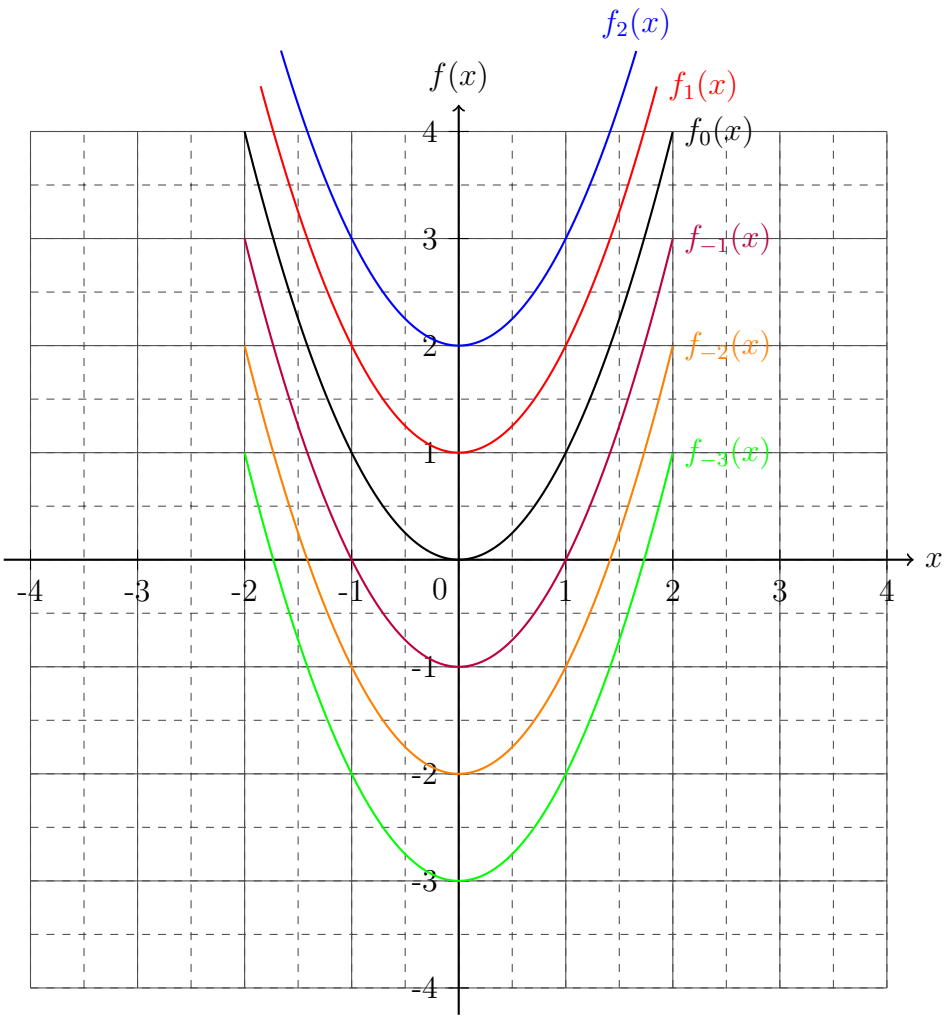
Aus dem *Graphen* wird ersichtlich, dass die *Parabel achsensymmetrisch* ist, da sie an der *Ordinate gespiegelt* wieder sich selbst ergibt. Auch zu erkennen ist, dass die *Funktionswerte* der vereinfachten *Parabel* $f(x) = x^2$ immer stärker zunehmen je weiter ein *Variablenwert* x vom *Koordinatenursprung* $x = 0$ entfernt ist. Außerdem sind alle *Funktionswerte* positiv, da das *Quadrat* das Vorzeichen aufhebt. Der *Scheitelpunkt* der *Parabel* ist der *Punkt* an dem sich die Richtung der *Funktion* umdreht. Hier wäre es das *Minimum* der *Funktion* im *Punkt* $S(0|0)$.

Sei nun im folgenden *Koordinatensystem* $d = 0$ und $e = 0$, während α variiert wird. Dabei soll wieder gelten, dass die *Funktion* für positive Werte von α den Namen f und für negative Werte den Namen g trägt.



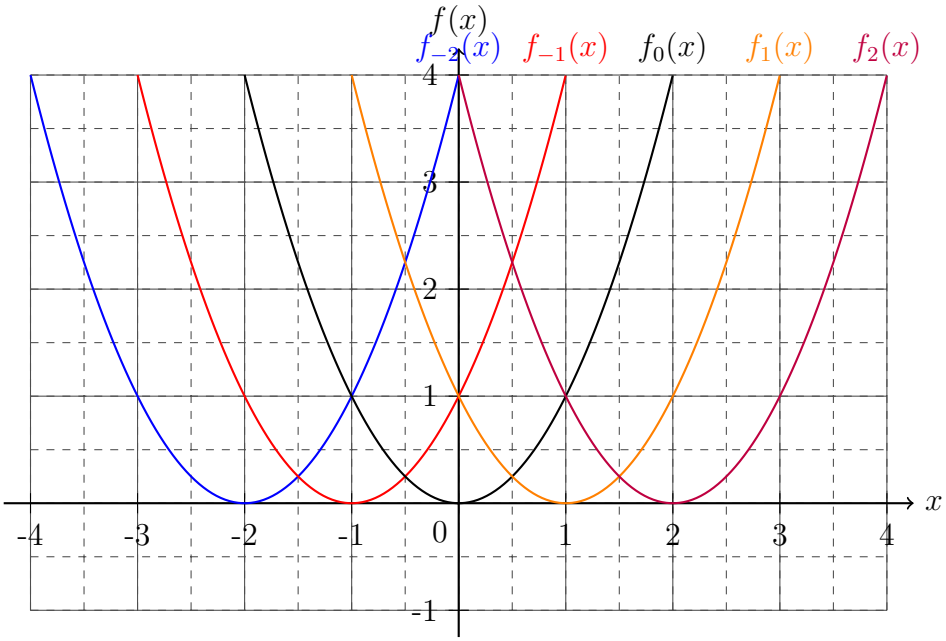
Die *Graphen* für verschiedene Werte von α zeigen deutlich, dass die *Parabeln* für Werte unter 1 gestreckt und für über 1 gestaucht sind. Aus diesem Grund heißt α auch *Stauchungsparameter*. Der Wert von α kann abgelesen werden, indem das Verhältnis $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bestimmt wird, wobei $\Delta x = 1$ gewählt und vom *Scheitelpunkt* aus *parallel* zur *Abszisse* gegangen werden sollte. Der Wert des Verhältnisses ist gleichzusetzen mit α. Des Weiteren fällt auf, dass die *Parabel* für positive α nach oben und für negative α nach unten geöffnet ist. Folglich entscheidet das Vorzeichen des *Stauchungsparameters* über die Öffnung der *Parabel*.

Nun soll der *Parameter* e variiert werden, dazu wird der *Stauchungsparameter* $\alpha = 1$ und $d = 0$ gewählt.



Die *Graphen* zeigen, dass e den *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung*.

Zu Letzt soll d variiert werden, dafür wird der *Stauchungsparameter* α und der *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung* $e = 0$ gewählt.



Durch die *Graphen* wird deutlich, dass der *Parameter* d den Versatz des *Scheitelpunktes* der *Parabel* auf der *Abszisse* beschreibt.
Aus dieser *Darstellung* der *Parabel* wird deutlich, welche Macht die *quadratische Ergänzung* innewohnt, da aus einer *Parameterdarstellung* schnell eine *Scheitelpunktsform* gewonnen und somit die Position des *Scheitelpunkts* und die *Stauchung* abgelesen werden kann. Dabei gilt generell, dass der *Scheitelpunkt* S durch $S(d|e)$ gegeben ist. Der *Scheitelpunkt* S würde in der *Parameterdarstellung* durch $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c-\frac{b^2}{4a}\right)$ gegeben sein.

Die Nullstellen von *quadratischen Funktionen* lassen sich über die *quadratische Ergänzung* berechnen. Da es sich um eine *Funktion zweiter Ordnung* handelt werden auch zwei *Nullstellen* zu berechnen sein, wie bei den *Graphen* $f_{-3}(x)$, $f_{-2}(x)$ und $f_{-1}(x)$ bei der Variation von e schon zu erkennen war und schon im Abschnitt zur *quadratischen Ergänzung* thematisiert wurde.

Des Weiteren bleibt zu erwähnen, dass eine *Funktion zweiter Ordnung* insgesamt drei *Parameter* besitzt, folglich werden drei Informationen benötigt, um alle drei *Parameter* bestimmen zu können. Dies geschieht über das gleiche Verfahren wie bei den *Geradenfunktionen*, nur dass ein *Parameter* und eine Gleichung hinzu kommt.

5.4.1 Übungsaufgaben zu Parabeln

Aufgabe 1: *Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen, bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen, falls sie vorhanden sind. Stelle die Funktion anschließend zur Scheitelpunktsform um.*

a) $f_a(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f_b(x) = x^2 - 8x + 16$

c) $f_c(x) = 2x^2 + 8x + 32$

d) $f_d(x) = 4x^2 - 8x + 8$

e) $f_e(x) = x^2 + 8x - 1$

f) $f_f(x) = x^2 - 6x - 7$

g) $f_g(x) = 3x^2 + 6x - 15$

h) $f_h(x) = 2x^2 - 8x - 14$

i) $f_i(x) = -2x^2 + 5x - 3$

j) $f_j(x) = -2x^2 - 12x - 14$

k) $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}$

l) $f_l(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{60}$

m) $f_m(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{64}{21}x + \frac{256}{147} - \ln 2$

n) $f_n(x) = \sqrt{2}x^2 - 2e\sqrt{2}x + \sqrt{2}e^2 + \pi$

o) $f_o(x) = -x^2 + 2\sqrt{3}x - \sqrt{5} - 3$

p) $f_p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{17} - \frac{27}{32}$

Aufgabe 2: *Berechne die Schnittpunkte zwischen den gegebenen Funktionen falls welche vorhanden sind.*

a) $f_a(x) = x^2 - 3x - 5$ und: $g_a(x) = x + 1$

b) $f_b(x) = x^2 + 7x - \frac{4}{5}$ und: $g_b(x) = 5x + \frac{3}{5}$

c) $f_c(x) = 2x^2 - \frac{5}{2}x - 7$ und: $g_c(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

d) $f_d(x) = -\frac{1}{3}(x-9)^2 + 6$ und: $g_d(x) = 2(x+3)^2 - \frac{5}{6}$

Aufgabe 3: *Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen, bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen, falls sie vorhanden sind. Stelle die Funktion anschließend zur Parameterform um.*

a) $f_a(x) = (x-3)^2 - 4$

b) $f_b(x) = (x+2)^2 - 1$

c) $f_c(x) = (x-2)^2 + 8$

d) $f_d(x) = 2\,(x-1)^2 - 7$

e) $f_e(x) = -\,(x+2)^2 - \frac{1}{2}$

f) $f_f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}$

g) $f_g(x) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$

h) $f_h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}$

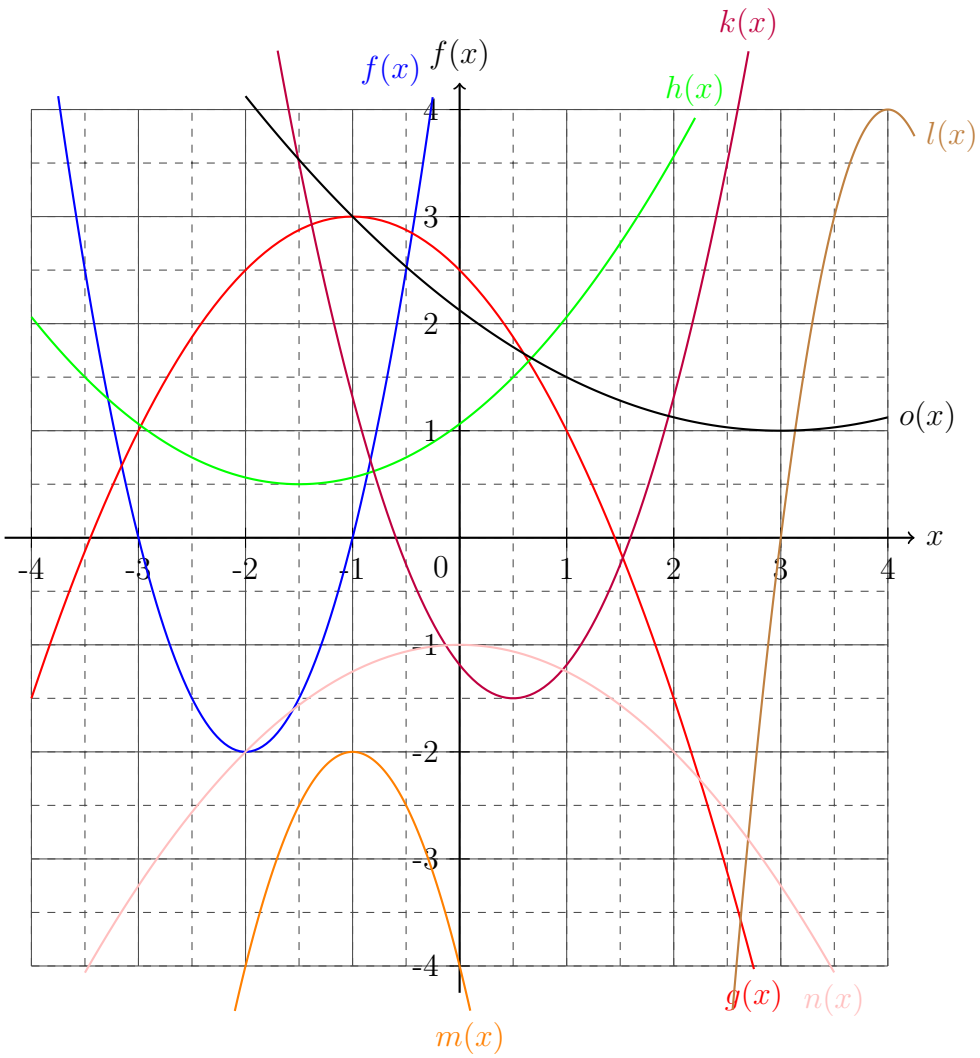
i) $f_i(x) = -\frac{5}{3}\left(x + \frac{53}{34}\right)^2 - \frac{9}{8}$

j) $f_j(x) = \frac{9}{7}\left(x - \frac{11}{13}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

k) $f_k(x) = -\sqrt{5}\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{8}$

l) $f_l(x) = \ln 2\,(x-e)^2 + \pi$

Aufgabe 4: *Bestimme die Funktionsgleichungen der quadratischen Funktionen.*



Aufgabe 5: *Teste auf Achsensymmetrie.*

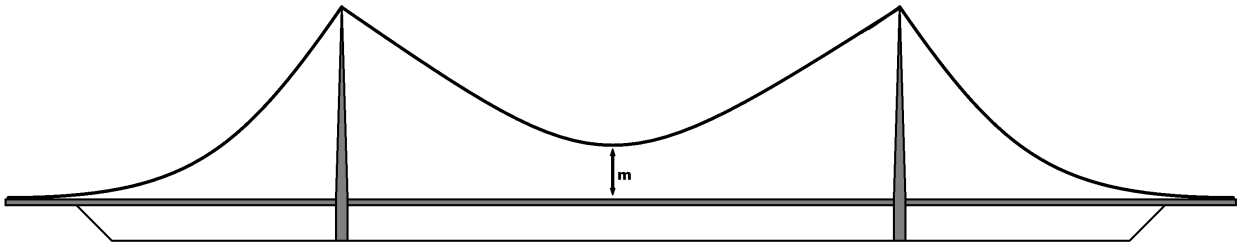
a) $f_a(x) = 6x^2 + 4$

b) $f_b(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 3$

c) $f_c(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2x + 3$

d) $f_d(x) = \pi(x-e)^2 + 2ex + \sqrt{2}$

Aufgabe 6: *Löse alle Teilaufgaben zur Hängebrücke.*



Weitere Übungen zu Parabeln zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

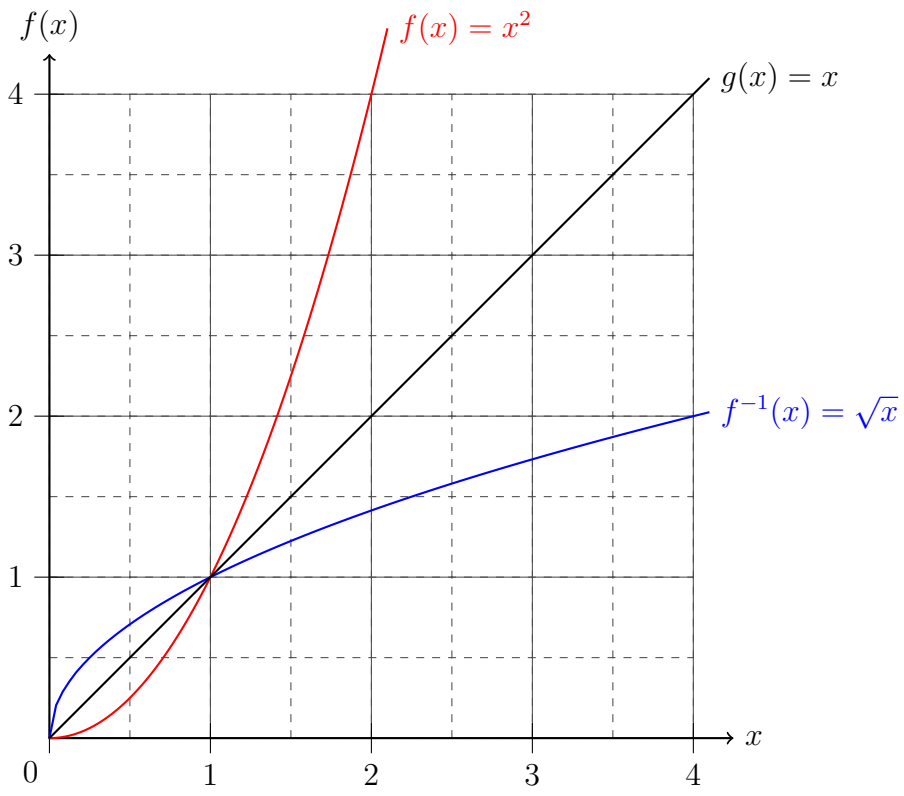
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.33) Lösungen zu Parabeln.

5.5 Umkehrfunktionen

Wie schon bei den Grundlagen der *Algebra* eingeführt wurde, existiert zu jeder *Rechenoperation* eine *Umkehrung*. Folglich existiert zu jeder *Funktion* eine *Umkehrfunktion*. Die Unterschiede der *Funktion* zur *Umkehrfunktion* sind andere *Werte*- und *Definitionsbereiche*. Sei eine *Funktion* $f(x)$ gegeben, dann beschreibt $f^{-1}(x)$ die *Umkehrfunktion* und es gilt dabei immer:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad . \tag{5.25}$$

Die Gleichung (5.25) sagt aus, dass die *Funktion* $f(x)$ von der *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ und die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ von der *Funktion* $f(x)$ gleich der *Variable* x ist. Folglich kann die *Funktion* $f(x)$ statt x in die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt werden und das Ergebnis ist stets x - das gleiche gilt auch für die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt in die *Funktion* $f(x)$. So ist zum Beispiel die *Umkehrfunktion* der *Funktion* $f(x) = x^2$ gegeben als $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,



wobei die *Graphen* im *ersten Quadranten* im *Koordinatensystem* zu sehen sind. Auch zu sehen ist, dass $f(x)$ *gespiegelt* an der *Geraden* $g(x) = x$ die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ ergibt. So die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ zu bestimmen ist graphisch immer möglich. Allerdings gibt es auch ein *algebraisches* Verfahren[1]. Zur Verdeutlichung sei die *Funktion* $f(x) = -\frac{1}{2}9,81x^2 + 5$ gegeben.

[1] Verfahren durch Umstellungen von Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}9,81x^2 + 5 \quad |-5 \\
f(x) - 5 &= -\frac{1}{2}9,81x^2 \quad \left| : \left(\frac{9,81}{2}\right)\right. \\
\frac{2(5 - f(x))}{9,81} &= x^2 \quad |\sqrt{} \\
\sqrt{\frac{2(5 - f(x))}{9,81}} &= x \quad |\text{Umbenennung} \\
\Rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{2(5 - x)}{9,81}}
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Die Gleichung (5.26) zeigt, dass die *Umkehrfunktion* berechnet werden kann, indem nach der *Variable* aufgelöst wird. Als abschließender Schritt werden $f(x)$ in x und x in $f^{-1}(x)$ umbenannt. Über dieses Verfahren lassen sich alle *Umkehrfunktionen* bestimmen. Wichtig ist hierbei, dass die unterschiedlichen *Definitions-* und *Wertebereiche* berücksichtigt und niedergeschrieben werden. So unterscheiden sich diese bei der *Beispielfunktion* zu ihrer *Umkehrfunktion* stark:

$$
\begin{aligned}
f(x): &\quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{W} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\} \\
\Rightarrow f^{-1}(x): &\quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\} \qquad \mathbb{W} = \left\{x \in \mathbb{R}^+\right\}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

In den folgenden Abschnitten werden die *Funktionen* analysiert und ihre *Umkehrfunktionen* vorgestellt.

5.5.1 Übungsaufgaben zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = x + 6$
b) $f(x) = 3x - 9$
c) $f(x) = x^2 - 64$
d) $f(x) = -x^2 + 3x + 8$
e) $f(x) = 4x^2 + 8x - 6$
f) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

Aufgabe 2: *Zeichne den Graphen der Funktion und der Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem.*

a) $f(x) = x - 1$
b) $f(x) = 2x + 2$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
d) $f(x) = 2x^2 - 6$
e) $f(x) = x^2 - 4x - 4$
f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$
g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{5}$
h) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{6}$

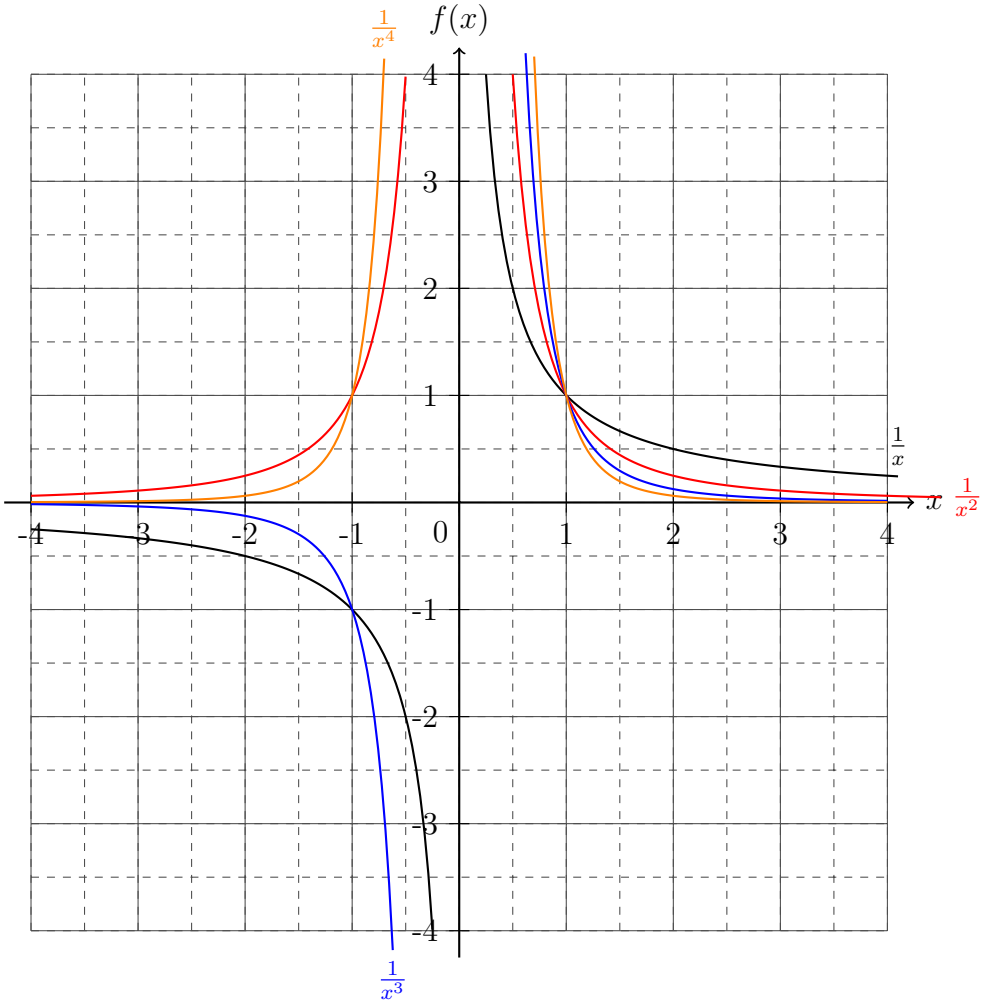
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.34) Lösungen zu Umkehrfunktionen.

5.6 Hyperbeln

Nachdem die *Gerade* und *Parabel* vorgestellt wurde, soll in diesem Abschnitt die *Hyperbel* besprochen werden. Eine *Hyperbel* ist definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{5.28}$$

Wie schon in der Einleitung des Kapitels erwähnt wurde, muss bei einer *Funktion* die *Definitionsmenge* bestimmt werden, welche bei einer *Hyperbel* durch die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ohne 0 gegeben ist. Die *Hyperbel* beschreibt die Grundform aller *Funktionen* mit negativer *Potenz*.



Wie die Abbildung zeigt, dass die *Hyperbel* und höhere *Potenzen* der selben bei $x = 0$ von rechts gegen ∞ und von links gegen $-\infty$ gehen. Dabei steigen die *Funktionen* stärker an je höher die *Potenz* ist. Je weiter sich die *Funktionen* vom *Koordinatenursprung* entfernen, desto weiter schmiegen sich die *Funktionen* der *Abszisse* an. Dabei ist dieses Verhalten der *Funktionen* auch stärker je höher die *Potenz* ist. Auch zu erkennen ist, dass alle *Graphen* durch den *Punkt* $P(1|1)$ gehen. Gerade *Potenzen* sind an der *Ordinate* gespielt in den *zweiten Quadranten*, während ungerade *Potenzen* im *Koordinatenursprung* in den *dritten Quadranten* gespiegelt werden.

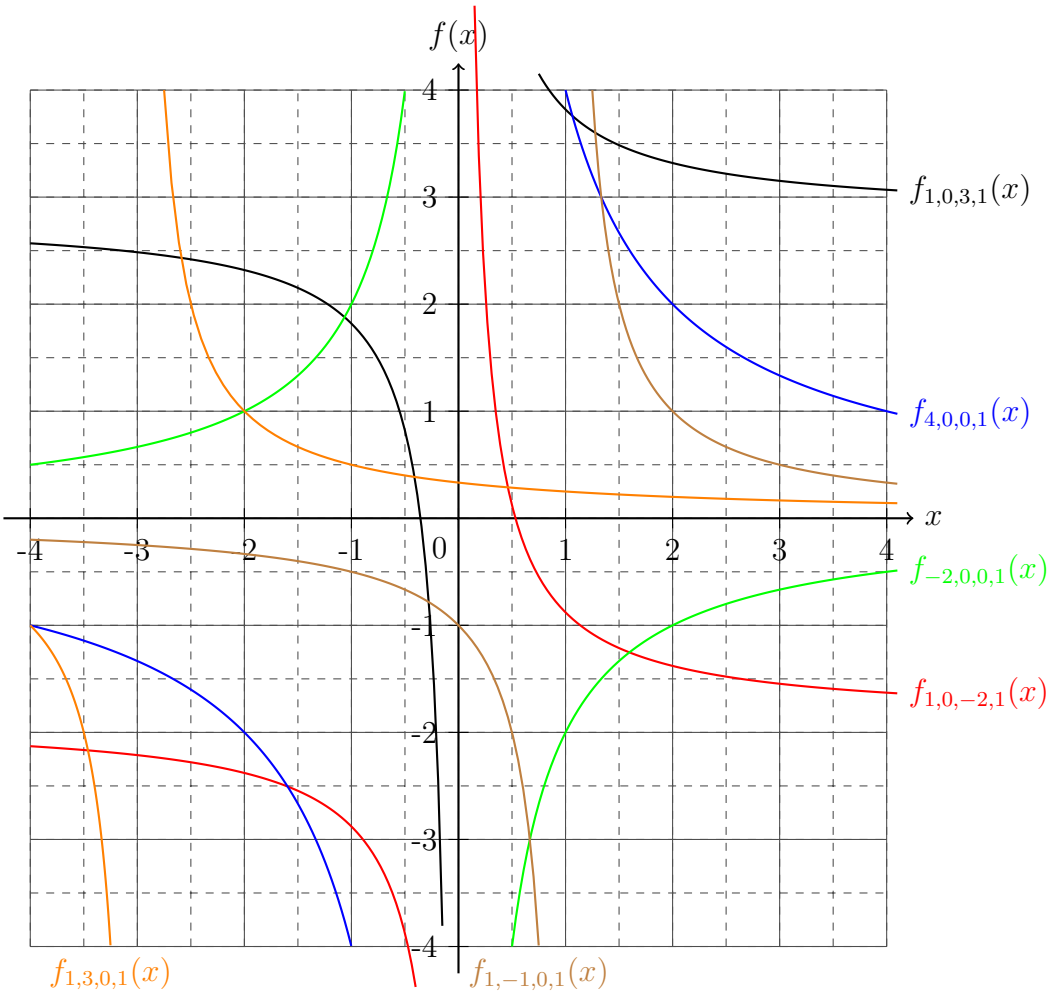
Die *Umkehrfunktion* der *Hyperbel* ist wieder eine *Hyperbel*. Für höhere *Potenzen* gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \tag{5.29}$$

Wenn die *Hyperbel* um eine Zahl c *addiert* wird, dann wird diese auf der *Ordinate* verschoben, sodass eine *Nullstelle* entsteht. Würde eine Zahl b im *Nenner addiert* werden, verschiebt sich die *Hyperbel* entlang der *Abszisse* und eine in den *Zähler multiplizierte* Zahl a würden den *Punkt* verschieben an dem sich alle weiteren *Potenzen* von x schneiden würden. Dabei bestimmt das Vorzeichen von a ob sich die *Hyperbel* hauptsächlich im ersten und dritten oder im zweiten und vierten *Quadranten* aufhält. Der *Punkt* an dem sich alle höheren *Potenzen* schneiden würden, ist gegeben als $P(\sqrt{a}|\sqrt{a})$, wenn die anderen *Parameter* gleich Null gesetzt würden.

$$f_{a,b,c,n}(x) = \frac{a}{x^n + b} + c \tag{5.30}$$

Im folgenden *Koordinatensystem* sind für $n = 1$ jeweils zwei Variationen der *Parameter* als *Graph* dargestellt.



5.6.1 Übungsaufgaben zu Hyperbeln

Aufgabe 1: *Bestimme die Nullstelle x_n und die Definitionsmenge $\mathbb{D}$.*

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ *b)* $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ *d)* $f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} - 3$

e) $f(x) = \frac{2}{x-\frac{2}{3}} + \sqrt{5}$ *f)* $f(x) = \frac{\pi}{x-\sqrt{2}} + e$

Aufgabe 2: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ *b)* $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}$

c) $f(x) = \frac{9}{4x-2} + 3$ *d)* $f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-6} + 4$

e) $f(x) = \frac{2}{3x^2-27} + \frac{7}{8}$ *f)* $f(x) = \frac{e}{x^3 \ln 2 - \pi} + \sqrt{2}$

Aufgabe 3: *Zeichne folgende Hyperbeln*

a) $f_a(x) = \frac{1}{x} + 1$ *b)* $f_b(x) = \frac{1}{2x} - 1$

c) $f_c(x) = \frac{1}{2x-3}$ *d)* $f_d(x) = \frac{6}{0,5x^2}$

e) $f_e(x) = \frac{2}{3x+1,5} - 1,5$ *f)* $f_f(x) = \frac{1,15}{x-3} + 0,5$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.35) Lösungen zu Hyperbeln.

5.7 Grenzwerte

Wie schon beim *Graphen* der *Hyperbel* zu sehen war, haben einige *Funktionen* Lücken in der *Definitionsmenge* x_L. Dabei zeigen die *Funktionen* oftmals ein interessantes Verhalten an diesen Stellen. So ist bei der *Hyperbel* ein Sprung von $-\infty$ zu ∞ zu sehen. Diese Stelle wird dann *Polstelle mit Vorzeichenwechsel*. Bei der *Funktion* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ war kein Sprung festzustellen, sodass lediglich von einer *Polstelle* gesprochen wird. Von einer *Definitionslücke* ist die Rede, wenn eine *Funktion* in einem *Punkt* nicht *definiert* ist, allerdings kein Verhalten festzustellen ist, dass nicht zu einer *Polstelle* passt. Solche *Funktionen* werden später im Abschnitt „gebrochen rationale Funktionen“ behandelt.

Um das Verhalten um solche Lücken in der *Definitionsmenge* oder für besonders große oder kleine Zahlen zu beschreiben, dient der sogenannte *Grenzwert*. Dabei wird zwischen einem *linksseitige* und einem *rechtsseitigen Grenzwert* - also ob von den kleineren Zahlen oder von den größeren Zahlen aus zur Lücke gegangen wird.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \nearrow x_L} f(x) && \text{linksseitiger Grenzwert} \\ &\lim_{x \searrow x_L} f(x) && \text{rechtsseitiger Grenzwert} \end{aligned} \tag{5.31}$$

Für die *Hyperbel* $\frac{1}{x}$ existieren folgende *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Generell kann bei jeder *Funktion* der *Grenzwert* gegen ∞ und $-\infty$ bestimmt werden. Dabei sind die *Grenzwerte* in der Schule von relativ trivialer Natur, sodass sich das *Verhalten* offenbart, indem Zahlen nahe der Zielzahl einsetzt. Für das Verhalten einer *Funktion* gegen besonders große oder kleine Zahlen zu bestimmen reicht es aus zwei besonders große oder kleine Zahl einzusetzen und die *Funktionswerte* zu vergleichen. Für die *Hyperbel* ergibt sich daraus, dass die *Funktionswerte* gegen Null gehen. Dabei bedeutet „gegen Null“, dass die Erreichung dieses *Funktionswertes* unerreichbar ist. Die *Funktion*, die diese nicht erreichbaren *Funktionswerte* beschreibt, wird *Asymptote* genannt. Aus diesem Grund wird von einem *asymptotischen Verhalten* gegen Null für große Zahlen bei einer *Hyperbel* gesprochen.

Einige wichtige *Grenzwerte*:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} &= \infty \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= e \\
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= e^x \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) &= \ln a
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

5.7.1 Übungsaufgaben zu Grenzwerte

Aufgabe 1: *Bestimme die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.*

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{x-6}$

$b)\ \ f(x) = \dfrac{1}{2x-8}$

$c)\ \ f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$

$d)\ \ f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

$e)\ \ f(x) = \dfrac{1}{2x^2-4}$

$f)\ \ f(x) = \dfrac{1}{4x^2-1}$

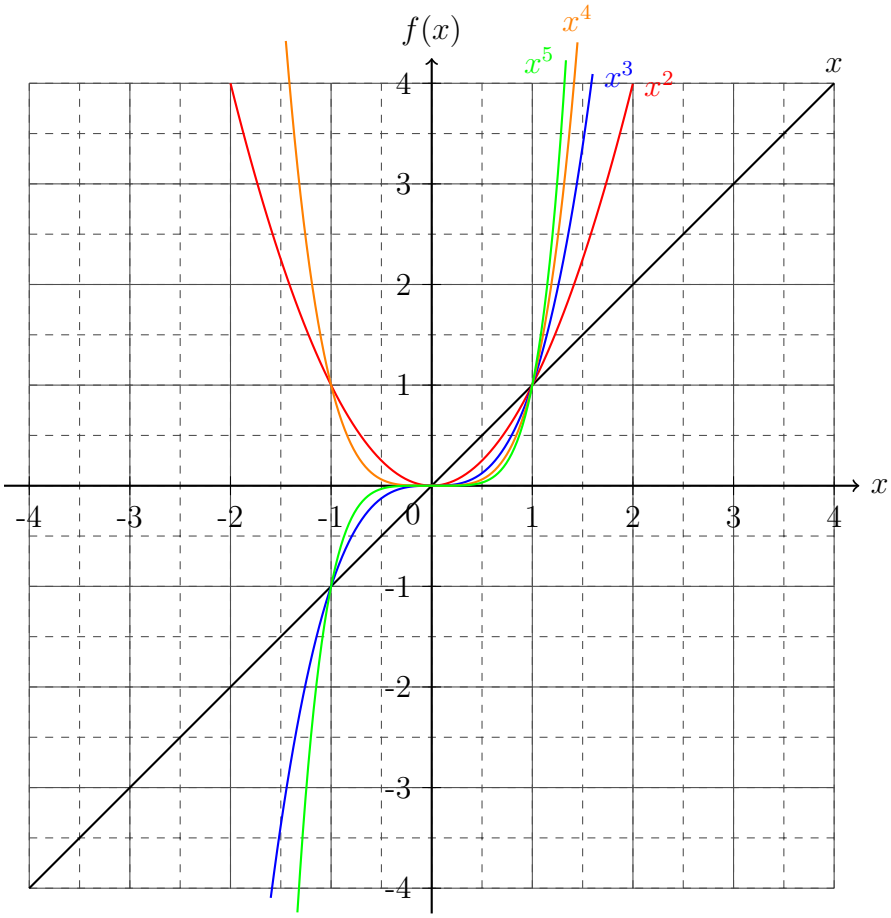
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.36) Lösungen zu Grenzwerte.

5.8 Polynomfunktionen

Nach der Diskussion der *Geraden* und der *Parabeln* kann ein Zusammenhang zwischen diesen festgestellt werden. Dabei lohnt sich eine Gegenüberstellung der *linearen* und *quadratischen Funktion* mit höheren *Funktionen*:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1x + a_0 \qquad \text{1. Ordnung}\\
f_2(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{2. Ordnung}\\
f_3(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{3. Ordnung}\\
f_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{4. Ordnung}\\
f_5(x) &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{5. Ordnung}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.34}$$

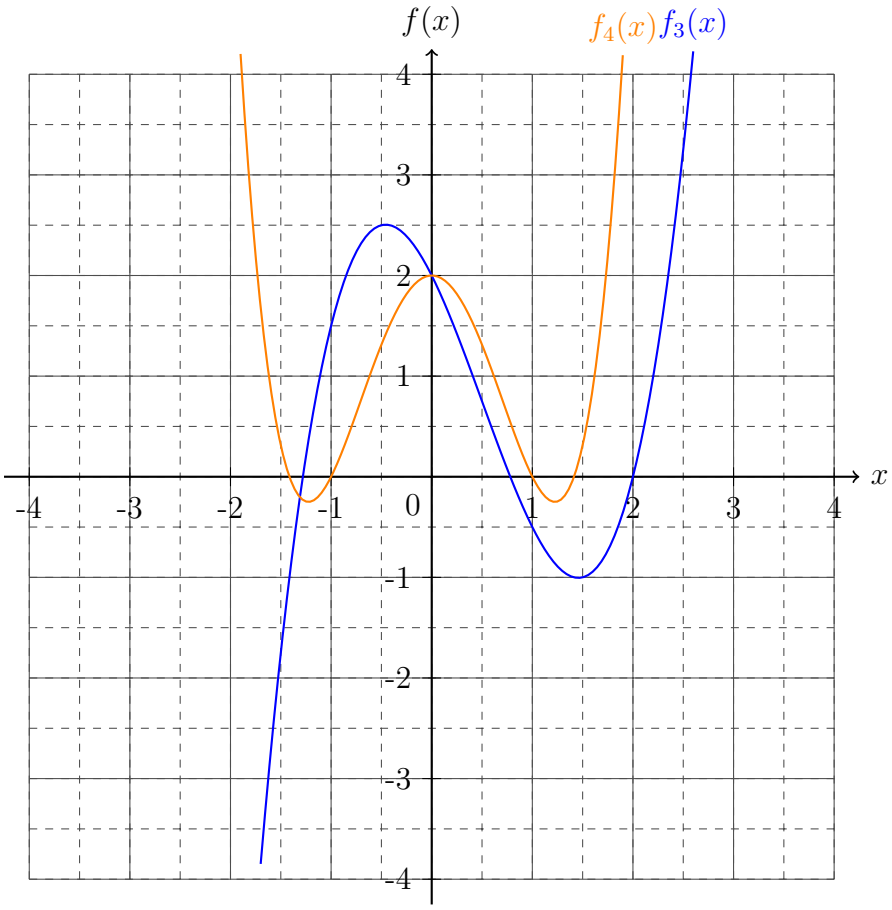
Deutlich an der Gleichung (5.34) ist zu erkennen, dass durch die Höhe der *Potenzen* die Anzahl der *Terme* und der *Parameter* zunimmt. Die rechte Seite der *Funktionsgleichungen* werden *Polynome* genannt. *Polynome* zeichnen sich dadurch aus, dass die *Potenzen* der *Variablen aufaddiert* werden und dabei jeweils ihren spezifische *Vorfaktoren* besitzen.
Dabei unterscheiden sich die Eigenschaften der *Polynomfunktionen* je nach Ordnung. Um diese vergleichen zu können, werden nur die höchsten *Terme* der *Polynome* berücksichtigt.



Ungerade *Potenzen* sind dabei *symmetrisch* in einem *Punkt*, während gerade *Potenzen symmetrisch* zu einer Linie *parallel* zur *Ordinate* sind. Außerdem zeigt die Abbildung auch, dass mit

steigender *Potenz* die *Funktionen* nach dem *Punkt* $P(1|1)$ einen stärkeren Anstieg zeigen und vor diesem *Punkt* schneller gegen Null gehen.

Um mehr Eigenschaften der *Polynomfunktionen* in den dazugehörigen *Graphen* ablesen zu können, werden nun beliebige Beispiele von *Polynomen* dritter und vierter *Ordnung* graphisch dargestellt.



Aus dem *Koordinatensystem* ist das charakteristisch Bild der *Graphen* von *Polynomfunktionen* dritter und vierter *Ordnung* zu erkennen. Dabei fällt auf, dass eine *Funktion* eines *Polynom* dritter *Ordnung* zwei Stellen besitzt, die dem *Scheitelpunkt* der *Parabel* ähneln. Diese Stellen werden werden *Extremstellen* und die dazu gehörigen *Punkte* werden *Extrempunkte* genannt. Dabei wird unterschieden zwischen *Minima* und *Maxima*. Eine *Polynomfunktion* vierter *Ordnung* besitzt drei *Extrempunkte*.

Die Berechnung der *Nullstellen* wird in einer späteren Version des Buches an dieser *Stelle* vorgestellt.

5.8.1 Übungsaufgaben zu Polynomfunktionen

Aufgabe 1: *Zeichne den Graphen der jeweiligen Funktion.*

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
b) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
c) $h(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x$
d) $k(x) = x^5 - 3x^3 - 2$
e) $l(x) = 2x^4 - 4x + 2$
f) $m(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + 4$
g) $n(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 5x$
h) $o(x) = -x^5 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{6}{5}x^2$

Aufgabe 2: *Bestimme die Nullstellen der Funktionen.*

a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 32$
b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x$
c) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 7$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 6x^2 + 18$
e) $f(x) = 5x^5 + 15x^4$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x$
g) $f(x) = -2x^6 + 8x^5 + 4x^4$
h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.37) Lösungen zu Polynomfunktionen.

5.9 Reihen

Da oftmals viele ähnliche *Terme aufaddiert* oder *-multipliziert* werden, gibt es auch für dieses Prozedere eine abkürzende Schreibweise. Zu nächst wird die Abkürzung für die *Addition* eingeführt - die *Summenreihe* $\sum$. Dabei sei als Beispiel $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ gegeben. Die abkürzende Schreibweise würde wie folgt aussehen:

$$\sum_{n=0}^{5} x^n = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad , \tag{5.35}$$

wobei die Gleichung (5.35) als „Die *Summe* über x^n von $n = 0$ bis $n = 5$“ gesprochen wird. Somit wird unter dem *Summenzeichen* $\sum$ den durchlaufenden *Parameter* (hier n) und den Startwert an. Über dem *Summenzeichen* $\sum$ ist der maximale Wert des *Parameters* bei der *Addition* angegeben. Für komplexere *addierte Terme* könnte eine solche *Summe* zum Beispiel so aussehen:

$$\sum_{n=2}^{4} \frac{1}{n!} \cdot \log_n \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{2!} \cdot \log_2 \left(\sqrt[2]{x}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \log_3 \left(\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{4!} \cdot \log_4 \left(\sqrt[4]{x}\right) \quad . \tag{5.36}$$

Viele komplexere *Summen* sind schon bekannt, allerdings wurden sie noch nicht in ihrer *Summenform* vorgestellt. Da diese *Summen* besonders oft vorkommen, wurden für diese *Summen* wiederum Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= e^x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \sin x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} &= \cos x \end{aligned} \tag{5.37}$$

Auch das Beispiel aus Gleichung (5.35) ist eine besondere *Summenreihe* - die sogenannte *geometrische Reihe*:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=0}^{k} x^n &= \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Aber auch die *Vorfaktoren* der *binomischen Formeln* für höhere *Potenzen* k lassen sich über *Reihen* darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} = (1+x)^k \tag{5.39}$$

Für *Polynome* wird oftmals auch eine *Summenreihe* verwendet

$$\sum_{n=0}^{k} c_n x^n \quad , \tag{5.40}$$

wobei c_n für jede *Potenz* von x einen anderen Wert haben kann und sind *Koeffizienten*, also *Vorfaktoren*.

Wesentlich seltener kommen *Produktreihen* $\prod$ vor, welche nur kurz vorgestellt werden sollen.

$$\prod_{n=0}^{4} x^n = x^0 \cdot x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \tag{5.41}$$

Dabei ist die *Fakultät* eine oft vorkommende *Produktreihe* und wird durch den *Fakultätsoperator* ! abgekürzt.

$$\prod_{n=0}^{k} n = k! \tag{5.42}$$

Wichtig für jeden Schüler ist es zu wissen was sich hinter diesen Symbolen verbirgt, sodass weiterführende Zusammenhänge hergestellt werden können und Gleichungen mit komplexer Struktur den Schüler nicht abschrecken lassen, da bekannt ist, dass es sich lediglich um eine abkürzende Schreibweise handelt. Hierbei sollte auch beachtet werden, dass *Reihen* mit *Summanden* beziehungsweise *Faktoren* oftmals nicht vollständig ausgeschrieben werden können. Allerdings werden in einigen Rechnungen zur Verdeutlichung Teile der *Reihe* benötigt, sodass eine korrekte Schreibweise hierfür noch eingeführt werden muss.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) \tag{5.43}$$

Wobei in der Gleichung (5.43) das $\mathcal{O}\left(x^5\right)$ die Bedeutung besitzt, dass alle *Terme* mit der *Ordnung* fünf oder größer in x nicht ausgeschrieben werden, aber dennoch vorhanden sind. Dieses Überbleibsel der restlichen *Ordnungen* muss in jeder Rechnung mit getragen werden, solange ein *Äquivalenzzeichen* verwendet wird.

5.9.1 Übungsaufgaben zu Reihen

Aufgabe 1: *Schreibe die Reihe aus.*

a) $\sum_{n=0}^{6} n$

b) $\sum_{n=0}^{6} n!$

c) $\sum_{n=0}^{6} x^n$

d) $\sum_{n=1}^{6} \frac{x^n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{6} \sqrt[n]{nx}$

f) $\sum_{n=3}^{6} \frac{nx^n}{n! - n}$

g) $\prod_{n=1}^{6} \sqrt[n]{x}$

h) $\prod_{n=1}^{6} \sqrt[n]{n!}$

i) $\prod_{n=0}^{6} n!x^n$

j) $\prod_{n=0}^{6} (x - n)$

k) $\sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{x^n}$

l) $\sum_{n=0}^{6} (-1)^n \frac{n}{n!} x^n$

m) $\sum_{n=1}^{7} (-1)^n \binom{n+2}{n}$

n) $\prod_{n=1}^{4} \binom{n+1}{n-1}!$

o) $\sum_{n=3}^{6} \sqrt[n]{\binom{n}{n-3}} x^n$

p) $\sum_{n=1}^{5} \left((-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{3} n^k \right)$

Aufgabe 2: *Schreibe die Summe beziehungsweise das Produkt als Reihe auf.*

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

b) $1 + 2 + 6 + 24 + 120$

c) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5 \cdot x^6 \cdot x^7 \cdot x^8$

d) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5(x-6)^6$

e) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - 6x + 7x - 8x + 9x$

f) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{12}}{6}$

g) $\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{-1}}{6} + \frac{1}{24} + \frac{x}{120} + \frac{x^2}{720}$

h) $-x + 2x^3 - 6x^5 + 24x^7 - 120x^9$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.38) Lösungen zu Reihen.

5.10 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind *Funktionen*, die im *Nenner* und im *Zähler* ein *Polynom* vorzuweisen haben. Dabei wird zwischen *echten* und *unechten gebrochen rationalen Funktionen* unterschieden. Eine *echt gebrochen rationale Funktion* wäre zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 25} \quad , \tag{5.44}$$

wobei der *Nenner* nicht wegzudiskutieren ist. Anders sieht dies bei den *unecht gebrochen rationalen Funktionen* aus, welche oftmals in Verbindung mit den *binomischen Formeln* vorzufinden sind.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)\,(x + 3)}{x + 3} = x - 3 \quad , \tag{5.45}$$

Gleichung (5.45) zeigt, dass die *Funktion* bei $x = -3$ aufgrund der Bruchschreibweise nicht definiert ist, allerdings kann durch Anwendung der *binomischen Formeln* gezeigt werden, dass es sich bei dieser Struktur der *Funktion* lediglich um eine *Gerade* handelt. Allerdings sind einige *Brüche* nicht so einfach zu kürzen wie in diesem Beispiel. Hierfür bedarf es der sogenannten *Polynomdivision*, also der *Division* durch ein *Polynom*. Dabei wird wie bei der schriftlichen *Division* der *Grundrechenarten* gerechnet, allerdings statt durch Zahlen zu *dividieren*, wird durch einen *Funktionsterm* dividiert. Um die *Polynomdivision* zu demonstrieren sei folgende *Funktion* gegeben:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 48}{x - 2} \quad , \tag{5.46}$$

wobei durch die *Polynomdivision* überprüft werden kann ob es sich um eine *echte* oder *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & \\
\hline
 & 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 \\
 & -(6x^3 & -12x^2) & & \\
\hline
 & & 8x^2 & +8x & -48 \\
 & & -(8x^2 & -16x) & \\
\hline
 & & & 24x & -48 \\
 & & & -(24x & -48) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Bei der *Polynomdivision* ist kein *Restterm* vorhanden, sodass der Schluss gezogen werden kann, dass es sich um eine *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt. Das Verfahren der *Polynomdivision* ist auch nützlich wenn *Null-* oder andere *Stellen* bei höheren *Polynomfunktionen* bestimmt werden sollen.

Insgesamt zeigt sich durch diese Unterscheidung, dass *unechte gebrochen rationale Funktionen* keine *Polstelle* sondern eine *Definitionslücke* besitzen, wobei bei komplexeren *Funktionen* lediglich sich nur die *Polstellenanzahl* reduziert.

5.10.1 Übungsaufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 1: *Führe die Polynomdivision durch.*

a) $\left(x^3 - x^2 - 5x - 3\right) : (x - 3)$

b) $\left(x^5 + x^3 + 5x^2 - 2x + 10\right) : \left(x^2 + 2\right)$

c) $\left(\frac{25}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^3 + 15x^2 - 21\right) : \left(x^2 + \frac{5}{2}x + 3\right)$

d) $\left(x^4 - 25\right) : \left(x^2 + 5\right)$

e) $\left(x^5 + x^4 + x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}\right) : \left(x^2 + x + 1\right)$

f) $\left(-9x^3 - 60x^2 + 48x - 9\right) : (9x - 3)$

g) $\left(-\frac{\ln 2 \cdot x^3}{3} - \frac{\ln 2 \cdot x^2}{7} - \frac{e^\pi x}{3} - \frac{e^\pi}{7}\right) : \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{7}\right)$

h) $\left(-\sqrt{2}x^4 + \sqrt{34}x^3 + ex^2 - e\sqrt{17}x - \pi x + \pi\sqrt{17}\right) : \left(-x + \sqrt{17}\right)$

Aufgabe 2: *Führe die Polynomdivision durch und addiere den Rest dividiert durch den Divisor zum Ergebnis.*

a) $\left(x^2 - 4x + 2\right) : (x + 5)$

b) $\left(x^3 + 3x^2 - 5\right) : \left(x^2 - 2\right)$

c) $\left(6x^4 + x^2 - 15\right) : (x - 1)$

d) $\left(\frac{2}{3}x^6 - 3x^4 + 8\right) : \left(4x^2 + 2\right)$

e) $\left(-7x^3 - 9x + 2\right) : \left(\frac{1}{5}x - 3\right)$

f) $\left(x^9 - x^4 + x^2 + 1\right) : \left(x^2 - 3\right)$

Aufgabe 3: *Überprüfe mit der Polynomdivision welche Funktion eine echte und welche eine unechte gebrochen rationale Funktion ist.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

b) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 15x + 6}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{8x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{10x^3 - 17x^2 + 12x - 3}{2x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4 + 256}{x^2 + 4}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x^3 - ex^2 + \pi\sqrt{2}x - e\pi}{x^2 + \pi}$

Aufgabe 4: *Zeichne den Graphen der jeweiligen Funktion.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

b) $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 7}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^3 - x + 4}{x^2 - 4}$

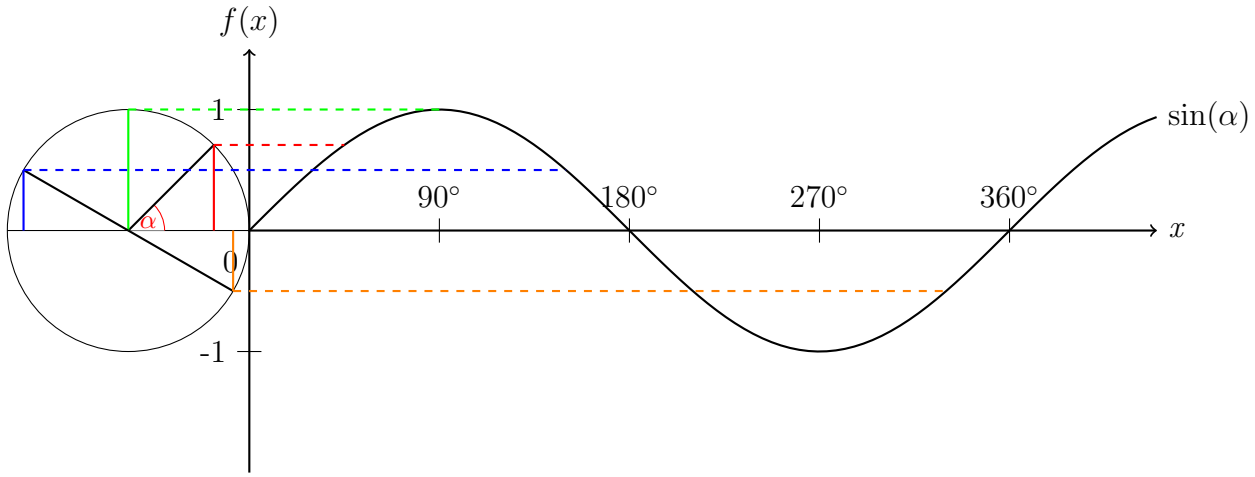
e) $f(x) = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x - 3}$

f) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x - 2 + \dfrac{1}{x^2 - 2}$

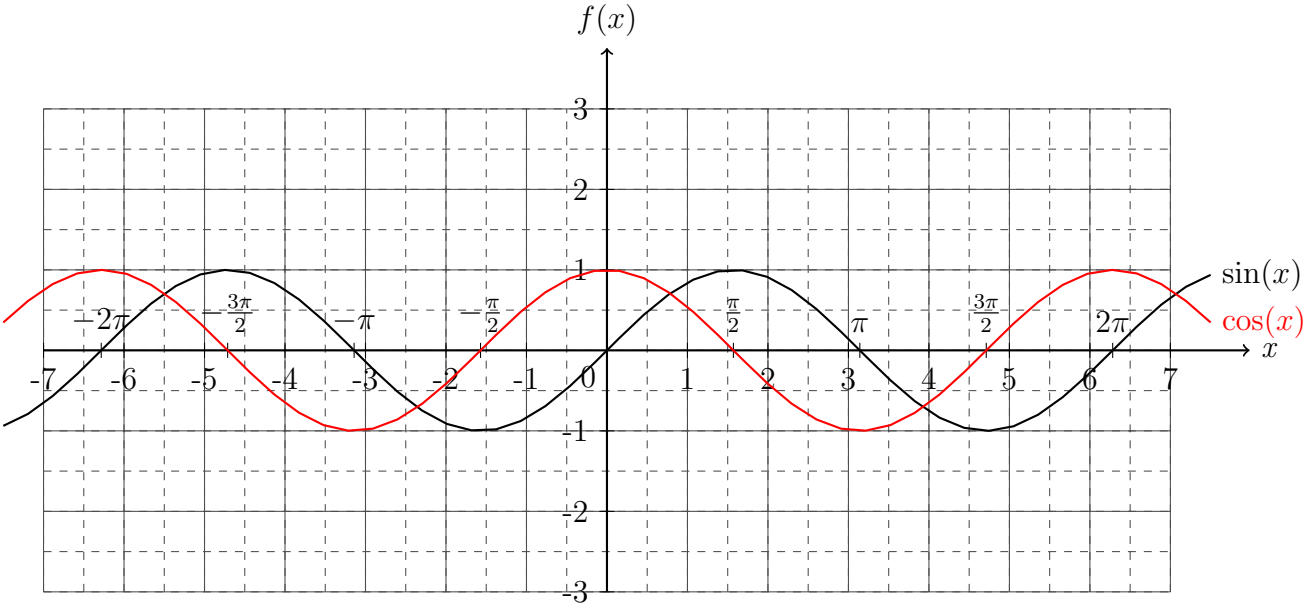
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.39) Lösungen zu gebrochen rationalen Funktionen.

5.11 Trigonometrische Funktionen

Als die *Trigonometrie* eingeführt wurde, wurden auch schon die *trigonometrischen Funktionen* eingeführt, da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sowie $\tan(x)$ und $\cot(x)$ sind bereits *Funktionen*, wie auch an der sprachlichen Übersetzung zu erahnen war: „Sinus von x“. Um den *Graphen* der *Sinus-Funktion* zu veranschaulichen, wird ein *Kreis* mit *Radius* $r = 1$ gewählt, sodass die *Hypotenuse* auch immer gleich 1 ist. Daraus folgt, dass die *Gegenkathete* zum Winkel α, welcher sich am *Kreismittelpunkt* befindet, den *Sinus-Funktionswert* entspricht.



Durch den *Graphen* und den sogenannten *Einheitskreis* wird auch ersichtlich, dass sich die *Sinusfunktion* sich nach $360° = 2\pi$rad wiederholt. Diese *periodische* Eigenschaft der *Funktion* ist besonders oft in den Naturwissenschaften zur Beschreibung der Natur vorzufinden.
Da der *Kosinus* nur ein um 90° verschobener *Sinus* ist ähneln sich auch die *Funktionsgraphen*.



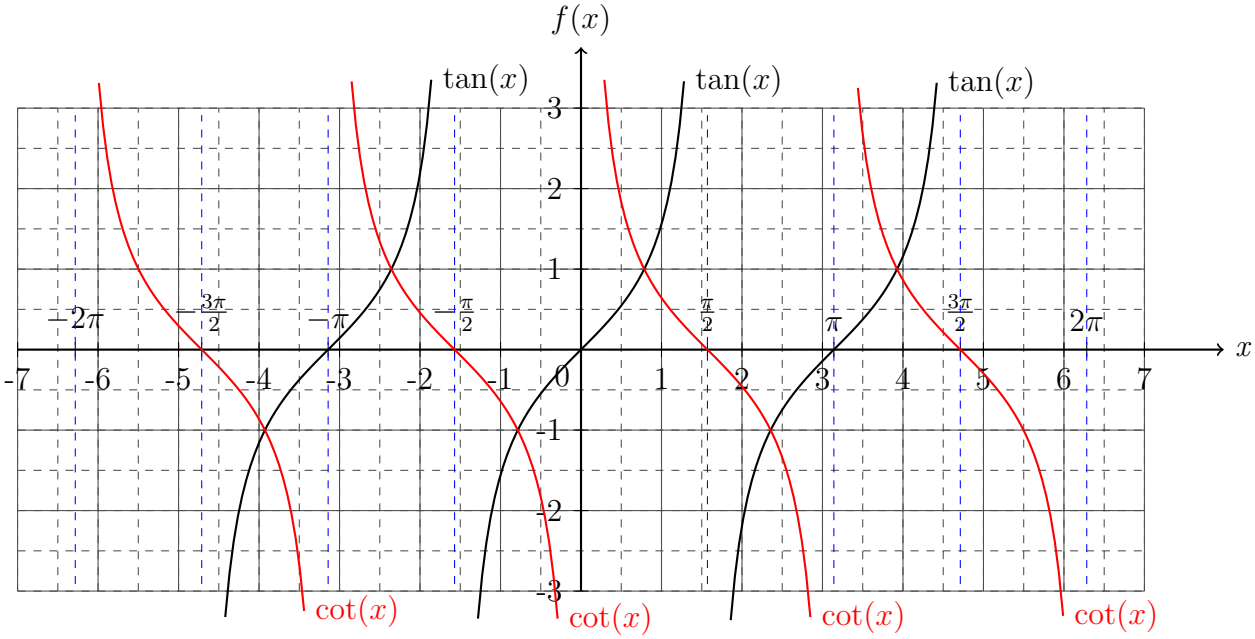
Durch die *Graphen* zeigen sich die wichtigen Eigenschaften, dass die *Funktionen* sich zwischen 1 und -1 bewegt und dass

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0 \quad \text{und} \\ \cos 0 &= 1 \end{aligned} \tag{5.47}$$

gilt. Außerdem ist zu erkennen, dass der *Kosinus symmetrisch* zur *Ordinate* und dass der *Sinus punktsymmetrisch* zum *Koordinatenursprung* ist.

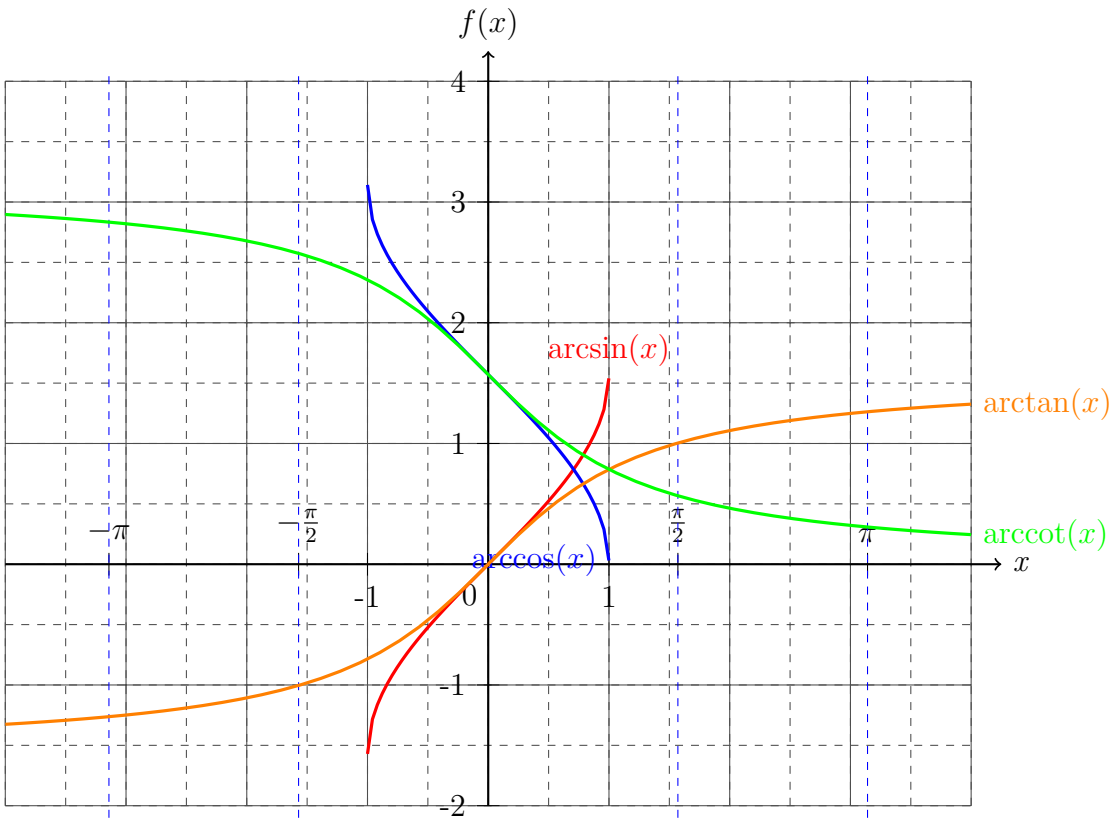
$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \quad \text{und} \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{5.48}$$

Der *Tangens* und der *Kotangens* sind *Brüche* aus *Sinus* und *Kosinus*, was wiederum bedeutet, dass es *periodische* Lücken in der *Definitionsmenge* muss. Dies zeigt sich auch in der Darstellung der *Graphen*.



Die *Graphen* zeigen, dass bei der *Tangens-* und der *Kotangens-Funktion* in *periodischen Abständen* zu *Polstellen* vorzufinden sind. Dabei ist die *Polstelle* des *Tangens* die *Nullstelle* des *Kotangens* und anders herum.

Die *Graphen* der *Umkehrfunktionen* sind im folgenden *Koordinatensystem* veranschaulicht.



5.12 Trigonometrische Identitäten

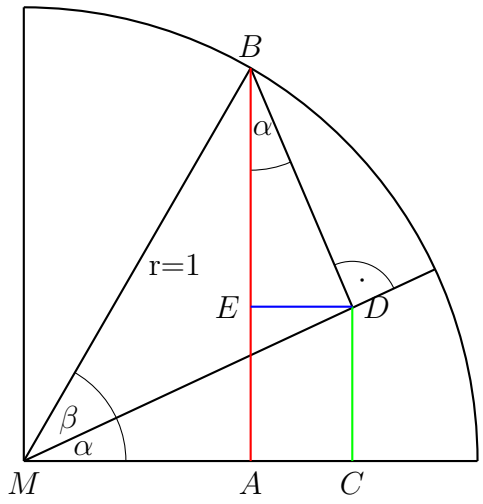
Wie schon im vorigen Abschnitt zu sehen war, gibt es Beziehungen zwischen *Sinus*, *Kosinus*, *Tangens* und *Kotangens*, den sogenannten *trigonometrischen Funktionen*. Diese Beziehungen können hergeleitet und bewiesen werden. Die wichtigste *trigonometrische Identität* ist der *Satz des Pythagoras* an einem *rechtwinkligen Dreieck* mit der *Hypotenusenlänge* von 1. Somit ergeben sich die *Katheten* zur Länge $\sin x$ und $\cos x$, sodass daraus die folgende *Identität* folgt:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad , \tag{5.49}$$

wobei $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ ist.
Des Weiteren gelten noch die sogenannten *Additionstheoreme*:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad , \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad , \end{aligned} \tag{5.50}$$

welche anhand des *Einheitskreises* bewiesen werden können.



Dabei ist die *Strecke* $\overline{AB} = \sin(\alpha + \beta)$ sowie die *Strecke* $\overline{BD} = \sin\beta$. Der *Kosinus* für den *Winkel* α wäre dann $\cos\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$, sodass dann $\overline{BE} = \cos\alpha\sin\beta$ ist. Da der *Sinus* von α durch das Verhältnis $\frac{\overline{CD}}{\overline{MD}}$ gegeben ist, ergibt sich mit $\cos\beta = \overline{MD}$ ein Ausdruck für die *Strecke* $\overline{BE} = \cos\alpha\sin\beta$. Die *Strecke* $\overline{AB}$ besteht aus der *Summe* der *Strecken* $\overline{BE}$ und $\overline{EA}$ und somit wäre das *Additionstheorem* für den *Sinus* bewiesen. Für die *Differenz* der *Winkel* werden die *Symmetrieeigenschaften* der *trigonometrischen Funktionen* ausgenutzt. Auch für den *Kosinus* kann eine ähnliche Herleitung aus dieser Abbildung beschrieben werden.

Aus dieser Beziehung und den anderen vorgestellten Eigenschaften aus dem vorherigen Abschnitt können noch weitere *Identitäten*.

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \quad , \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad , \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad , \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad .
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Die ersten beiden *Identitäten* können mit den *Additionstheoremen* schnell gezeigt werden, da $\sin 2x = \sin(x + x)$ und $\cos 2x = \cos(x + x)$. Mit Hilfe dieser Beiden *Identitäten* können schnell die beiden weiteren bewiesen werden.

All diese *Identität* können genutzt werden um weitere zu bewiesen und sind oft in Aufgaben sowie in der Beschreibung der Natur nützlich.

5.12.1 Übungsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 1: *Zeichne folgende Funktionen in ein Koordinatensystem für $x \in [-7, 7]$ und schreibe die Definitions- und Wertemenge auf.*

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + 5$

b) $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3$

c) $h(x) = 4 + \sin(2x)$

d) $l(x) = x + \cos(x)$

e) $k(x) = \cos(2x) - 5$

f) $m(x) = \sin(2x) - x$

g) $n(x) = \tan(2x)$

h) $o(x) = x\sin(x)$

Aufgabe 2: *Beweise folgende Identitäten. Verwende dabei nur die schon bewiesenen Identitäten (Die Additionstheoreme, den trigonometrischen Satz des Pythagoras und die vorherigen Unteraufgaben. Beispiel: Bei Aufgabe b ist die Identität aus Aufgabe a erlaubt).*

a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

c) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

d) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Aufgabe 3: *Bestimme alle Nullstellen.*

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

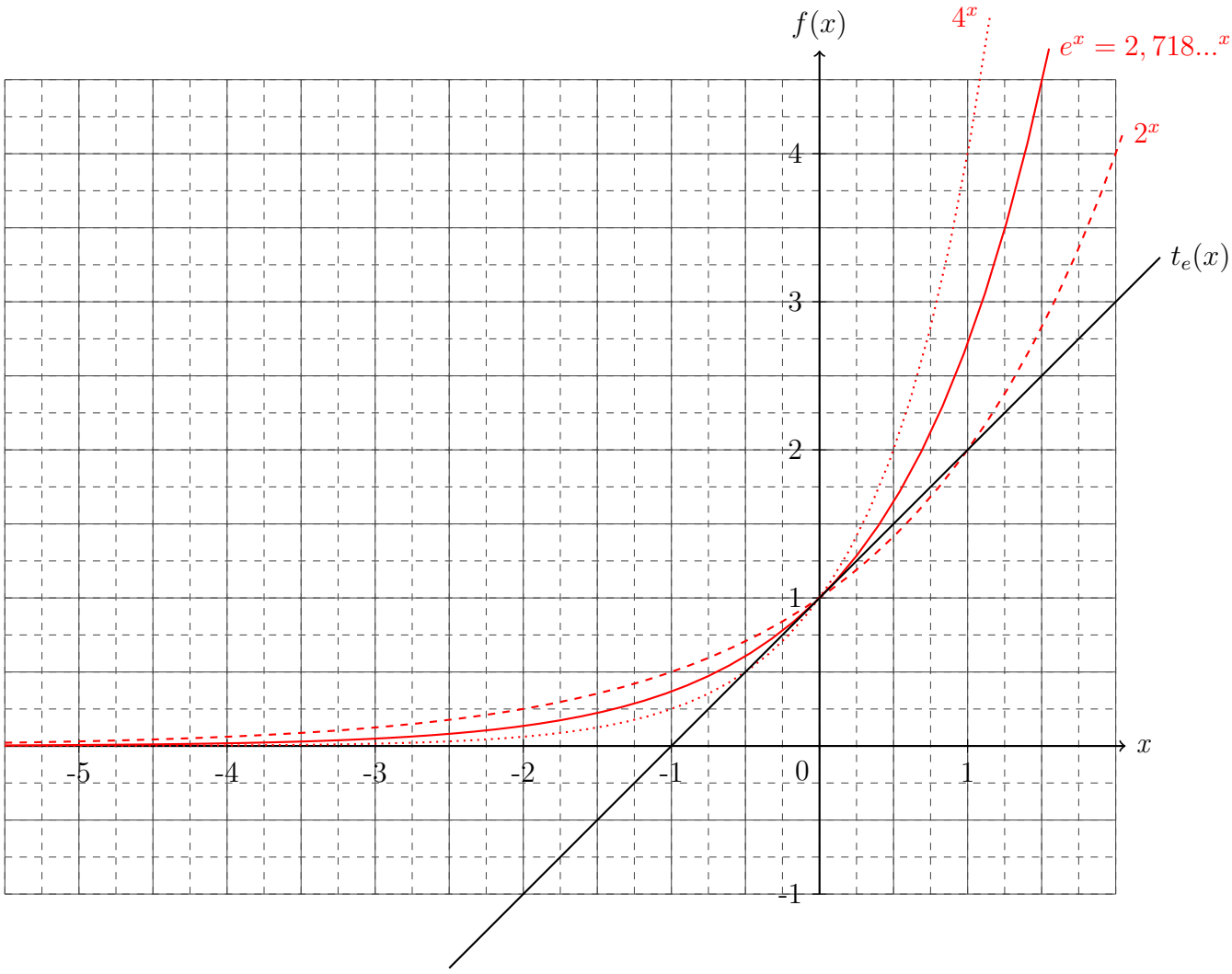
c) $f(x) = \tan(x)$

d) $f(x) = \cot(x)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.40) Lösungen zu trigonometrischen Funktionen.

5.13 Exponentialfunktion

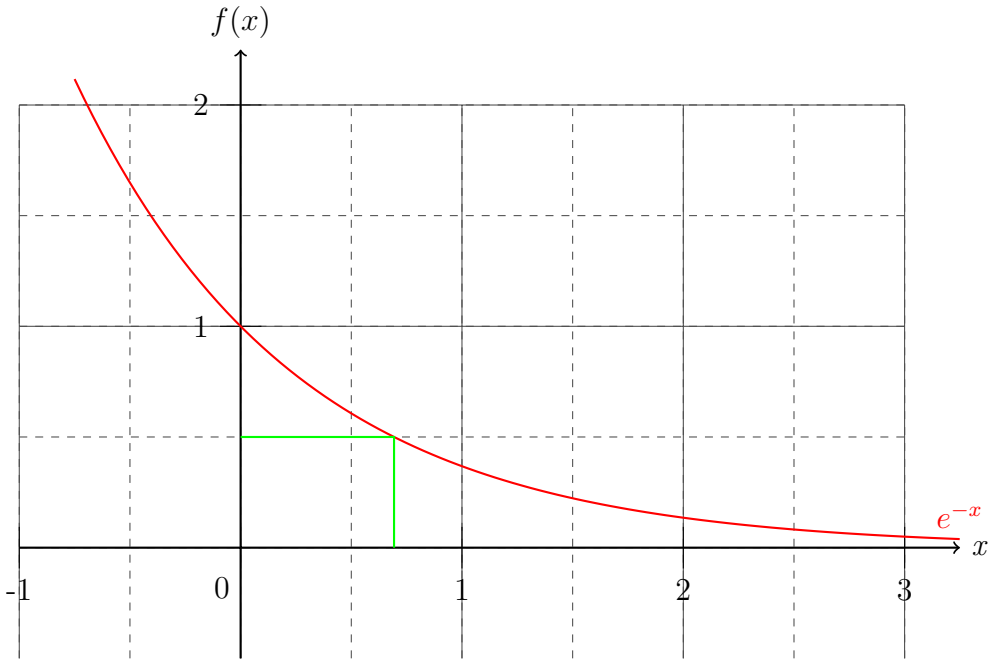
Zu guter Letzt wird noch die *Exponentialfunktionen* thematisiert. Dabei steht eine Zahl als *Basis* und im *Exponenten* die *Variable*. Dabei wurde schon im Abschnitt der *Logarithmen* die Zahl e eingeführt. Ihre besondere Rolle in der Mathematik hat sich im Laufe der Kapitel dabei schon wie bei den *Reihen* herauskristallisiert. Allerdings kann die große Bedeutung dieser Zahl in der *Basis* erst vollständig verstanden werden, wenn das Kapitel „Differentiation und Integration“ behandelt wurde. Für diesen Abschnitt ist die Wirkungsweise der *Exponentialfunktionen* von Bedeutung. Dazu finden sich im folgenden *Koordinatensystem* einige *Exponentialfunktionen* mit unterschiedlicher *Basis* wieder.



Dabei kann den *Graphen* entnommen werden, dass sich alle *exponentiellen Funktionen* für hohe negative Zahlen *asymptotisch* gegen Null bewegen, während die *Funktionswerte* für hohe positive Zahlen gegen Unendlich laufen. Diese Eigenschaft gilt es in sehr vielen Fällen, besonders in der Physik, auszunutzen, da die *Division* durch eine *Exponentialfunktion* bedenkenlos durchgeführt werden kann. Im *Koordinatensystem* befindet sich auch die *Funktion* $t_e(x)$, welche eine *Gerade* mit *Steigungsparameter* $m = 1$ ist. Diese spezielle *Gerade* ist eine *Tangente* der *Exponentialfunktion* mit der *Basis* e. Diese besondere Eigenschaft wird sich im späteren Verlaufes des Buches offenbaren.

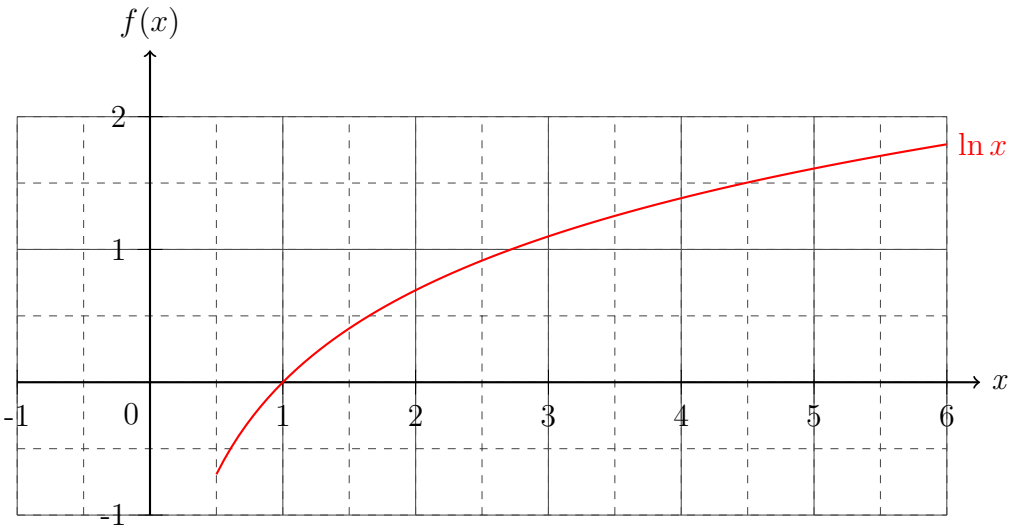
Eine weitere Eigenschaft die aus dem *Koordinatensystem* abzulesen ist, ist die Tatsache, dass sich der *Funktionswert* bei einem Schritt auf der *Abszisse* mit dem Wert der *Basis* der *Exponentialfunktion multipliziert*. So entwickeln sich die *Funktionswerte* für $f(x) = 2^x$ mit dem wachsenden *Exponenten*: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, und so weiter.

Wenn die Rede vom *exponentiellen Zerfall* ist, dann wird die *Funktion* $e^{-\lambda x}$ betrachtet. Dabei gibt der *Parameter* λ an wie stark der Zerfall von statten geht.

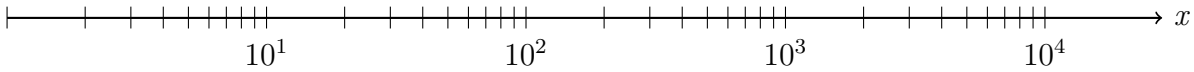


Im *Koordinatensystem* wurde für den *Parameter* $\lambda = 1$ gewählt. Ebenso wurde ins *Koordinatensystem* die Stelle eingetragen, an der sich der *Funktionswert* um die Hälfte reduziert hat. Dieser Wert wird in den Naturwissenschaften oftmals mit Halbwertszeit betitelt.

Die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist der *Logarithmus*, dessen *Graph* wie folgt aussieht:



Um die Auswirkungen der *Exponentialfunktion* auf die anderen *Funktionen* zu verdeutlichen, wird zu Letzt noch das *logarithmische Koordinatensystem* vorgestellt. Dabei wird auf eine oder beide *Achsen* des *Koordinatensystems* eine *logarithmische Skala* aufgetragen,

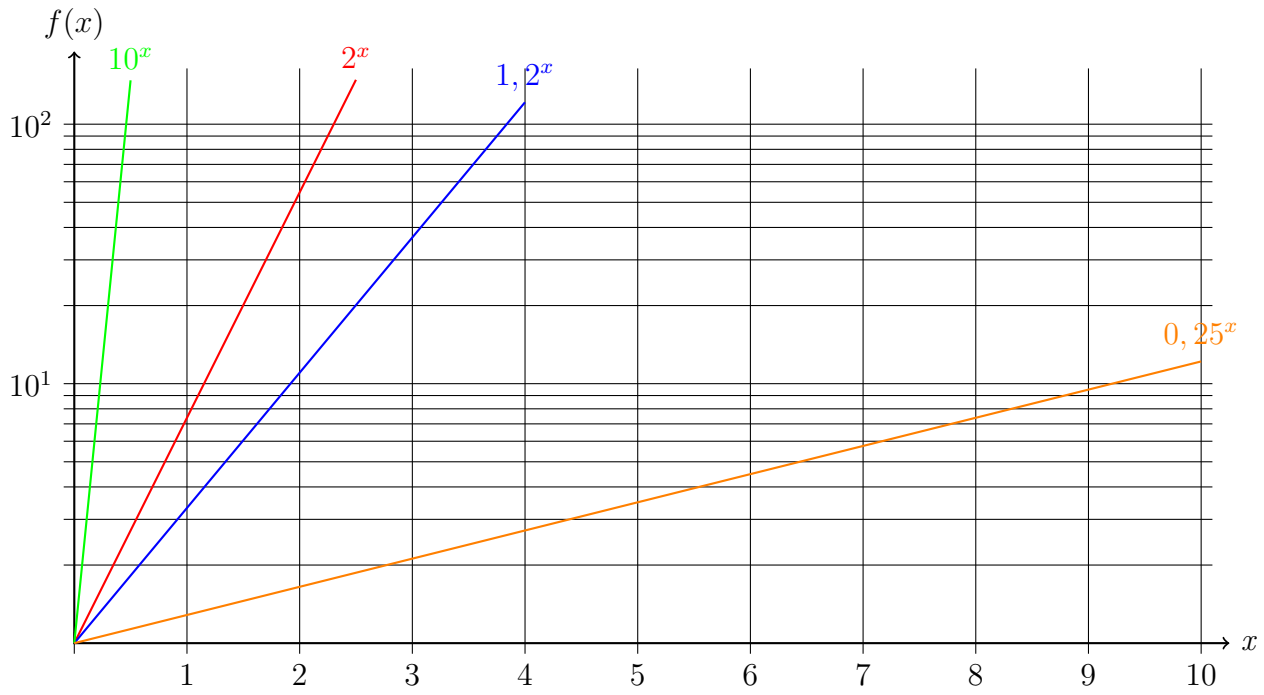


welche ihre *Werte* über den *Logarithmus* bekommen:

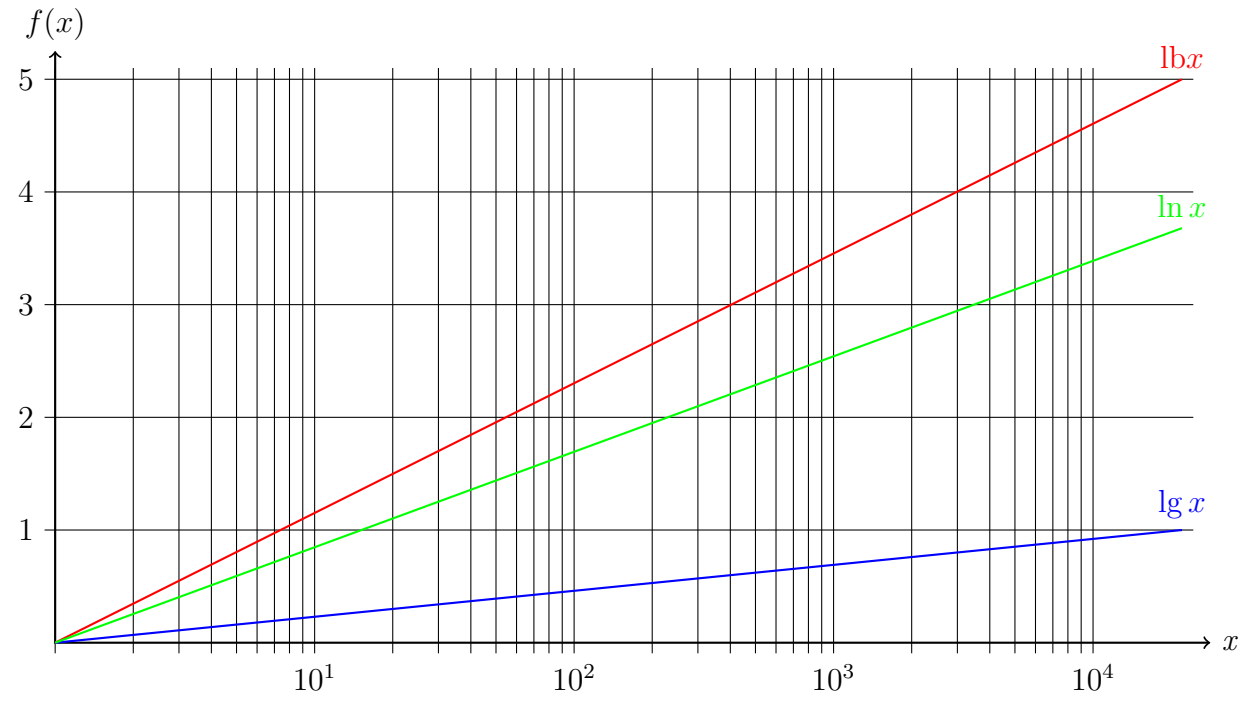
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\ln x$	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,94	2,08	2,20	2,30	2,30+0,69

Folglich gibt es insgesamt drei Arten von *logarithmischem Koordinatensystemen*:

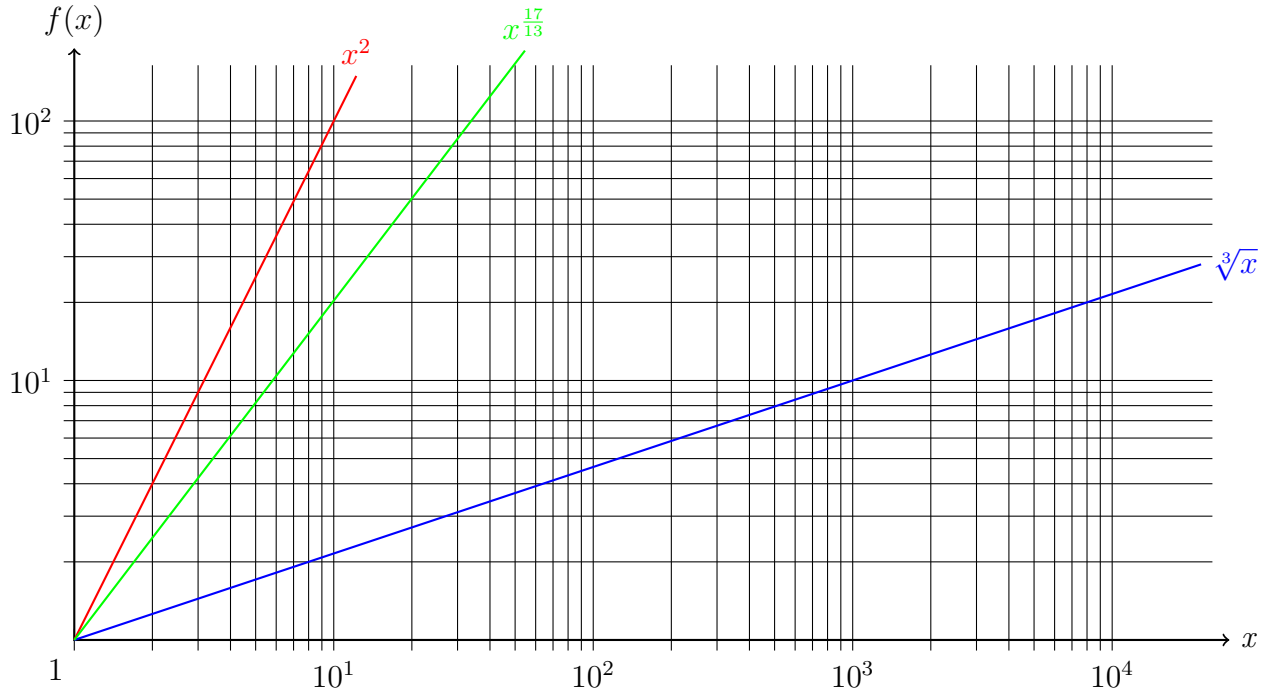
Auf der *Abszisse* befindet sich eine *logarithmische Skala* und auf der *Ordinate* eine normale *Skala*. Wenn auf diesem Papier *Werte* einer *exponentielle Funktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Wert* der *Basis* der *exponentiellen Funktion* an.



Auf der *Abszisse* befindet sich eine normale *Skala* und auf der *Ordinate* eine *logarithmische Skala*. Wenn in dieses *Koordinatensystem Werte* einer *logarithmische Funktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Kehrwert* der *Basis* der *logarithmischen Funktion* an.



Auf der *Abszisse* und der *Ordinate* befindet sich eine *logarithmische Skala*. Wenn in dieses *Koordinatensystem Werte* einer *Potenzfunktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Wert* der *Potenz* der *Funktion* an.



Für ein tieferes Verständnis von *Funktionen* sollte das Kapitel „Differentiation und Integration“ sowie „Komplexe Zahlen“ bearbeitet werden, da viele Zusammenhänge zwischen den Arten der *Funktionen* und ihren Eigenschaften dadurch besonders deutlich erkennbar werden.

5.13.1 Übungsaufgaben zu Exponentialfunktionen.

Aufgabe 1: *Zeichne die Funktionen für die Funktionswerte $f(x) \in [-5, 5]$ und berechne die Nullstelle.*

a) $f(x) = 2^x - 1$

b) $g(x) = 3^{-x} - 2$

c) $h(x) = 1,5^x - 0,5$

d) $k(x) = 0,4^x - 4$

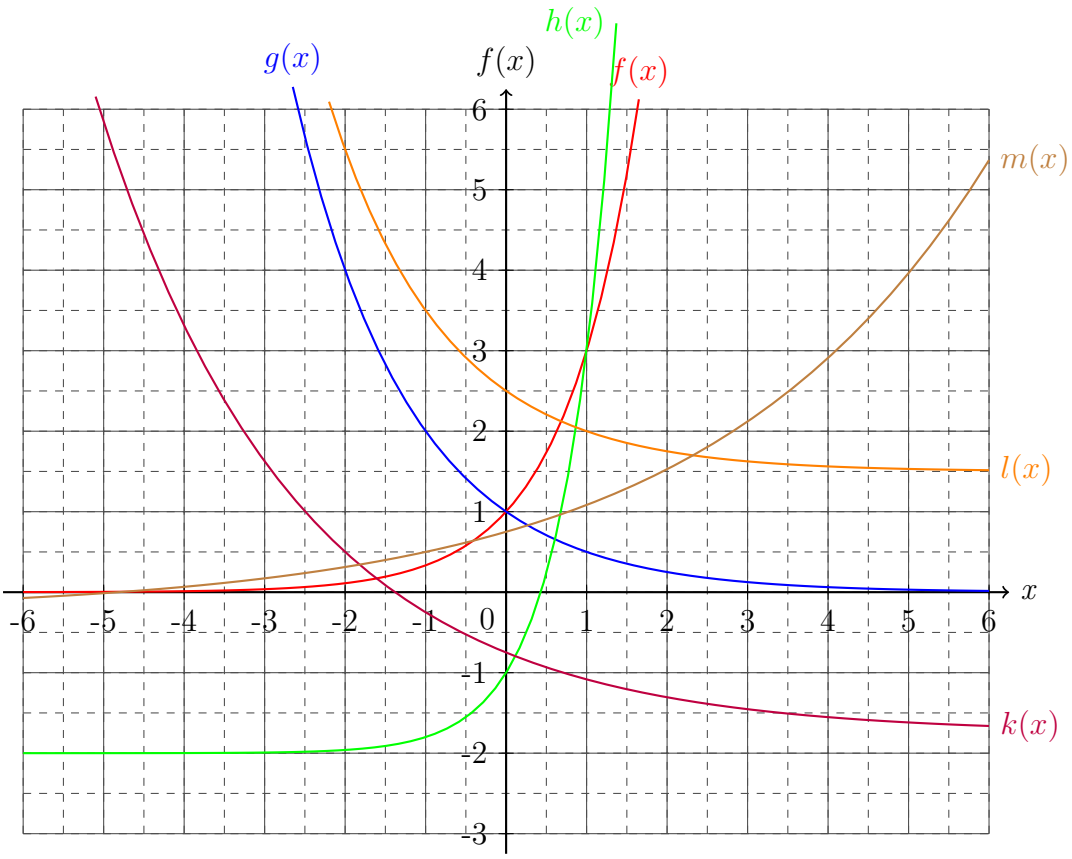
e) $l(x) = 0,2^x - 2,25$

f) $m(x) = 0,75^x - 3$

g) $n(x) = 2^{\frac{1}{2}x} - 3,6$

h) $o(x) = 3^{\frac{1}{6}x^2} - 5$

Aufgabe 2: *Bestimme die Funktionsgleichung der exponentiellen Funktionsgraphen.*



Aufgabe 3: *Beantworte die Fragen zu den radioaktiven Zerfällen* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ *mit* $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$.

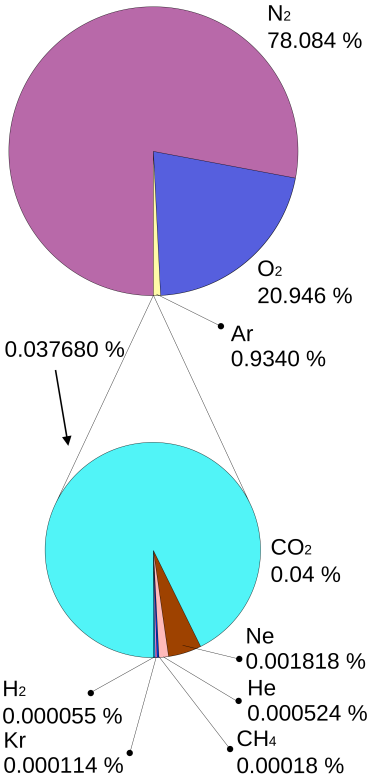
a) *Berechne die Zerfallsrate* λ *für Uran-*235 *(U).* $\tau = 7,038 \cdot 10^8 a$
b) *Berechne die Zerfallsrate* λ *für Plutonium-*243 *(Pu).* $\tau = 4,956h$
c) *Berechne die Stoffmenge von* $N_0 = 25000$ *Atomen von Kohlenstoff-*14 *(C) nach* 15300 *Jahren.* $\tau = 5730a$
d) *Berechne die Stoffmenge von* $N_0 = 214000$ *Atomen von Rubidium-*75 *(Rb) nach* 45 *Minuten (=2700s).* $\tau = 19s$
e) *Nach welcher Zeit existieren nur noch* 25% *der ursprünglichen Stoffmenge von Cäsium-*136 *(Cs).* $\tau = 13,16d$
f) *Nach welcher Zeit existieren nur noch* 5% *der ursprünglichen Stoffmenge von Polonium-*208 *(Po).* $\tau = 2,898a$
g) *Von* 43688 *Technetium-*96*-Atomen (Tc) existieren nur noch* 14578*, wie viel Zeit ist vergangen?* $\tau = 4,28d$
h) *Von* $5,346 \cdot 10^{12}$ *Wasserstoff-*3*-Atomen (H) existieren nur noch* $2,454 \cdot 10^4$*, wie viel Zeit ist vergangen?* $\tau = 12,33a$

Aufgabe 4: *Löse alle Teilaufgaben zur Luftfeuchtigkeitsfunktion.*

a) Durch Messungen konnte festgestellt werden, dass die absolute Sättigung von Wassermolekülen in der Luft eine exponentielle Funktion sein muss. Dabei ist die absolute Sättigung F eine Funktion der Temperatur T. Bei den Messungen wurde eine Wertetabelle erstellt.

Messung	1	2	3	4	5	6
T in $[°C]$	0	-10	10	15	20	30
$F(T)$ in $\left[\frac{g}{m^3}\right]$	4,8	2	10	13,5	15,5	30,1

Übertrage diese Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem.



b) Bestimme aus den Werten der ersten und letzten Messung die Funktionsgleichung.

c) Erstelle eine Wertetabelle für die gefundene Funktion und zeichne diese in das Koordinatensystem aus dem ersten Aufgabenteil. Beschreibe, was dir auffällt und versuche dies zu erklären.

d) Ein Kubikmeter Luft wiegt unter Normalbedingungen ($T = 20°C, P = 1013hPa$) rund $1293g$. Unter der Annahme von Homogenität der Atmosphäre und dass sich dieses Gewicht nicht durch Temperaturveränderungen verändert, soll nun der maximale prozentuale Anteil von Wasserdampf an der Luft für die Temperaturen $T = \{-10°C, -5°C, 0°C, 5°C, 10°C, 15°C, 20°C, 25°C, 30°C, 35°C, 40°C\}$ berechnet werden.

e) Im Durchschnitt ist die Luft zu 73% in Hamburg gesättigt bei einer Durchschnittstemperatur $T = 15°C$. Bestimme den prozentualen Anteil des Wasserdampfes H_2O an der Luft und vergleiche diesen mit dem Kohlenstoffdioxidanteil CO_2. Stelle ein Verhältnis auf. Stelle ebenso ein Verhältnis zwischen Methan CH_4 und CO_2 sowie zwischen CH_4 und H_2O auf.

Aufgabe 5: *Löse alle Teilaufgaben zur C14-Methode.*

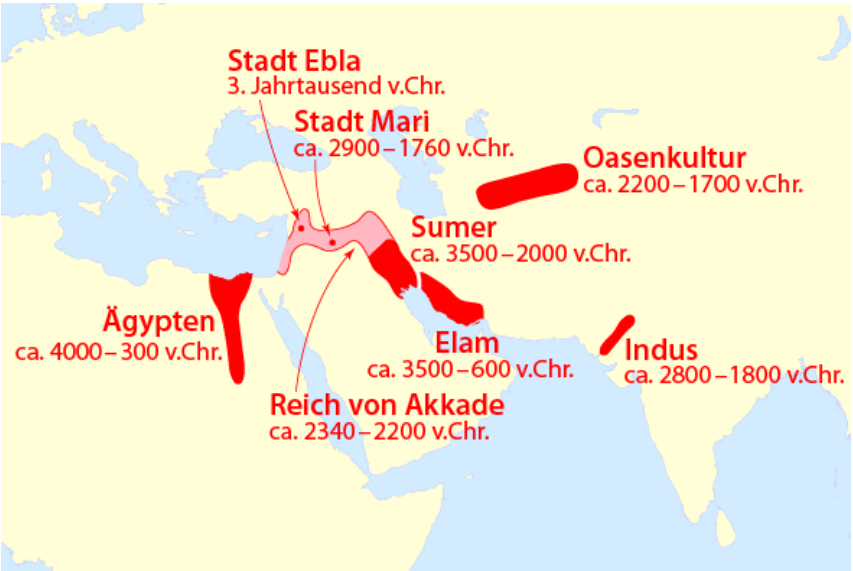
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{mit: } \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$$

a) Wenn ein Stickstoffatom N von einem kosmischen Neutron n, die von der Sonne kommen können, getroffen wird, dann kann durch die Reaktion

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p$$

^{14}C-Kohlenstoff entstehen. Dieses Kohlenstoffisotop ist instabil und somit radioaktiv. Über einen β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von $\tau = 5730a$ entsteht dadurch wieder das stabile ${}^{14}_{7}N$. Da durch Photosynthese auch ^{14}C von Pflanzen aufgenommen wird, kann für ein noch lebendes Wesen festgehalten werden, dass der ^{14}C-Anteil konstant ist und erst nach dem Tod abnimmt. Dabei gilt: $\#\left(^{14}C\right) \cdot 10^{12} \approx \#\left(^{12}C\right)$, wobei $\#$ die Funktion für die Anzahl ist. Berechne die Zerfallsrate λ für ^{14}C.

b) Eine Knochenprobe soll analysiert werden. Dabei macht der Gesamtkohlenstoffanteil dieser Probe grade einmal $0,32g$ aus. Berechne den Anteil in $[kg]$ von ^{14}C, unter der Annahme, dass der Knochen 2000 Jahre als ist.



c) Durch eine Verdampfung einer anderen kleineren Probe konnte die chemische Zusammensetzung des Knochens in einer Zentrifuge bestimmt werden. Dabei wurde ein Kohlenstoff-14-Anteil von $1,90216 \cdot 10^{-13}g$ ermittelt. Wie alt ist der Knochen wirklich?

d) Durch mehrere schriftliche Aufzeichnungen der Sumerer über die Harappa-Kultur (Indus), konnte der Knochen genau datiert werden. Er ist genau 4478 Jahre alt. Wie kann dieser vermeintliche Widerspruch zur C14-Methode erklärt werden? Berechne die Kohlenstoffverhältnisse für dieses Jahr neu. (Es handelt sich hierbei um ein hypothetisches Ereignis!)

Aufgabe 6: *Löse alle Teilaufgaben zur Altersbestimmung der Erde.*

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{mit: } \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$$

a) Da in den Uran-Actinium-Reihe und der Uran-Radium-Reihe besitzen nur die Uranisotope 235 und 238 eine lange Halbwertszeit, sodass alle anderen Zwischenprodukte kaum Einfluss auf die Uran-Blei-Datierung. Die Endprodukte dieser Zerfallsketten sind gegeben als

$$\begin{aligned} {}^{235}U &\longrightarrow {}^{207}Pb + \text{Rest} \ , \\ {}^{238}U &\longrightarrow {}^{206}Pb + \text{Rest} \ . \end{aligned}$$

Das Verhältnis ${}^{235}U$:${}^{238}U$ beträgt $1 : 137,818$. Im Labor wurden die Zerfallsketten untersucht, dabei wurde bei der Uran-Actinium-Reihe (${}^{235}U$) für eine Probe von 10^{15} Atomen insgesamt 1969700 Zerfälle in 2 Jahren gemessen. Bestimme die Halbwertszeit dieses Prozesses.

b) Bei der Uran-Radium-Reihe (${}^{238}U$) für eine Probe von 10^{15} Atomen insgesamt 775630 Zerfälle in 5 Jahren gemessen. Bestimme die Halbwertszeit dieses Prozesses.

c) Bestimme das heutige Verhältnis von ${}^{206}Pb$ und ${}^{207}Pb$, aus den Zerfallsketten.

d) Bestimme das Alter der Erde. (Tipp: $A = Be^{\lambda_B t} - B$)

Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben zum Wirtschaftswachstum und der Inflation.*

a) In der Bundesrepublik Deutschland wird jedes Jahr das Wirtschaftswachstum und Inflationsrate bestimmt.

Jahr	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004
Inflation	0,9%	1,5%	2,0%	2,1%	1,1%	0,3%	2,6%	2,3%	1,5 %	1,6%	1,6%
Wachstum	1,6%	0,1%	0,4%	3,6%	4,1%	-5,6 %	1,1%	3,3%	3,7%	0,7%	1,2%

Bestimme die Mittelwerte des Wirtschaftswachstums und der Inflationsrate.

b) Stelle die Potenzfunktionen mit den Mittelwerten $\bar{x}_I$ für die Inflationsrate und $\bar{x}_W$ für die Wachstumsrate, wobei die Anzahl der Jahre durch den Parameter n beschrieben wird. Erstelle Wertetabellen und zeichne die Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem. (Setze den Amplitudenfaktor für beide Funktionen für diese Aufgabe gleich eins!) Beschreibe das Verhalten der Funktionen.

c) Die Bundesrepublik Deutschland hat im Jahre 2004 ungefähr 80% seiner gesamten Wirtschaftskraft an Schulden angehäuft. Durch die Inflationsrate sinkt der Prozentwert der Schulden. Wie viel Prozent Schulden hat der Staat im Jahre 2014? Wie sieht die Situation im Jahre 2050 aus? (Nimm an, dass keine neuen Schulden gemacht werden und keine Schuldzinsen anfallen.)

d) Wenn die Bundesrepublik Deutschland im Jahr 2004 durch ihre Wirtschaft rund 10% der weltweiten Ressourcen verbrauchen würde, nach wie viel Jahren würde die Bundesrepublik Deutschland alle weltweiten Ressourcen für ein weiteres Wirtschaftswachstum benötigen? (Beachte die Annahme, dass die geförderte Ressourcenmenge konstant bleibt und dass das Wirtschaftswachstum in diesem Beispiel direkt mit dem Ressourcenverbrauch korreliert ist.)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.41) Lösungen zu Exponentialfunktionen.

5.14 Proportionalitäten

Oftmals ist die genaue Funktionsgleichung unbekannt, aber dennoch können die Eigenschaften meistens ermittelt werden. Im Allgemeinen existieren zwei dominante Möglichkeiten - die Proportionalität und die Antiproportionalität. Wenn eine Größe proportional zu einer anderen Größe ist, dann handelt es sich je nach Potenz n der Abhängigkeit um eine Funktion der n-ten Ordnung. Sei zum Beispiel die Größe x proportional zu t, dann wird dies geschrieben als:

$$x \propto t \quad . \tag{5.52}$$

Aus dieser Proportionalität kann dann die Funktionsgleichung bestimmt werden. Hierfür werden je nach Potenz insgesamt $(n+1)$ Wertepaare benötigt, welche dann in einem Gleichungssystem aus der allgemeinen Funktionsgleichungsform eingesetzt und so die Parameter bestimmt werden. Bei dem Beispiel aus Gleichung (5.52) würde dies mit den Wertepaaren $(1,2)$ und $(4,6)$ wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} x \propto t \quad &\Rightarrow \quad x(t) = at + b \\ &\Rightarrow \quad I.\ \ 2 = a \cdot 1 + b \\ &\qquad\quad\ \ I.\ \ 6 = a \cdot 4 + b \quad , \end{aligned} \tag{5.53}$$

wobei die Lösung über Äquivalenzumformung und Einsetzungsverfahren ermittelt werden kann. Des Weiteren gibt es noch die Umkehrung der Proportionalität - die Antiproportionalität. Sei zum Beispiel die Größe F antiproportional zur Größe r, dann ist F aber proportional zum Kehrwert von r,

$$F \propto \frac{1}{r} \quad , \tag{5.54}$$

sodass die gesuchte Funktionsgleichung eine Hyperbel n-ter Potenz ist.
In den Naturwissenschaften sind in einer Gleichung oftmals mehrere Proportionalitäten vorzufinden, diese können zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} F &\propto \frac{1}{r} \\ F &\propto q \\ F &\propto Q \\ \Rightarrow F &\propto \frac{qQ}{r} \quad . \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.14.1 Übungsaufgaben zu Proportionalitäten.

Aufgabe 1: *Bestimme ob die Tabelle eine Proportionalität, eine Antiproportionalität oder keins von beidem zeigt.*

a)

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9

b)

x	y
3	10
5	12
8	15
11	20
16	25
19	28
21	30

c)

x	y
1	80
2	40
4	20
5	16
8	10
10	8
16	5

d)

x	y
3	14
5	18
8	24
11	30
18	44
32	69
56	117

e)

x	y
54	1,5
66	4,5
82	8,5
96	12
114	16,5
155	26,75
245	49,25

f)

x	y
92	6,4
111	10,2
148	17,6
231	34,2
345	57
692	126,4
963	180,6

g)

x	y
0,0625	640
0,25	200
0,5	100
1	50
2	25
4	12,5
10	4

h)

x	y
4	6250
8	3125
16	1562,5
25	1000
32	781,25
50	500
80	312,5

i)

x	y
8	4
12	6
15	7,5
17	4,25
22	5,5
29	7,25
43	10,75

j)

x	y
25	2100
40	1350
50	1100
80	725
100	600
125	500
250	300

k)

x	y
2	4
4	8
6	12
8	16
10	20
15	30
19	38

l)

x	y
4	12,5
5	10
8	6,25
11	$4,\overline{54}$
15	$3,\overline{3}$
20	2,5
30	$1,\overline{6}$

Aufgabe 2: *Zeichne die Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem.* (Keine Lösung!)

Aufgabe 3: *Bestimme die Funktionsgleichung der proportionalen Tabellen aus Aufgabe 1.*

Aufgabe 4: *Bestimme die Funktionsgleichung der antiproportionalen Tabellen aus Aufgabe 1.*

Aufgabe 5: *Bestimme die Funktionsgleichung aus den gegebenen Informationen.*

a)

Aufgabe 6: *Fasse die Proportionalitäten zu einem einzigen Proportionalitätsgesetz zusammen*

a) $H \propto D$; $H \propto U$

b) $p \propto A$; $p \propto m$; $p \propto c$

c) $a \propto \frac{1}{x}$; $a \propto y$

d) $k \propto \frac{1}{T}$; $k \propto f$; $k \propto z$

e) $E \propto \frac{1}{r}$; $E \propto Q$

f) $P \propto \frac{1}{d}$; $P \propto \frac{1}{N}$; $P \propto T$

g) $L \propto \frac{1}{N}$; $L \propto \frac{1}{d}$; $L \propto n$; $L \propto U$

h) $W \propto \frac{1}{g}$; $W \propto I$; $W \propto \frac{1}{H}$; $W \propto \frac{1}{T}$; $W \propto C$

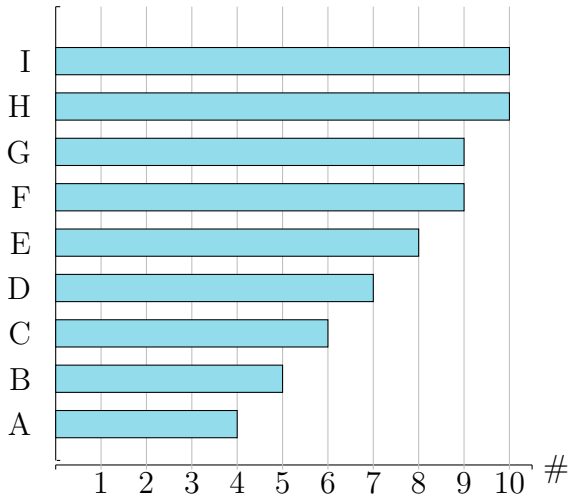
i) $F \propto \frac{1}{r}$; $F \propto m$; $F \propto v^2$

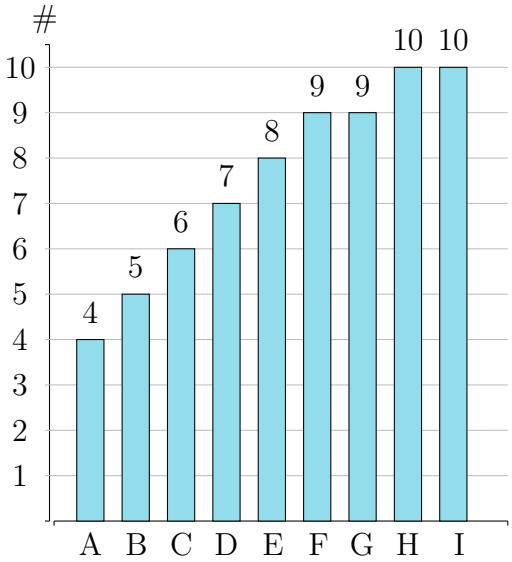
j) $G \propto \frac{1}{r^2}$; $G \propto \ln m$; $G \propto e^{\lambda}$; $G \propto \sqrt{z}$; $G \propto y^3$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.42) Lösungen zu Exponentialfunktionen.

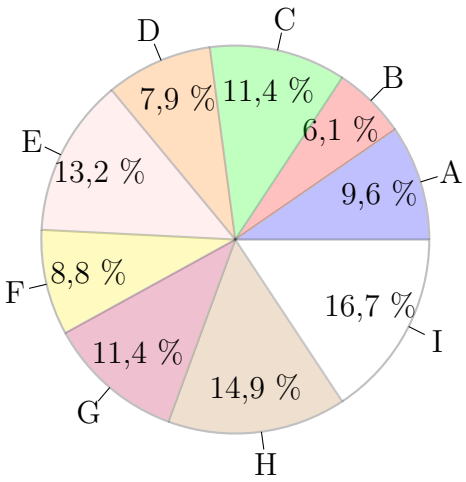
5.15 Darstellungen durch Diagramme

Neben der Darstellung von Wertepaaren durch Funktionen existieren noch weitere Darstellungen. So werden absolute Häufigkeiten (Anzahl) # oftmals mit Säulen- oder Balkendiagrammen dargestellt, um Unterschiede schneller visuell erfassen zu können. So kann schnell und deutlich selbst ohne Zahlen abgelesen werden welcher Fall die maximale absolute Häufigkeit # besitzt.

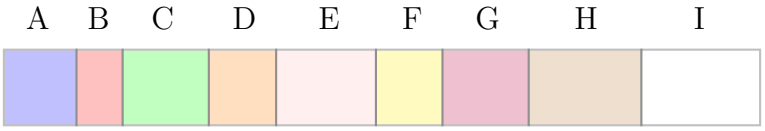




Oftmals ist aber auch eine relative Häufigkeit (in %) interessanter. Aus diesem Grund werden prozentuale Diagramme benutzt. Diese Diagrammtypen sind meistens Kreisdiagramme. Selten kommt es auch vor, dass auf einer bestimmten anderen Fläche die relative Verteilung angezeigt wird - so wird in der Sitzverteilung in einem politischem Gremium ein Halbring oder ein Rechteck verwendet. Dabei muss beachtet werden, dass $3,6°$ genau 1% bei einem Kreis entsprechen.



Bei einer Darstellung mit einem Rechteck muss die Länge prozentual aufgeteilt werden.



5.15.1 Übungsaufgaben zu Diagrammen

Aufgabe 1: *Erstelle ein Kreis-, Balken- und Säulendiagramm sowie eine prozentuale Verteilung in einem Rechteck mit den Maßen $a = 1cm$ und $b = 10cm$ für die Sitzplätze und ein Säulendiagramm für die Veränderungen.*

Partei	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Sitzplätze	𝍸 𝍸 |	𝍸 ||	𝍸 𝍸 ||||	𝍸 ||||	𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 ||||
Veränderungen	+2	-4	+3	+1	0	-3	+2	+5	-1

Aufgabe 2: *Bei einer Umfrage der siebten Klassen wurden lediglich die Meldungen in einer Tabelle dokumentiert. Erstelle ein Kreis-, Balken- und Säulendiagramm sowie eine prozentuale Verteilung in einem Rechteck mit den Maßen $a = 1cm$ und $b = 10cm$ für jede Frage.*

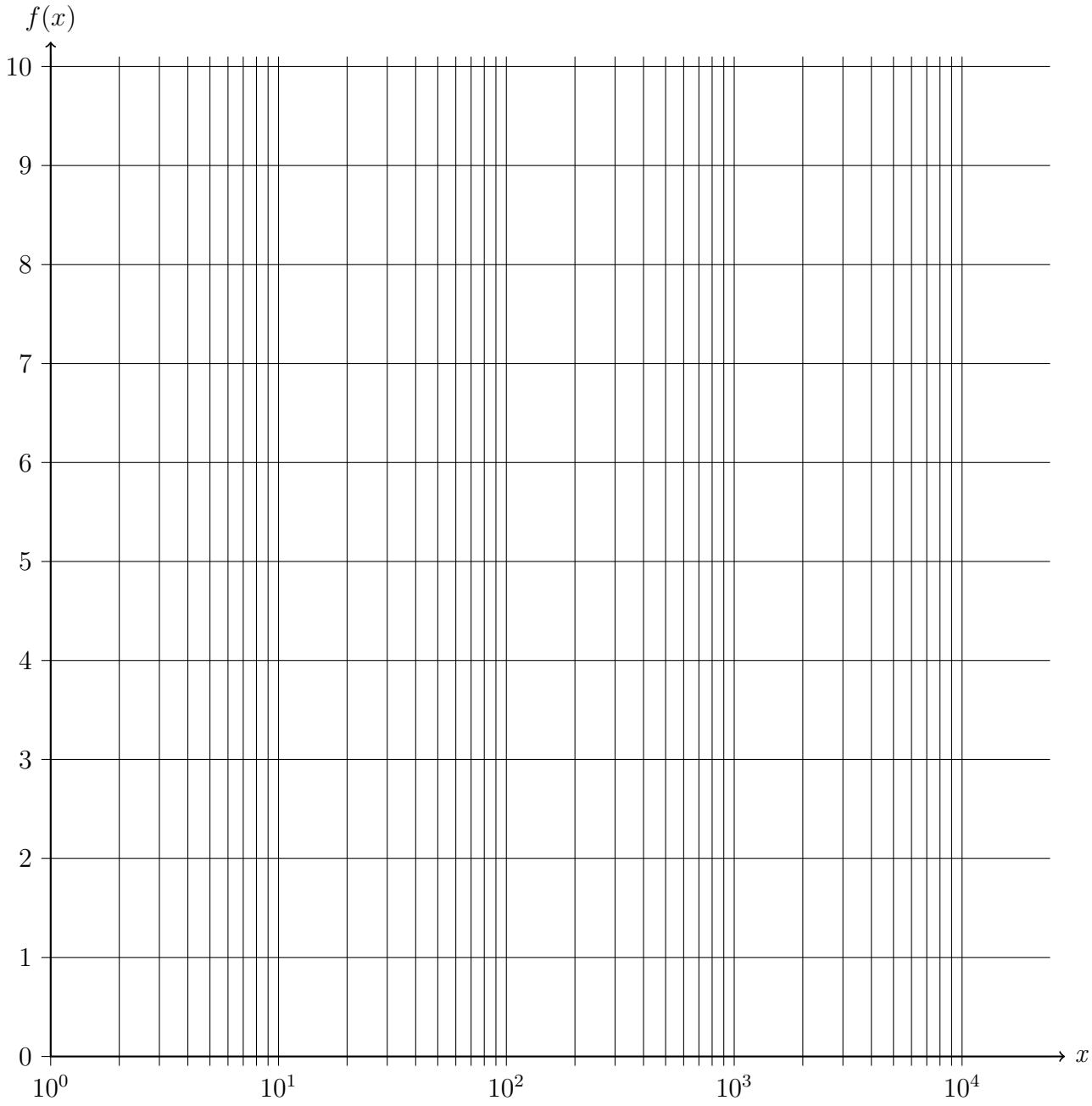
Klasse	7a	7b	7c	7d	7e
Frage 1	13	11	14	19	9
Frage 2	8	5	5	7	6
Frage 3	17	13	12	15	13
Frage 4	3	7	4	2	6
Frage 5	22	24	25	24	27
Frage 6	5	2	3	3	4

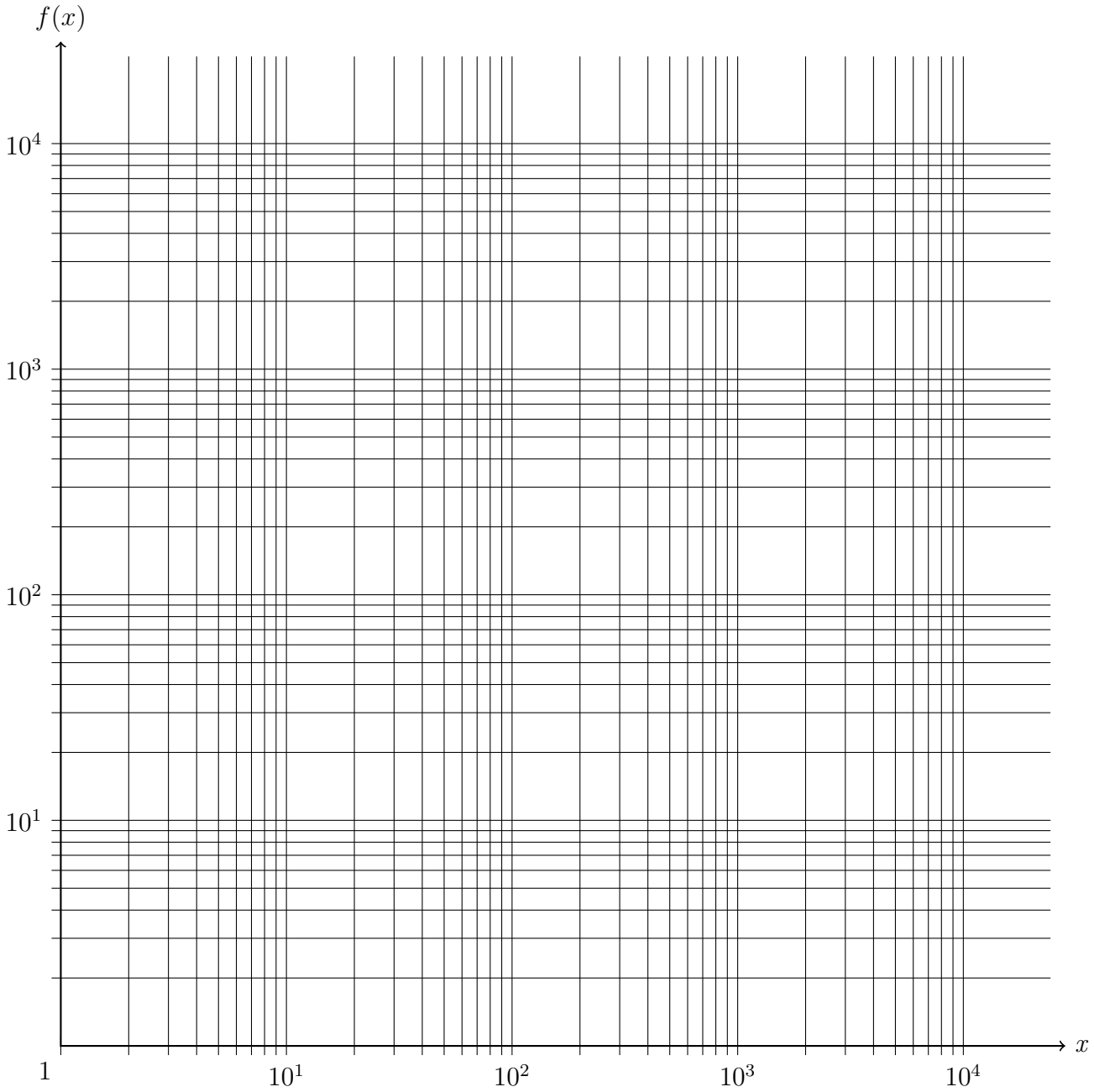
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.43) Lösungen zu Diagrammen.

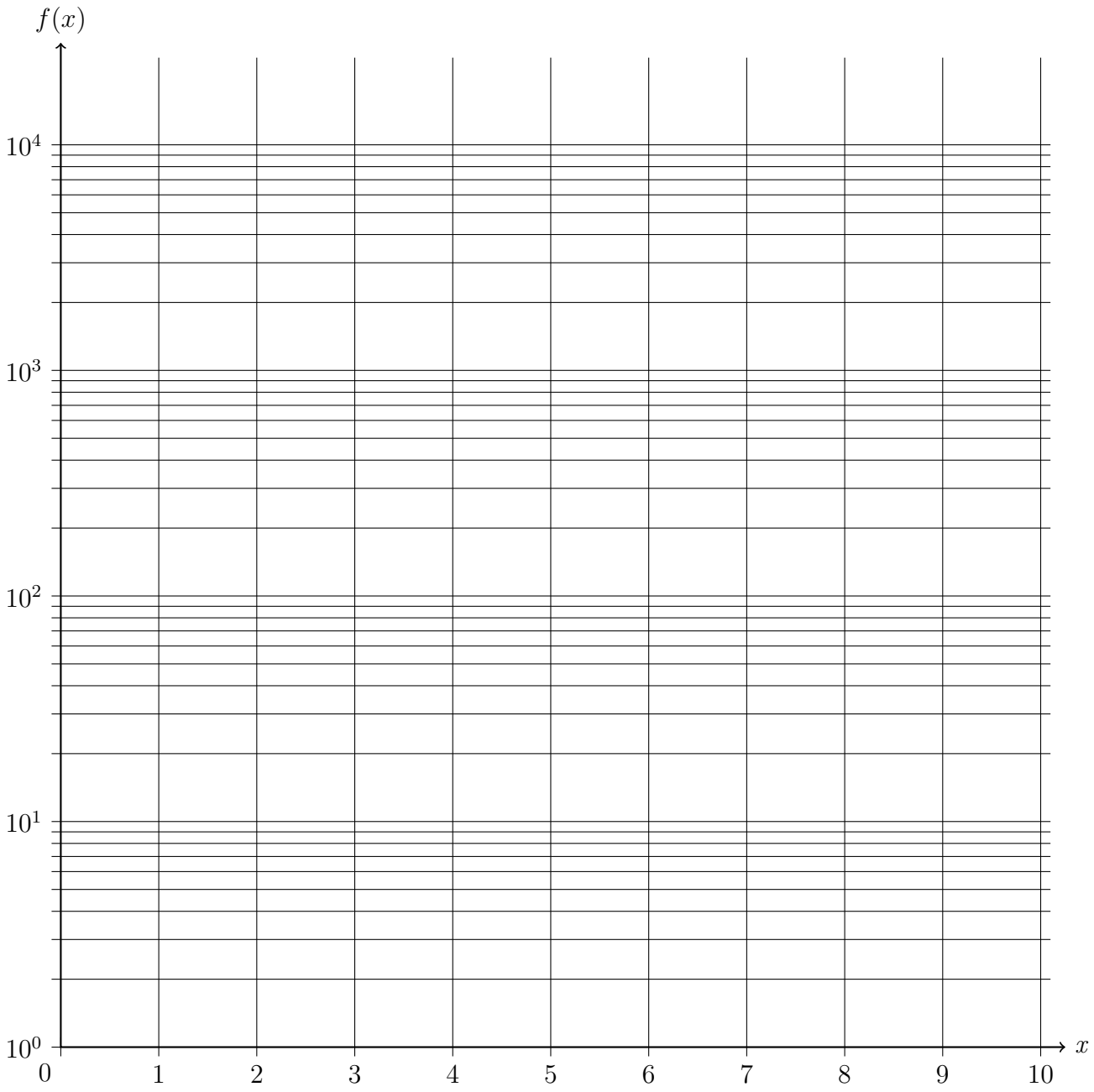
5.16 Gemischte Funktionenaufgaben

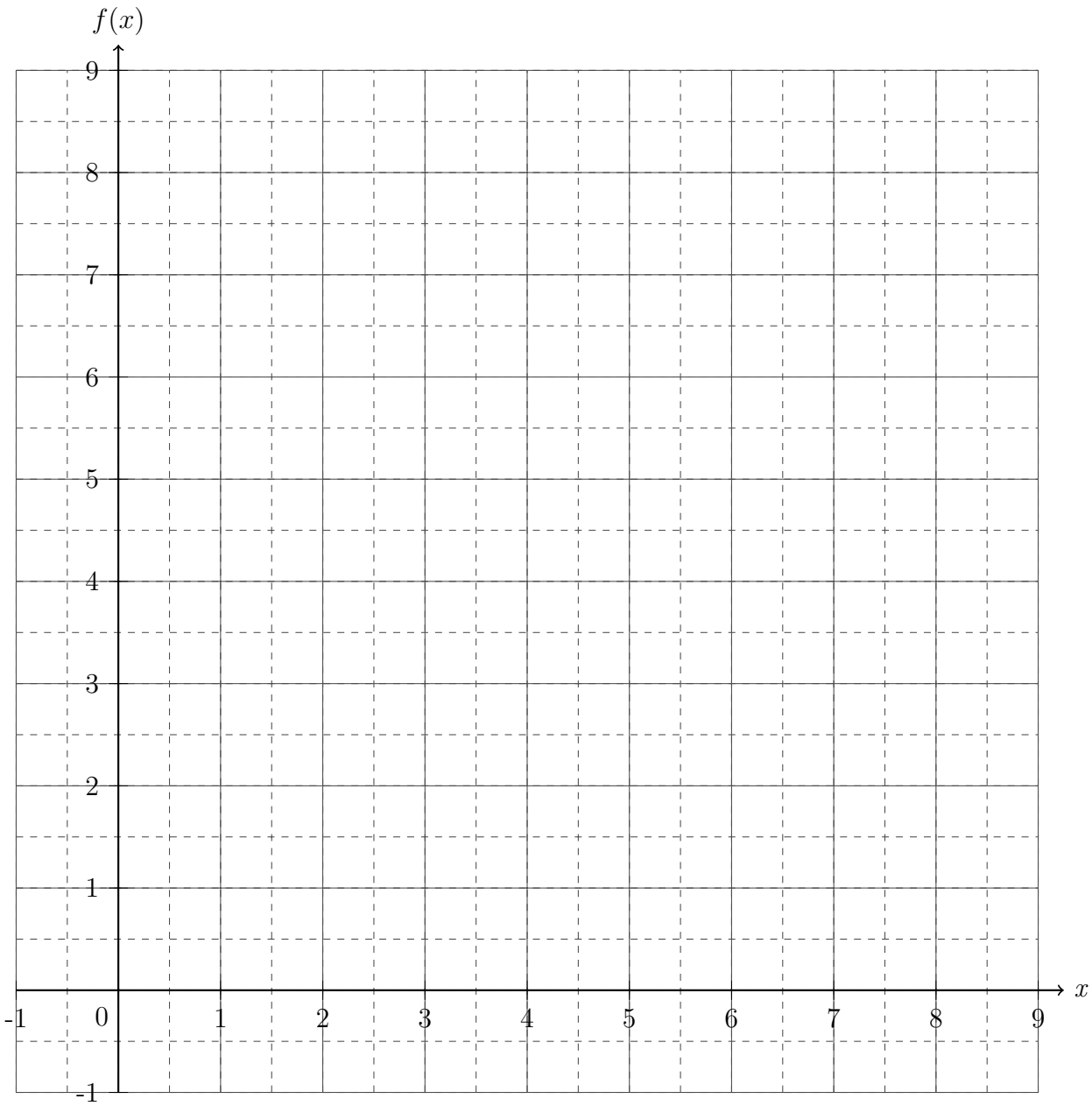
Aufgabe 1: *Zeichne folgende Funktionen in die vier Arten von Koordinatensystemen*

$f(x) = x$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^3$
$k(x) = \frac{1}{x}$	$l(x) = \frac{1}{x^2}$	$m(x) = \sin(x)$
$n(x) = \sqrt{x}$	$o(x) = \sqrt[4]{x}$	$p(x) = e^x$
$q(x) = 2^x$	$r(x) = \mathrm{lb}(x)$	$s(x) = \ln(x)$



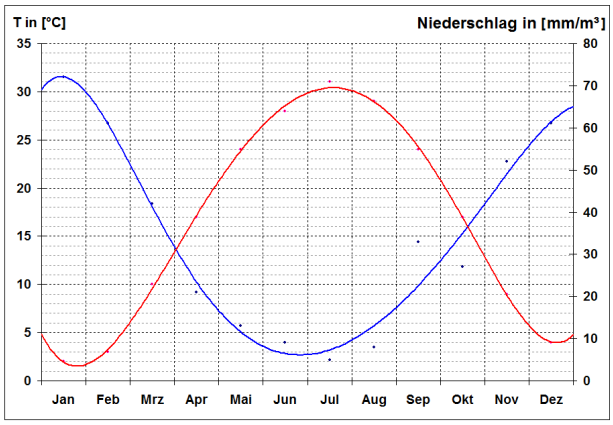

$f(x)$
10^4
10^3
10^2
10^1
1
10^1
10^2
10^3
10^4
x


$f(x)$
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

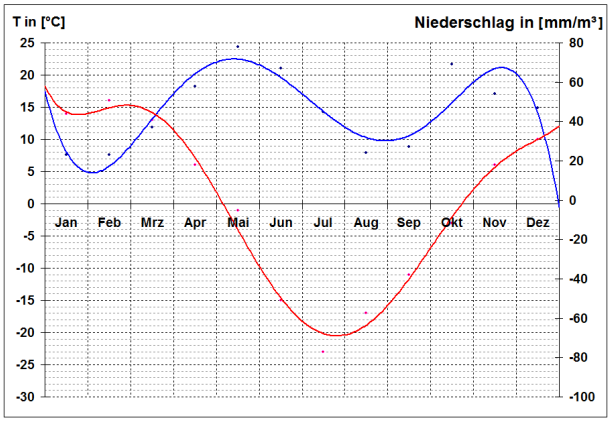

$f(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x

Aufgabe 2: *Bestimme aus den fiktiven und stark vereinfachten Klimadiagrammen die Temperatur und die Niederschlagsmenge für jeden Monatsanfang und jeder Monatsmitte und halte dies in einer Tabelle fest. Bestimme anschließend die Punkte an denen sich die, am Durchschnitt orientierende, Niederschlagsmenge- und die Temperaturkurve schneiden. Bestimme für diese Punkte die Temperatur und die Niederschlagsmenge. Hierbei ist die Temperatur rot und die Niederschlagsmenge blau dargestellt.*

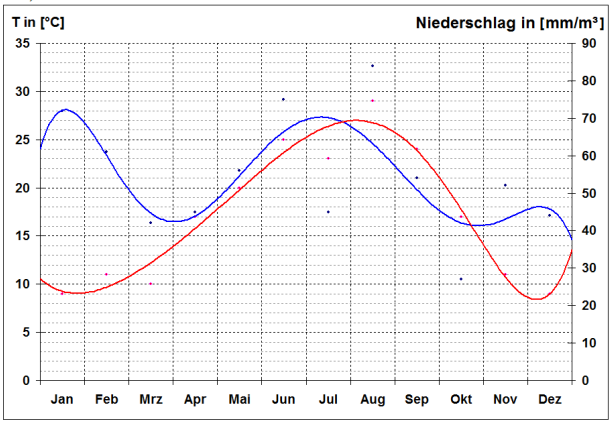
a)



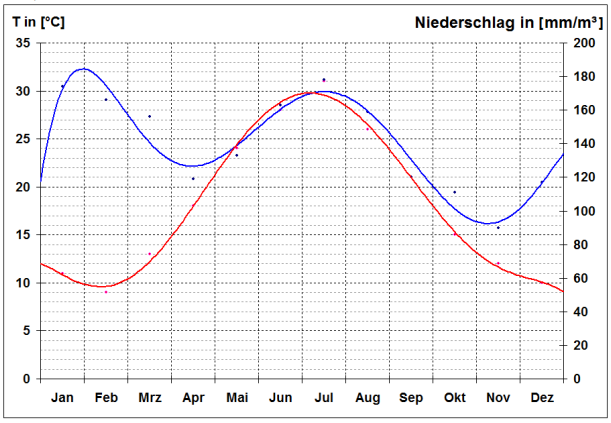
b)



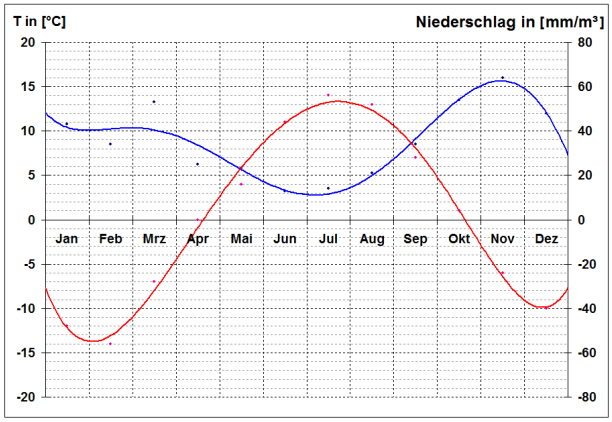
c)



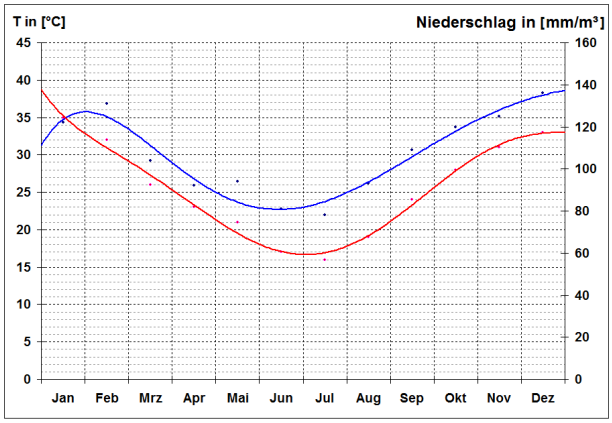
d)



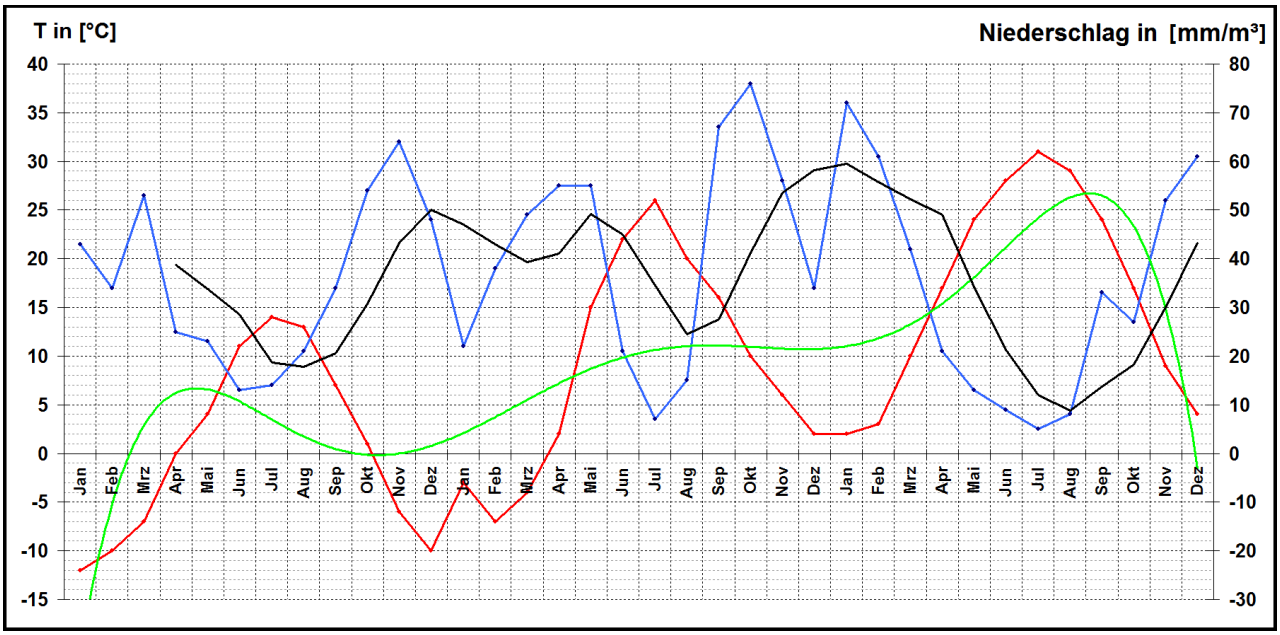
e)



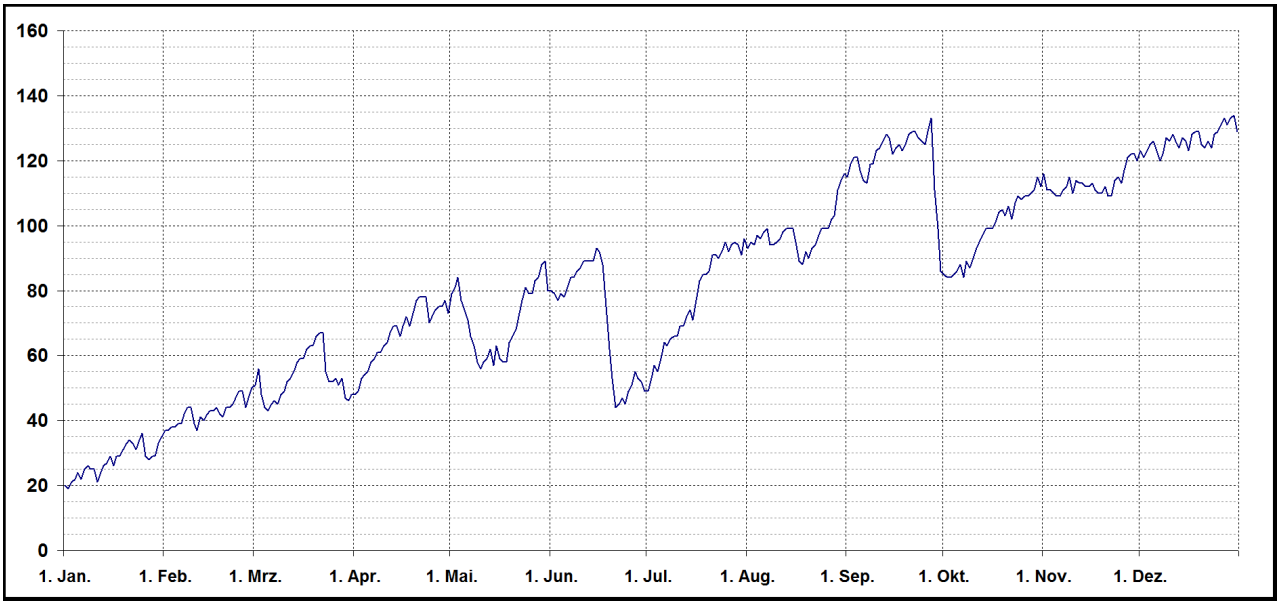
f)



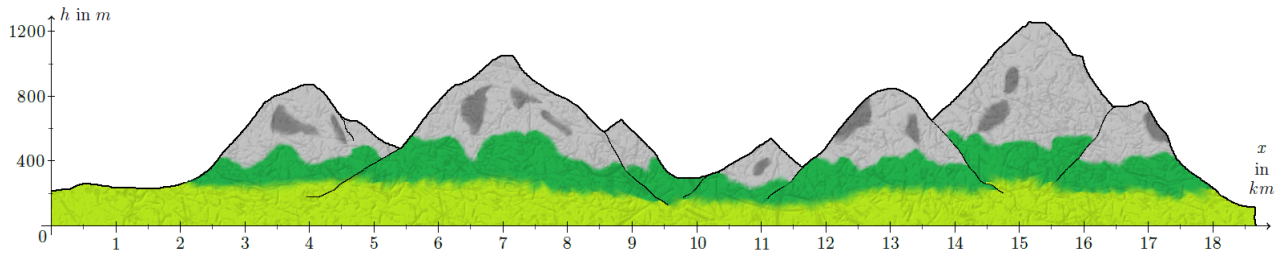
Aufgabe 3: *Bestimme aus den fiktiven und stark vereinfachten Klimadiagrammen die Temperatur und die Niederschlagsmenge für jeden Monatsanfang und halte dies in einer Tabelle fest. Hierbei ist die Temperatur rot und die Niederschlagsmenge blau dargestellt. Bestimme anschließend für jede Monatsmitte aus den Langzeitwerten die durchschnittliche Temperatur in grün und die durchschnittliche Niederschlagsmenge in schwarz und halte dies in einer Tabelle fest.*



Aufgabe 4: *Bestimme aus den fiktiven Aktienkurs den Wert für jeden Monatsanfang und für jede Monatsmitte und halte dies in einer Tabelle fest.*



Aufgabe 5: *Beantworte alle nachfolgenden Fragen zum Gebirgszug*



a) Wie hoch sind die Berge jeweils?

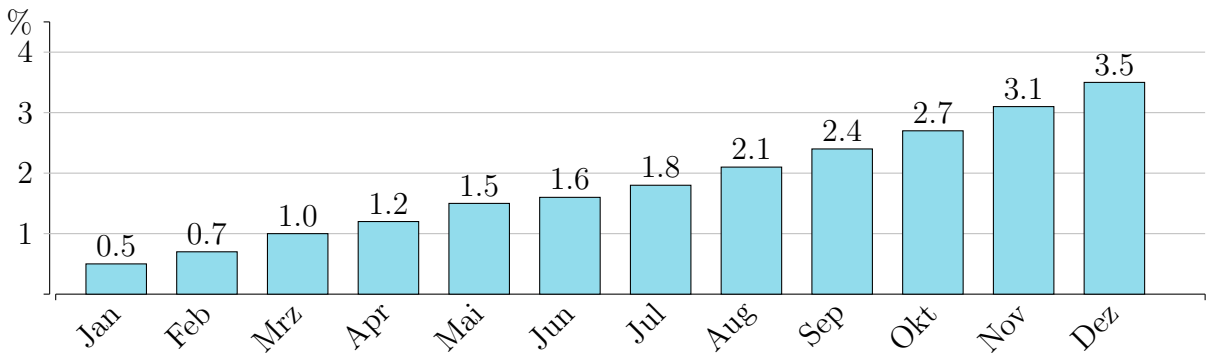
b) Wie weit sind die beiden höchsten Berge voneinander entfernt?

c) Wie weit sind die beiden kleinsten Berge voneinander entfernt?

Aufgabe 6: *Zeichne die Wertepaare aus der Wertetabelle in ein geeignetes Koordinatensystem ein.* (Keine Lösung!)

a) x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	4	6	7	8	5	3	1	6	7	3	6	8	3	2	4
b) x	1	1,5	2	2,5	4	4,25	4,5	5	5,5	5,75	6	6,5	7	7,25	7,5
$f(x)$	0	2,5	3	5,5	7	3,25	0	4,5	7	8,25	6,5	7	5	3	1
c) x	3	3,5	4	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6	6,25	6,5	7	7,25	7,5
$f(x)$	2,4	2,7	3	2,6	1,3	1,1	0,9	2,1	3,3	4,7	4,9	3,7	2,8	2,2	1,7
d) x	4	7	9	10	11	13	15	16	17	20	21	22	24	25	27
$f(x)$	0,4	0,7	1,3	1,8	2,3	1,9	5,6	6,4	6,7	3,75	4,4	3,5	2,4	2,7	1,8
e) x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,85	2,05	2,25	2,35	2,5
$f(x)$	1	3	3,5	2,5	2,1	1,6	3,6	5,4	5,7	4,25	3,4	3,75	2,9	2,5	1,7

Aufgabe 7: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*



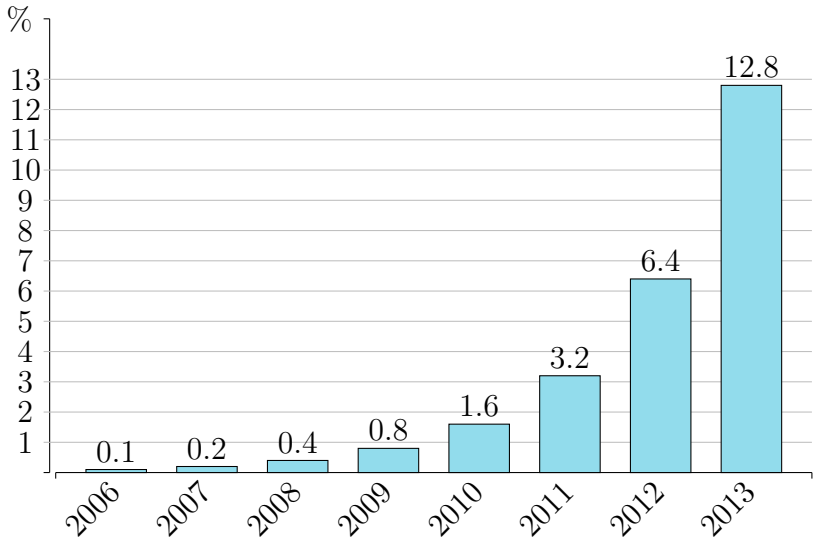
a) Um was für ein Wachstum handelt es sich?

b) Bestimme den Mittelwert des Wachstums.

c) Bestimme die Funktionsgleichung aus dem Mittelwert des Wachstums unter der Annahme, dass der Januar $x = 0$ ist.

d) Berechne den Wert für den kommenden Juli.

Aufgabe 8: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*



a) Um was für ein Wachstum handelt es sich?

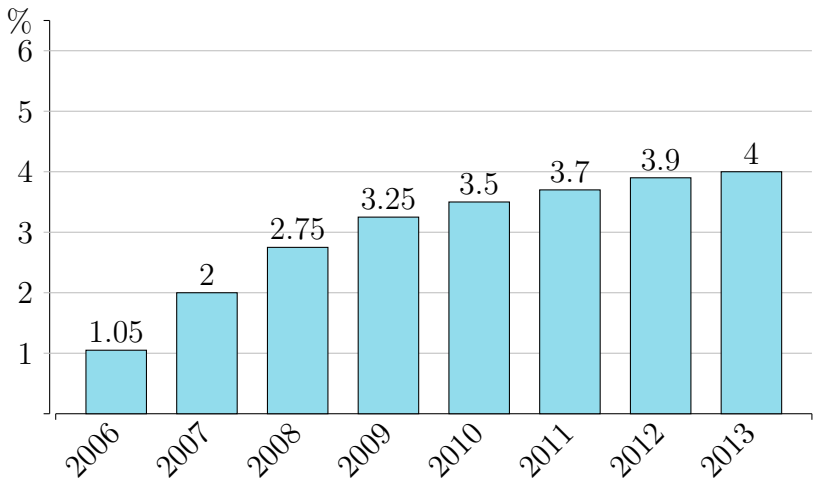
b) Wie stark wird das Wachstum im Jahr 2014 sein?

c) Bestimme die Funktionsgleichung aus den abgebildeten Werten des Säulendiagramms unter der Annahme, dass 2006 das Jahr $x = 0$ ist.

d) Wann betrug das Wachstum genau 1%?

e) In welchem Jahr wird das Wachstum genau 50% betragen?

Aufgabe 9: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*

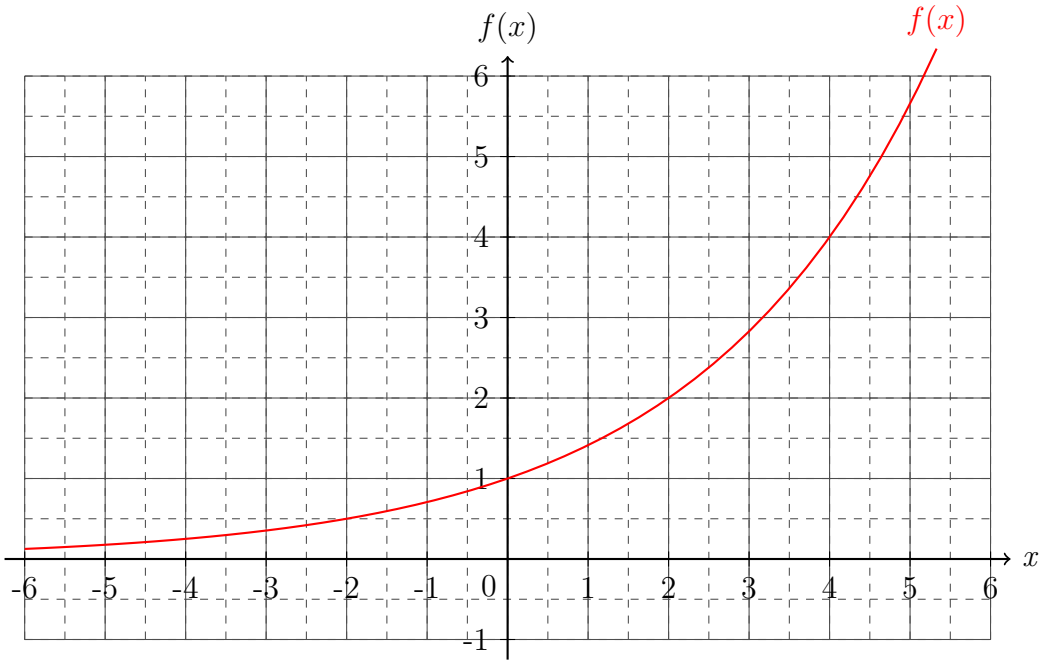


a) Um was für ein Wachstum handelt es sich?

b) Wann ist das Wachstum am stärksten?

c) Zeichne in das Diagramm die Funktion $f(x) = 2\ln x$ unter der Annahme, dass 2006 das Jahr $x = 2$ ist.

Aufgabe 10: *Beantworte alle Fragen zu diesem Funktionsgraphen.*



a) Um was für eine Funktion handelt es sich?

b) Lese die fehlenden Funktions- oder Variablenwerte aus und trage diese in die Tabelle ein.

c) Bestimme aus der Wertetabelle die Funktionsgleichung.

x	-4		1		4
$f(x)$		$0,5$		2	

d) Berechne die fehlenden Funktions- oder Variablenwerte und trage diese in die Tabelle ein.

x	8	$1,5$			-8		-1	
$f(x)$			10	3		$0,1$		10^{-5}

Aufgabe 11: *Da man nicht durch Null dividieren darf, müssen Rechnungen begründet werden, bei der durch einen Term mit der Variablen dividiert wird, da diese gleich Null sein könnte. Begründe durch eine Rechnung, dass die erste Zeile der folgenden Rechnung erlaubt ist. (Tipp: Benutze Potenzgesetze und die Bruchrechnung!)*

$$\begin{aligned} x \cdot e^{2x} - 5 \cdot e^{2x} &= 0 \qquad \Big| : e^{2x} \\ x - 5 &= 0 \qquad \Big| +5 \\ \Rightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 12: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

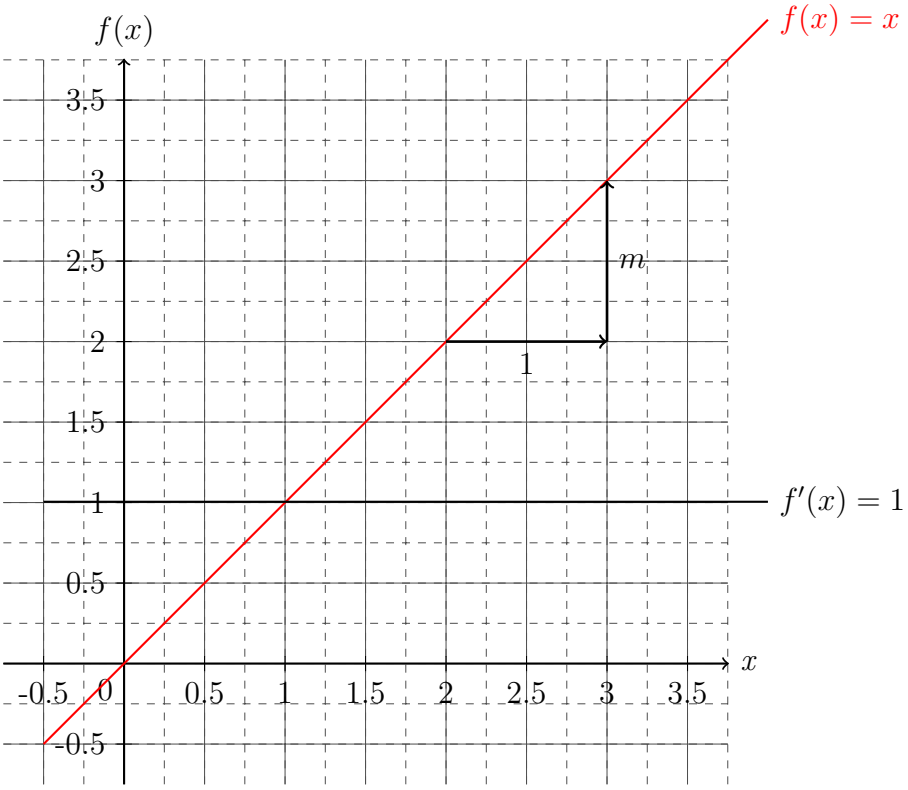
Behauptung	wahr	falsch
$f(x) = mx + b$ ist eine Funktion erster Ordnung.		
Eine Konstante ist keine Funktion.		
Eine Hyperbel ist für alle Werte definiert.		
Eine Tangente schneidet eine Funktion an einem Punkt.		
Eine Funktion 5. Ordnung hat bis zu 4 Extremstellen.		
Die Exponentialfunktion e^x hat ihren Graphen nur im 1. und 2. Quadranten.		
Zur Wurzelfunktion existiert keine Umkehrfunktion.		
Die Hyperbel $\frac{1}{x}$ hat ihren Graphen nur im 1. und 3. Quadranten.		
Der positive Abszissen- und negative Ordinatenbereich ist der 4. Quadrant.		
$f(x) = -3x^6 + 2x^2 - 9$ ist eine Funktion zweiter Ordnung.		

Weitere Behauptung zu Funktionen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.44) Lösungen zu den gemischten Funktionsaufgaben.

6 Differentiation und Integration

Die *Differentiation* und die *Integration* sind wichtige Kernelemente der *Analysis*. Um diese beiden *Operationen* effektiv einzuführen, sollte die *Geradengleichung* $f(x) = mx + b$ mit der *Steigung* der *Geraden* m und dem *Ordinatenschnittpunkt* b nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Seien die *Geraden* $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ gegeben, dann kann durch die Veranschaulichung im *Koordinatensystem* gesehen werden, dass die *Steigung* der *Gerade* $f(x)$ gleich der dem Wert der *Geraden* $f'(x)$ also gleich eins ist. Die *Steigung* der *Gerade* $f'(x)$ ist Null, da es sich um eine *Konstante* handelt wie im *Koordinatensystem* zu erkennen ist. Dabei ist der Begriff „*Steigung*“ so *definiert*: „Wenn man einen Einheitenschritt nach rechts von der *Geraden* aus geht, ist die *Steigung* der *Geraden* gleich der Einheitenschritte *orthogonal* zum gegangenen Schritt - folglich nach oben für positive *Steigung* und nach unten für negative *Steigung*.“



6.1 Operatoralgebra

Mathematisch lässt sich ein Ausdruck definieren, der sprachlich fordert: „*Bestimme die Steigung von der Funktion!*“ Diese Forderung wird durch den sogenannten *Differentialoperator* $\frac{\partial}{\partial x}$ erfüllt, der „*d nach d x*“ gelesen wird. Ein solcher *Operator* wirkt nur nach rechts, dass heißt alle *Größen*

die links vom *Operator* unangetastet stehen bleiben. Somit soll folgende Rechenvorschrift für den *Operator* gelten, um den veranschaulichten Forderungen im vorherigen *Koordinatensystem* gerecht zu werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= 1 \qquad \text{siehe Funktionenbeispiel} \\ \frac{d}{dx}1 &= 0 \qquad \text{im Koordinatensystem} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Somit würde das *Kommutativgesetz*, welches für normale Zahlen, *Parameter* und *Variablen* gegeben ist durch

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 &= 0 \\ a \cdot b - b \cdot a = 0 &= [a, b] \qquad , \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$ der sogenannte *Kommutator* ist, sich wie folgt verändern:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \qquad . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch *Äquivalenzumformung* der Gleichung (6.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} &= 1 \qquad \Big| + x\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dieser Ausdruck ist von zentraler Bedeutung, der es durch ein triviales *Einsetzungsverfahren* ermöglicht den *Operator* an einer *Variable* vorbei zu ziehen. Sei zum Beispiel die *Steigung* der *Funktion* $g(x) = x^2$ gesucht, dann lässt sich dies mit Hilfe der Gleichung (6.4) bestimmen, indem *Terme* der Form $\frac{d}{dx}x$ durch den Ausdruck $\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$ ersetzt werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \\
&= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \\
&= x + x\frac{d}{dx}x \\
&= x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\
&= x + x + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\
&= 2x
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Ähnlich verhält sich das Prozedere mit der *Funktion* $h(x) = x^3$, wobei lediglich die Anzahl der Schritt zunimmt.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^3 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \cdot x \\
&= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\frac{d}{dx}x \cdot x \\
&= x \cdot x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\frac{d}{dx} \cdot x \\
&= x \cdot x + x \cdot x + x^2\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\
&= x^2 + x^2 + x^2 + x^3 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\
&= 3x^2
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Dies kann für x^4 und höhere *Potenzen* von x auch bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der Schritte nur weiter erhöhen würde. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse ist eine Regel für die *Ableitung* von *Polynomen* erkennbar, sodass die Prozedur des wiederholten Einsetzens überflüssig wird.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}1 &= 0 \\
\frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} = 1 \\
\frac{d}{dx}x^2 &= 2x + x^2\frac{d}{dx} = 2x \\
\frac{d}{dx}x^3 &= 3x^2 + x^3\frac{d}{dx} = 3x^2 \\
\frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3 + x^4\frac{d}{dx} = 4x^3 \\
\frac{d}{dx}x^5 &= 5x^4 + x^5\frac{d}{dx} = 5x^4
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Gleichung (6.7) zeigt deutlich, dass sich die Potenz bei der Anwendung vom *Differentialoperator* um eins verringert und als *Vorfaktor* wieder zu finden ist. Somit ergibt sich folgende allgemeine Regel für die Anwendung des *Differentialoperators* - es wird auch vom „*Ableiten*“ gesprochen - auf ein *Polynom*:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \\
\Rightarrow &\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Als verkürzende Schreibweise soll von nun an gelten:

$$
\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \qquad . \tag{6.9}
$$

Dabei bedeutet der Strich bei $f'(x)$, dass es sich um die *Ableitung* der *Funktion* $f(x)$ handelt und dass der wirkende *Differentialoperator* nach x (also $\frac{d}{dx}$) gewirkt hat. So gilt zum Beispiel ebenso:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}f(y) &= f'(y) \qquad \text{Funktion von } y \text{ deswegen Differentialoperator nach } y \\
\frac{d}{dz}f(z) &= f'(z) \qquad \text{Funktion von } z \text{ deswegen Differentialoperator nach } z \\
\frac{d}{dt}f(t) &= \dot{x}(t) \qquad \text{Funktion von } t \text{ deswegen Differentialoperator nach } t,
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

wobei letztes ein Spezialfall der Physik ist, da nach der Zeit t *abgeleitet* wurde. Generell werden in der Physik immer die *Ableitungen* nach der Zeit mit einem *Punkt* über der *Funktion* beschrieben.

6.1.1 Übungsaufgaben zum Differentiationsoperator

Aufgabe 1: *Führe den Operator mit Hilfe des Kommutators an allen Termen vorbei.*

a) $\frac{d}{dx}x^4$

b) $\frac{d}{dx}3x^2$

c) $\frac{d}{dx}(x+1)$

d) $\frac{d}{dx}\left(x^3+x^2\right)$

e) $\frac{d}{dx}5\left(x^2+x\right)$

f) $\frac{d}{dx}x^2+x^7$

g) $\frac{d}{dx}5x^3+8x^9$

h) $\frac{d}{dx}\left(x^3+77\right)+x^9$

Aufgabe 2: *Leite die Funktionen ab.*

a) $f(x)=x^6$

b) $f(x)=x^{55}$

c) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

d) $f(x)=x^{-1}$

e) $f(x)=x+1$

f) $f(x)=x^2+x^6+7$

g) $f(x)=4x^5$

h) $f(x)=\pi x^3$

i) $f(x)=ex^4+\sqrt{2}$

j) $f(x)=\frac{4}{x^2}$

k) $f(x)=\sqrt{4x}$

l) $f(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+3$

m) $f(x)=-x^{\frac{2}{3}}$

n) $f(x)=-x^{-8}$

o) $f(x)=x^{-\frac{5}{6}}$

p) $f(x)=e\pi$

Aufgabe 3: *Führe den Operator mit Hilfe des Kommutators an allen Termen vorbei. Halte immer alle angegebenen Ordnungen ausgeschrieben. Führe die Reihendarstellung anschließend durch Ausklammern wieder zur Funktionsdarstellung zurück.*

$$a)\ \frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right]$$

$$b)\ \frac{d}{dx}e^{ax} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ax)^n = \frac{d}{dx}\left[1 + ax + \frac{1}{2!}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \frac{1}{4!}a^4x^4 + \frac{1}{5!}a^5x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right]$$

$$c)\ \frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \mathcal{O}\left(x^9\right)\right]$$

$$d)\ \frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \mathcal{O}\left(x^8\right)\right]$$

Aufgabe 4: *Leite mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 folgende Funktionen ab.*

$a)\ f'(x) = e^x$	$b)\ f'(x) = -e^{-x}$
$c)\ f'(x) = 4e^{4x}$	$d)\ f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-3x}$
$e)\ f'(x) = \cos x$	$f)\ f'(x) = -\cos x$
$g)\ f'(x) = -\sin x$	$h)\ f'(x) = \sin x$
$i)\ f'(x) = 4\cos 4x$	$j)\ f'(x) = -3\cos 3x$
$k)\ f'(x) = -5\sin 5x$	$l)\ f'(x) = 2\sin 2x$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.45) Lösungen zur Differentiationsoperator.

6.2 Ableitungsregeln

Die erste *Ableitungsregel* wurde schon in Gleichung (6.8) beschrieben und gilt für jede Art von *Polynomen*.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \tag{6.11}$$

Diese *Ableitungsregel* ist besonders nützlich im Zusammenhang mit den *Potenzgesetzen*, denn so lassen sich bestimme *Funktionen* über einer *Variable* als *Basis* mit einer Zahl im *Exponenten darstellen*. Mit Hilfe dieser *Ableitungsregel* besteht die Möglichkeit wesentlich komplexere, also zusammengesetzte, *Funktionen abzuleiten*. Dazu sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt unter der Verwendung der Regeln für die Klammersetzung:

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}f(x) \tag{6.12}$$

Sei nun $f(x) = g(x)h(x)$ und zum Beispiel mit $g(x) = x^n$ und $h(x) = x^m$, dann gilt unter Berücksichtigung der *Potenzgesetze* und Gleichung (6.11) und der verkürzten Schreibweise aus Gleichung (6.9):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) &= \frac{d}{dx}x^nx^m = \frac{d}{dx}x^{n+m} = (n+m)x^{n+m-1} \\
&= \frac{d}{dx}x^nx^m = \left(nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\right)x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\frac{d}{dx}x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\left(mx^{m-1} + x^m\frac{d}{dx}\right) \\
&= nx^{n-1}x^m + x^nmx^{m-1} \\
&= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\
&= nx^{n-1+m} + mx^{n+m-1} = (n+m)x^{n+m-1}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Wie Gleichung (6.13) zeigt, kann diese Aufgabe schnell über die *Potenzgesetze* in einer Zeile gelöst werden. Dieses Ergebnis soll als Vergleich dienen, um die *Ableitungsregel* für *Polynome* auf die zusammengesetzte *Funktion* $f(x)$ anzuwenden. Dabei wird erneut wie schon beim Herleiten der *Ableitungsregel* für *Polynome* das *Einsetzungsverfahren* verwendet. In der vorletzten Zeile dieser Rechnung ist zu erkennen, dass

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad , \tag{6.14}$$

gilt. Diese *Ableitungsregel* aus Gleichung (6.14) wird *Leibnizregel* oder *Produktregel* genannt. Ihr Nutzen wird sich offenbaren wenn nicht nur *Polynome* zur Diskussion stehen.

Mit der *Leibnizregel* und der *Substitution*, soll nun noch eine weitere *Ableitungsregel* bestimmt werden. Dabei soll gelten, dass die *Funktion* $f(x)$ eine verkettete *Funktion* sein soll: $f(x) =$

$g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ mit dem Beispiel, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$ sei - mit den *Ableitungen* $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 2$. Wie die Verkettung fordert, wir $h(x)$ in die *Funktion* $g(x)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Ableitung mit der Überprüfung des Ergebnisses durch die *Ableitungsregel* der *Polynome* sowie den *Binomischen Formeln*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) &= \frac{d}{dx}(2x+1)^2 = \frac{d}{dx}4x^2 + 4x + 1 = 8x + 4 \\
&= \frac{d}{dx}(2x+1)(2x+1) \quad \text{Leibnizregel} \\
&= (2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1) + (2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1) \\
&= (2x+1)\,2 + (2x+1)\,2 \\
&= 2 \cdot 2\,(2x+1) \quad \text{Vergleich mit } g'(x),\ h'(x) \text{ und } h(x) \\
&= h'(x) \cdot g'(h(x)) = 8x + 4
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Die letzte Zeile offenbart durch den Vergleich der *Terme* mit den *Funktionen* $g(x)$ und $h(x)$ sowie ihren *Ableitungen* $g'(x)$ und $h'(x)$ die allgemeine Regel der *Ableitung* von verketteten *Funktionen*.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(h(x)) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \tag{6.16}$$

Diese Regel wird *Kettenregel* genannt und wird ihre Bedeutung erst offenbaren, wenn *Funktionen* angenommen werden, deren abgekürzte Schreibweise ihre Herkunft aus *Polynomen* nicht mehr offensichtlich zeigen.
Mittels der *Substitution* $y := h(x)$ würde das *Polynom* in der Klammer ersetzt werden. Allerdings muss auch der *Ableitungsoperator* $\frac{d}{dx}$ nach $\frac{d}{dy}$ umgewandelt werden. Dies geschieht wie folgt (Hier sollte erwähnt werden, dass es sich lediglich um eine Nebenrechnung handelt, um die *Substitution* zu durchführen zu können. Die gezeigten Schritte der Rechnung sehen intuitiv aus, sind allerdings nicht ohne weitere Prüfungen und tiefer liegende Mathematik durchführbar.):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} &= h'(x) \qquad |\cdot dx \\
dy &= dx \cdot h'(x) \qquad |: h'(x) \\
\Rightarrow dx &= \frac{dy}{h'(x)} \qquad \text{eingesetzt in: } \frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} &= h'(x)\frac{d}{dy}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Der gefundene Ausdruck für $\frac{d}{dx}$ wird nun mit eingesetzt, wenn die *Substitution* durchgeführt wird.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}g(h(x)) \qquad \text{mit: } y := h(x) \text{ und: } \frac{d}{dx} = h'(x)\frac{d}{dy} \\
&= h'(x)\frac{d}{dy}g(y) \\
&= h'(x)g'(y) \qquad \text{mit: } y = h(x) \text{ zurück eingesetzt} \\
&= h'(x)g'(h(x))
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Gleichung (6.17) und (6.18) zeigen eine Herleitung der *Kettenregel* ohne Spezifizierung der *Funktionen*, sodass festgehalten werden kann, dass jede *differenzierbare verkettete Funktion* über diese Regel *ableitbar* ist.
Einige *Funktionen* haben eine sehr komplex anmutende Struktur, sodass die *Ableitung* manchmal nicht intuitiv erscheint. Allerdings erscheint oftmals die *Umkehrfunktion* dieser *Funktionen* in einer trivialeren Form. Aus diesem Grund muss ein Ausdruck gefunden werden, wie aus der leicht zu bestimmenden *Ableitung* der verwandten *Umkehrfunktion* die *Ableitung* der gewünschten *Funktion* gewonnen werden kann. Als Ansatz wird die Gleichung (5.25) gewählt:

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(x)\right) &= x && \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \frac{d}{dx} f\left(f^{-1}(x)\right) &= \frac{d}{dx} x && |\text{Kettenregel} \\ \left(\frac{d}{dx} f^{-1}(x)\right) f'\left(f^{-1}(x)\right) &= 1 && |: f'\left(f^{-1}(x)\right) \\ \frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Diese Gleichung zur Bestimmung der *Ableitung* einer *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ über die verwandte *Funktion* $f(x)$ ermöglicht es selbst *Umkehrfunktion* mit unbekannter Struktur abzuleiten, da lediglich die Struktur der *Funktion* bekannt sein muss.
Mit den erschlossenen *Ableitungsregeln* können alle *Funktionen* abgeleitet werden. Allerdings bedarf es bei speziellen *Funktionsarten* noch einen technischen Zwischenschritt der Vereinfachung, wobei die Gleichung (5.25) erneut ausgenutzt werden kann.

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x && |\text{mit: } f\left(f^{-1}(x)\right) = x \\ f(x) &= e^{\ln a^x} && |\text{mit: } \ln a^x = x \ln a \\ f(x) &= e^{x \ln a} && \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) &= a^x \ln a \end{aligned} \tag{6.20}$$

An Gleichung (6.20) ist deutlich zu erkennen, wie die Verbindung zwischen *Funktion* und *Umkehrfunktion* von der besonders leicht abzuleitenden *Exponentialfunktion* mit der Kombination der *Logarithmengesetze* ausgenutzt wird. Mittels dieses Verfahrens kann auch die Funktion $f(x) = x^x$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x && |\text{mit: } f\left(f^{-1}(x)\right) = x \\ f(x) &= e^{\ln x^x} && |\text{mit: } \ln a^x = x \ln x \\ f(x) &= e^{x \ln x} && \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) &= (\ln x + 1)\, e^{x \ln x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) &= (\ln x + 1)\, x^x \end{aligned} \tag{6.21}$$

6.2.1 Übungsaufgaben zu den Ableitungsregeln

Aufgabe 1: *Leite die Funktionen mit der Kettenregel ab.*

a) $f(x) = (2x+3)^3$

b) $f(x) = \left(x^3+2\right)^2$

c) $f(x) = \left(x^4 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x}$

e) $f(x) = e^{3x^2}$

f) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3-4x+6}$

g) $f(x) = \sin(5x)$

h) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(-2x^3)$

i) $f(x) = \left(5x^2+6x\right)^{-\frac{1}{2}}$

j) $f(x) = (\cos(3x))^{-3}$

Aufgabe 2: *Leite die Funktionen mit der Produktregel ab.*

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = x^3e^x$

c) $f(x) = 2x^2e^{5x}$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f(x) = x^4\sin 5x$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^{2,34}\sin\frac{x}{2}$

g) $f(x) = e^{-3x}\cos\frac{3x}{4}$

h) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)$

i) $f(x) = e^{-2x}\cos(6x)\cos(\pi x)$

j) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)e^{dx}$

Aufgabe 3: *Leite die Funktionen mithilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen ab.*

a) $f^{-1}(x) = \ln x$

b) $f^{-1}(x) = \log_a x$

c) $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

d) $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$

e) $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$

f) $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$

Aufgabe 4: *Leite die Funktionen ab.*

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{2x - 1}$

c) $f(x) = x \ln x - x$

d) $f(x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$

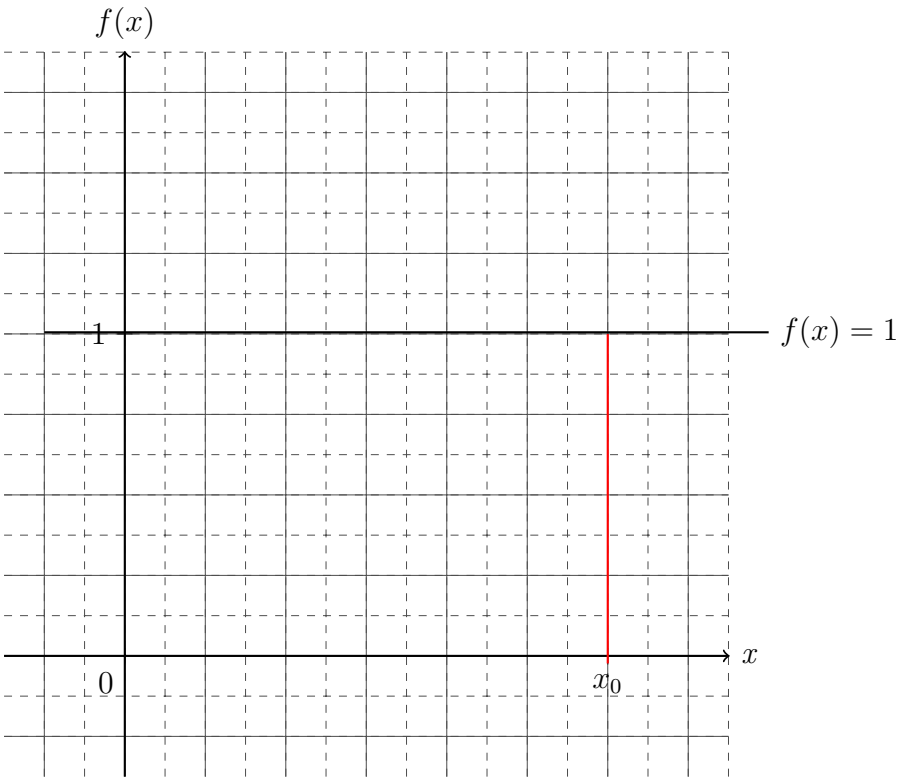
e) $f(x) = \dfrac{1}{2a} \sin^2 ax$

f) $f(x) = \dfrac{ax - 1}{a^2} e^{ax}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.46) Lösungen zu den Ableitungsregeln.

6.3 Integration

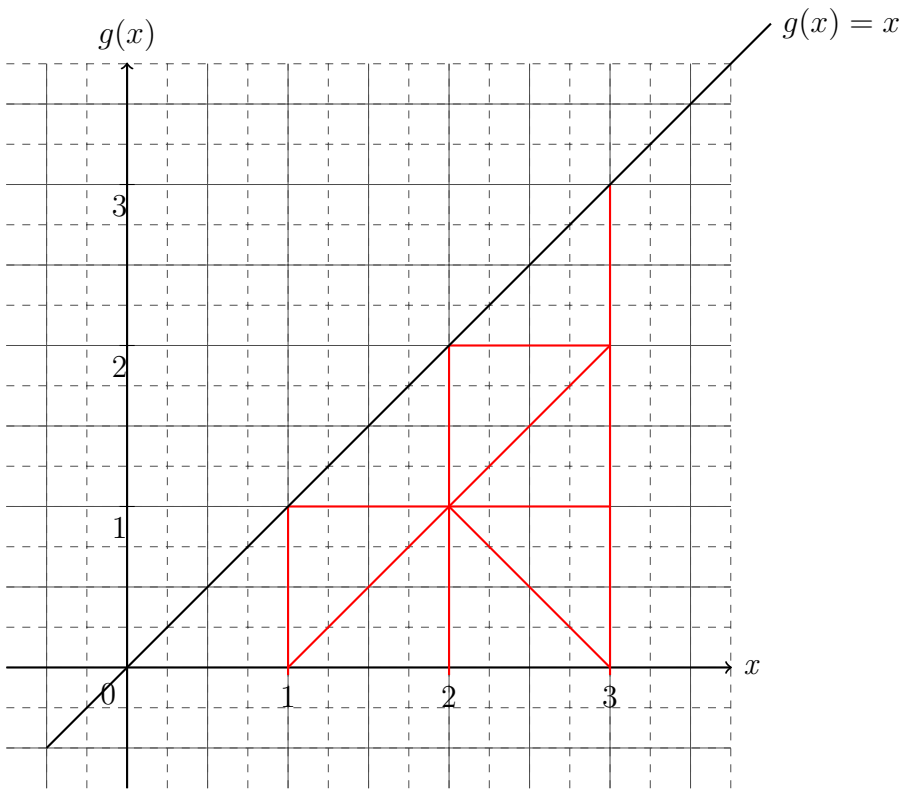
Nachdem die *Differentiation* zur Bestimmung der *Steigung* einer *Funktion* eingeführt wurde, soll nun eine weitere Eigenschaft der *Funktion* untersucht werden. Sei eine *Funktion* $f(x) = 1$ gegeben. Nun soll der *Flächeninhalt* bestimmt werden, der von der *x-Achse* und *Funktion* $f(x)$ eingeschlossen wird, von $x = 0$ bis $x = x_0$ bestimmt werden.



Der *Flächeninhalt* als *Funktion* $F(x)$ wäre gegeben als:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \cdot x \qquad \text{mit: } f(x) = 1 \\ F(x) &= x \qquad \text{mit: } x = x_0 \\ \Rightarrow F(x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $F(x)$ wäre wieder die *Funktion* $f(x)$. Als weiteres Beispiel soll die *Funktion* $g(x) = x$ gegeben sein und erneut soll der *Flächeninhalt* als *Funktion* von x, also $G(x)$, bestimmt werden.



Der *Flächeninhalt* unterhalb der *Funktion* $g(x)$ bildet ein *Dreieck*. Somit ist die *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ gegeben als:

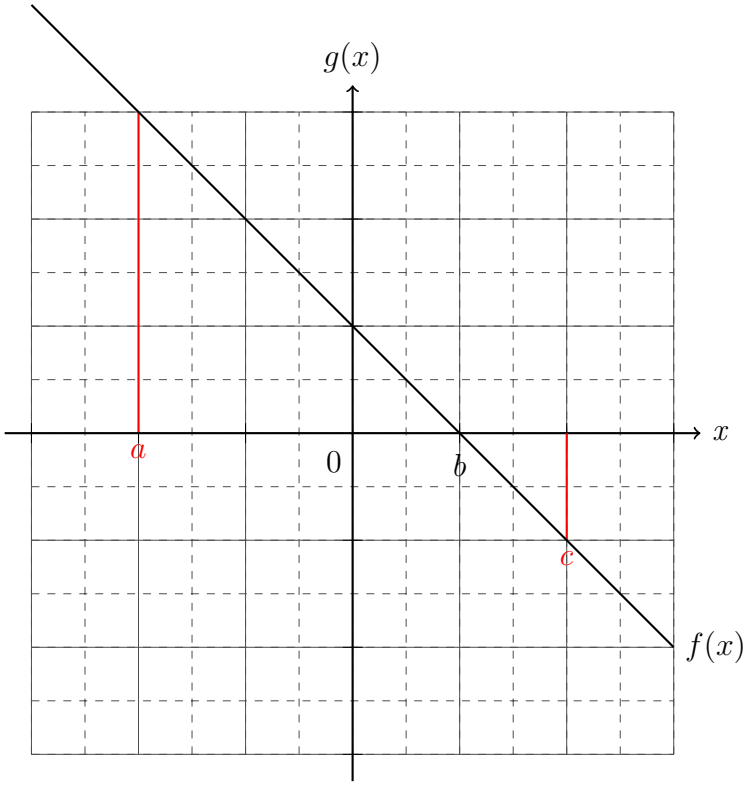
$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{g(x) \cdot x}{2} \qquad \text{mit: } g(x) = x \\ G(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ wäre $\frac{1}{2}2x = x = g(x)$. Somit wäre erneut die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ die *Ausgangsfunktion* $g(x)$. Aus dieser Erkenntnis kann wieder aus der sprachlichen Forderung „Bestimme den *Flächeninhalt* unter der *Funktion* $f(x)$ der durch die *Grenzen* $x = a$ bis $x = b$ und x-*Achse* begrenzt ist!“ einen mathematischen Formalismus entstehen lassen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ F(a) - F(b) &= \int_a^b f(x)dx \\ F(x) + G(x) &= \int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned} \tag{6.24}$$

Diese *Operation* wird *Integration* genannt. Dabei wird Gleichung (6.24) gelesen als „Die *Stammfunktion* $F(x)$ ist gleich das *Integral* über die *Funktion* $f(x)$ nach x in den *Grenzen* von a bis b“. Bei der *Integration* mit *Grenzen* handelt es sich um die *bestimmte Integration*. Hierbei ist es wichtig, ob im *Integrationsintervall* sich eine *Nullstelle* befindet, denn wenn sich die *Funktion* unterhalb der *Abszisse* befindet, dann ist das *Vorzeichen* des *Flächeninhalts* negativ. Folglich gibt es durch die *Betragsfunktion* und durch die Umkehrung der *Integrationsgrenzen* eine

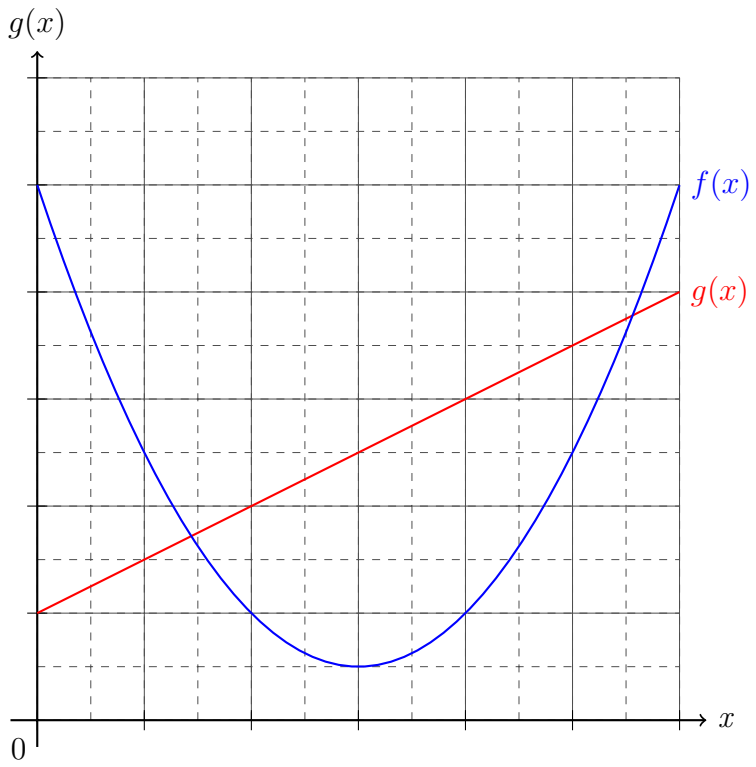
Möglichkeit den gesamten *Flächeninhalt* zu bestimmen.



Mit der *Nullstelle* bei $x = b$ ist der *Flächeninhalt* zwischen $[a, c]$ durch das *Integral*

$$\begin{aligned}\int_a^c |f(x)|\,dx &= \int_a^b |f(x)| + \int_b^c |f(x)| \\ &= \int_a^b f(x) - \int_b^c f(x) \qquad \text{für} \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [a, b] \\ &= \int_a^b f(x) + \int_c^b f(x)\end{aligned} \tag{6.25}$$

beschrieben. Wenn der eingeschlossene *Flächeninhalt* zwischen zwei *Funktionen* bestimmt werden soll, müssen zu nächst die *Schnittpunkte* der *Funktionen* bestimmt werden, da diese die *Integrationsgrenzen* beschreiben.



Dabei wird der *Flächeninhalt* zwischen der *Funktion* $g(x)$ und der *Abszisse* vom *Flächeninhalt* zwischen der *Funktion* $f(x)$ und der *Abszisse subtrahiert*.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{x_{\times 1}}^{x_{\times 2}} f(x)dx - \int_{x_{\times 1}}^{x_{\times 2}} g(x)dx \right| \\ &= \int_{x_{\times 1}}^{x_{\times 2}} |f(x) - g(x)|\, dx \end{aligned} \tag{6.26}$$

Bei dieser *Flächeninhaltsbestimmung* muss immer beachtet werden, welche *Funktion* die höheren *Funktionswerte* im jeweiligen *Intervall* besitzt. Von dieser *Funktion* wird stets die *Funktion* mit den niedrigeren *Funktionswerten* unterm *Integral* - dem sogenannten *Integranden* - abgezogen.

6.3.1 Übungsaufgaben zur Integration

Aufgabe 1: *Integriere die Funktionen.*

a) $\int x^3 dx =$

b) $\int 4x^6 dx =$

c) $\int 3x - 3dx =$

d) $\int 9dx =$

e) $\int x^5 - x^3 + 5dx =$

f) $\int 4x^3 + xdx =$

g) $\int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} dx =$

h) $\int 11x^5 - 6x^3 dx =$

i) $\int \frac{10}{3}x^9 - 3x^8 + 5x^6 dx =$

j) $\int \frac{12}{5}x^4 - x^3 + 7x^2 - 19x + 3dx =$

k) $\int \sqrt{x} dx =$

l) $\int \frac{1}{x^2} dx =$

Aufgabe 2: *Bestimme den Flächeninhalt unter den Graphen in den angegebenen Grenzen. (Beachte die Nullstellen)*

a) $\int_2^4 x^6 dx =$

b) $\int_1^6 4x^2 dx =$

c) $\int_0^4 7x - 3x^2 dx =$

d) $\int_{-2}^3 5x dx =$

e) $\int_0^7 6x^2 - 2x + 5dx =$

f) $\int_{-1}^2 2x^2 + 5x dx =$

g) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 \frac{5}{6}x^{\frac{7}{5}} dx =$

h) $\int_{-\frac{6}{5}}^5 4x^2 + 2x - 6dx =$

i) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 3x^2 + 4x - 8dx =$

j) $\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{2}{3}} -7x^2 + 5x + 4dx =$

k) $\int_2^3 \sqrt{x} dx =$

l) $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} dx =$

Aufgabe 3: *Bestimme den Flächeninhalt zwischen den Funktionen.*

a) $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = -x + \frac{1}{4}$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ und $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - 2$

d) $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x^2 - 2x + 4$

e) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ und $g(x) = -2x^2 - 4x + 4$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.47) Lösungen zur Integration.

6.4 Integrationsregeln

Nachdem der Formalismus eingeführt wurde, soll ein allgemeines *Polynom* x^n untersucht werden. Dazu wird die *Ableitung* von x^n gebildet und über *Äquivalenzumformung* und mit *Potenzgesetzen* die Gleichung umgestellt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \qquad \text{substituiere: } m = n-1 \Rightarrow n = m+1 \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^{m+1} &= (m+1)x^m \qquad |:(m+1) \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1} &= x^m \qquad |\cdot dx \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1}dx &= x^m dx \qquad \Big|\int \\
\Rightarrow \int x^m dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Die letzte Zeile der Gleichung (6.27) zeigt die hergeleitete Regel für die *Integration* von *Polynomen*. Nachdem das generelle *Integrationsgesetz* für *Polynome* gefunden wurde, die *Produktregel* als Ausgangspunkt für die Herleitung einer weiteren *Integrationsregel* dienen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad |\cdot dx \\
\frac{d}{dx}f(x)g(x)dx &= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx \qquad \Big|\int \\
f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \Big|-\int f(x)g'(x)dx \\
\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Diese *Integrationsregel* wird „*partielle Integration*“ genannt. Sie wird dazu verwendet *Funktionsprodukte* zu *integrieren* bei dem eine *Teilfunktion* $f(x)$ leicht zu *integrieren* ist, während die andere *Teilfunktion* $g(x)$ eine *Funktion* ist die eine unbekannte *Stammfunktion* besitzt, deren *Ableitung* allerdings bekannt ist. Generell wird diese *Integrationsregel* dazu verwendet, um das *Produkt* eines *Polynoms* mit einer anderen *Funktion* zu *integrieren*. Dabei bildet in der Regel das *Polynom* die *Funktion* $g(x)$, sodass dieses nach mehrfacher Anwendung der *partiellen Integration* und dem *Einsetzungsverfahren* dieses *Polynom* restlos verschwindet und die *Funktion* $f(x)$ alleinstehend unter dem *Integral* vorzufinden.

Abschließend soll die *Kettenregel* in eine Regel der *Integration* überführt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) &= g'(x)f'\left(g(x)\right) \qquad |dx \\
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)dx &= g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad \Big|\int \\
f\left(g(x)\right) &= \int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Durch *Substitution* lässt sich dieses *Integral* lösen, hierbei wird $y := g(x)$ gewählt:

$$\begin{aligned}\int g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad & \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ = \int f'\left(y\right)dy = f(y) \qquad & \text{zurück eingesetzt: } g(x) = y \\ = f\left(g(x)\right) & \end{aligned} \tag{6.30}$$

Aus den Gleichungen (6.29) und (6.30) ist erkennbar, dass die *Kettenregel* der *Ableitung* überführt in die *Integration* durch *Substitution* bearbeitet werden kann. Aus diesem Grund wird diese Regel „*Integration* durch *Substitution*“ genannt.

Mit *Grenzen* würde sich bei der *Integration* durch *Substitution* die *Grenzen* mit verändern:

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)f'\left(g(x)\right)dx \qquad & \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ = \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy & \end{aligned} \tag{6.31}$$

Dabei wird die obere *Grenze* und die unteren *Grenze* eingesetzt in die *Stammfunktion* und anschließend von einander *subtrahiert*. Für diesen Prozess gibt es zwei verschiedene Schreibweisen. Die erste Schreibweise umklammert den *Term*, in den einzusetzen ist, während die zweite Schreibweise einen senkrechten Strich vorsieht und aussagt, dass für alle *Variablen* links vom Strich eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right)dy &= \left[f(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= f(y)\big|_{x=g(a)}^{x=g(b)} \\ &= f\left(g(b)\right) - f\left(g(a)\right)\end{aligned} \tag{6.32}$$

Da nun alle Regeln für die *Integration* und der *Differentiation* bekannt sind, werden im folgenden Abschnitt beide Methoden dazu verwendet um spezielle Gleichungen zu lösen - die sogenannten *Differentialgleichungen*.

6.4.1 Übungsaufgaben zu den Integrationsregeln

Aufgabe 1: *Integriere die Funktionen mit der partiellen Integration.*

a) $\int xe^x dx =$

b) $\int x^2 e^{2x} dx =$

c) $\int x\sin(x)dx =$

d) $\int x\cos(2x)dx =$

e) $\int x^3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx =$

f) $\int 4x^2 2^x dx =$

g) $\int \frac{3}{4}x^2 e^{-x} - 1dx =$

h) $\int \sin(x)\cos(x)dx =$

Aufgabe 2: *Integriere die Funktionen durch Substitution.*

a) $\int 2xe^{x^2} dx$

b) $\int x^3 e^{\frac{1}{4}x^4} dx$

c) $\int 12x^3 e^{4x^4} dx$

d) $\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} e^{\sqrt{x^3}} dx$

e) $\int 4x^3 \cos(x^4)dx$

f) $\int x\sin(2x^2)dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\sqrt{\tan(x)}dx$

h) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln(x))dx$

Aufgabe 3: *Integriere die Funktionen.*

a) *b)*

Aufgabe 4: *Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der Abszisse in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Aufgabe 5: *Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der Abszisse in den angebenen Grenzen.*

a) *b*)

Aufgabe 6: *Bestimme den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den Funktionen.*

a) *b*)

Aufgabe 7: *Bestimme den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den Funktionen.*

a) *b*)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.48) Lösungen zu den Integrationsregeln.

6.5 Partielle und totale Differentiation

Es existieren mehrere Formen des *Differentialoperators*, dabei sind die meisten Formen zusammengesetzte Objekte aus *partiellen* und *totalen Differentialoperatoren*. Die zusammengesetzten Formen werden im Kapitel der *Vektoranalysis* weiter ausgeführt, während in diesem Abschnitt der Unterschied zwischen der *partiellen* und der *totalen Differentiation* herausgearbeitet wird. Der in den obrigen Abschnitten verwendete *Operator* ist der *totale Differentialoperator*:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad . \tag{6.33}$$

Dabei besitzt dieser *Operator* noch weitere Eigenschaften welche schon eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= f'(x) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n f(x) &= nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^n + f(x)\right) &= nx^{n-1} + f'(x) \quad . \end{aligned} \tag{6.34}$$

In der Gleichung (6.34) wird deutlich, dass der totale *Differentialoperator* auch Größen ableitet, welche nur eine Abhängigkeit - also keinen direkten Bezug zur betrachteten *Variable* - besitzen. Dies ist der gravierende Unterschied zum *partiellen Differentialoperators*, welcher indirekte Bezüge zur *Variable* ignoriert. Die Eigenschaften für die *partielle Differentiation* sind:

$$\frac{\partial}{\partial x}x^n = nx^{n-1} \quad , \tag{6.35}$$

wobei im Weiteren mehrere *Variablen* der *Funktion* angenommen werden, um die Eigenschaften der *partiellen Differentiation* zu verdeutlichen. Dabei wird eine *Funktion* $f\left(x, y(x)\right) = x^n + y(x)$ betrachtet, die von den *Variablen* x und y abhängt, wobei y wiederum eine Abhängigkeit von x besitzt. Mit dieser Beispielfunktion werden nun die Eigenschaften der *totalen* und der *partiellen Differentiation* gegenüber gestellt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f\left(x, y(x)\right) &= nx^{n-1} \quad , \\ \frac{d}{dx}f\left(x, y(x)\right) &= nx^{n-1} + y'(x) \quad . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Aus der Gleichung (6.36) wird deutlich, wie der *partielle Differentialoperator* $\frac{\partial}{\partial x}$ den Bezug von y zu x ignoriert, während die *totale Differentiation* den Bezug aufnimmt. Folglich besitzt die Deklarierung der *Variablen* einer *Funktion* eine besondere Bedeutung, wenn zwischen den *Differentialoperatoren* unterschieden werden muss. In der *Analysis* mit einer *Variablen* sind die Eigenschaften der *totalen Differentiation* mit der der *partiellen* übereinstimmend. Während sich bei *Funktionen* mit mehreren *Variablen* es zu Unterschieden kommen kann. Dabei setzt sich ein Teil des *totalen Differentialoperators* aus *partiellen Ableitungen* zusammen. Dieser Teil wird auch das *totale Differential* genannt, welches bei einer *Funktion* mit mehreren *Variablen* wie folgt definiert ist:

$$
\begin{aligned}
f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \Rightarrow \frac{df}{dt} &:= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
\Rightarrow df &:= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad .
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

Die Bildung und Verwendung des *totalen Differentials* wird bei komplexeren *Integrationsaufgaben* sowie bei einer *generellen Koordinatentransformation* - dem Wechsel der *Koordinatensysteme* - benötigt, was in den weiterführenden Abschnitten zur *Vektoranalysis* thematisiert wird. Außerdem sind die Unterschiede zwischen der *totalen* und *partiellen Differentiation* bei der *Fehlerrechnung* von fundamentaler Bedeutung, sodass beide Typen der *Operatoren* bekannt sein sollten.

6.5.1 Übungsaufgaben zur partieller und totaler Differentiation

Aufgabe 1: *Leite partiell ab.*

a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 - 3x^2 + 1\right) =$

b) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^6 - t(x)\right) =$

c) $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x + a(x)\right) =$

d) $\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)x^{c(x)}\right) =$

e) $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x - x^2 + a(x)x\right) =$

f) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(x)t^2(x)}{2} + v(x)t(x) + x\right) =$

g) $\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^b - cx^d\right) =$

h) $\frac{\partial}{\partial x}\left(a^3(x) + b(x)\right) =$

Aufgabe 2: *Leite partiell ab (Beachte dabei die Ableitungsregeln).*

a) $\frac{\partial}{\partial x}x^2e^{a(x)x} =$

b) $\frac{\partial}{\partial x}\sin(\sqrt{2xt(x)}) =$

c) $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x}e^{3x} =$

d) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{3x + f(x)}{(x-3)^2} =$

e) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin(ax)}{\cos(a(x)x)} =$

f) $\frac{\partial}{\partial x}x^{d(x)x} =$

g) $\frac{\partial}{\partial x}\sin(ax)\,e^{x^2}\cos(a(x)) =$

h) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{3}\tan(\ln(d(x)))x^3 =$

Aufgabe 3: *Leite total ab (Beachte dabei die Ableitungsregeln).*

a) $\frac{d}{dx}x^2e^{a(x)x} =$

b) $\frac{d}{dx}\sin(\sqrt{2xt(x)}) =$

c) $\frac{d}{dx}\sqrt{x}e^{3x} =$

d) $\frac{d}{dx}\frac{3x + f(x)}{(x-3)^2} =$

e) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(ax)}{\cos(a(x)x)} =$

f) $\frac{d}{dx}x^{d(x)x} =$

g) $\frac{d}{dx}\sin(ax)\,e^{x^2}\cos(a(x)) =$

h) $\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\tan(\ln(d(x)))x^3 =$

Aufgabe 4: *Bilde das totale Differential der Funktionen.*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y(x)) = xy - y^3$

c) $f(x,y) = ye^x$

d) $f(x,y(x)) = x^2 + 2yx + y^2$

e) $f(x,y,t) = \sqrt{xt} - y^t$

f) $f(x(t),y(t)) = \sqrt{x^2+y^2} - t$

g) $f(x,y,z,t) = \frac{4}{3}\pi x^3 y z^2 + y t^2$

h) $f(x(y(t))) = x^4$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.49) Lösungen zur partieller und totaler Differentiation.

6.6 Kurvendiskussion

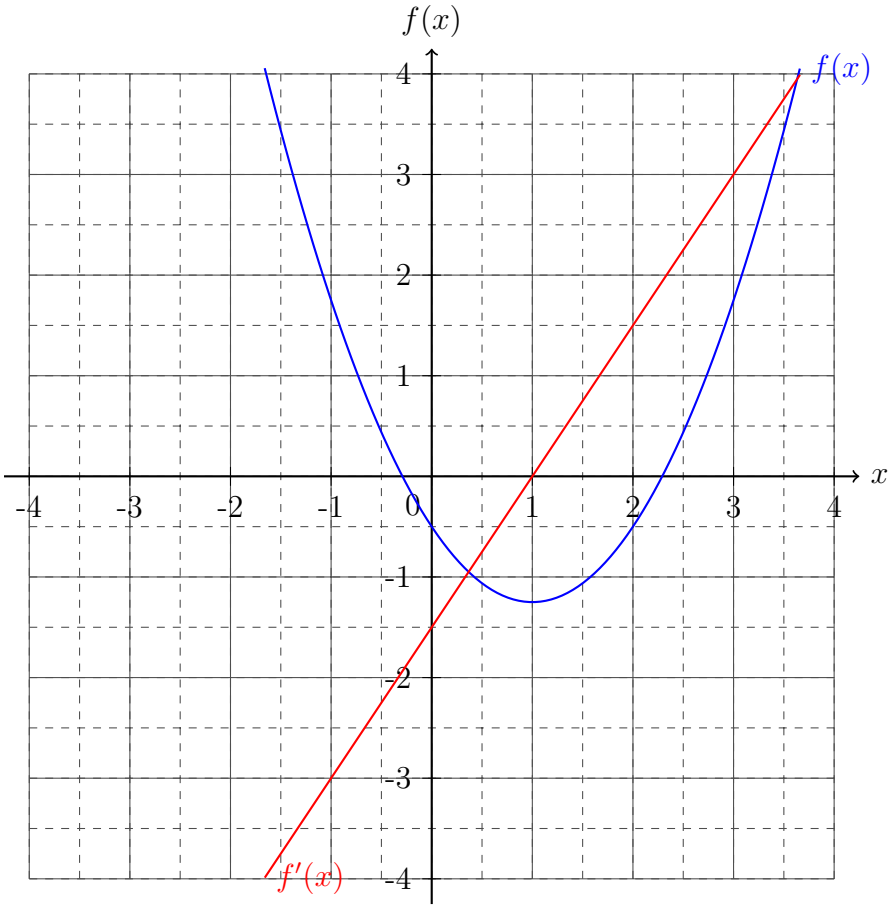
Die *Kurvendiskussion* verbindet alle Methoden der Analyse von *Funktionen*, dabei bilden sich noch weitere Charakteristiken heraus, welche in der Kombination mit den *Differentialoperatoren* aufkommen. Diese Eigenschaften der *Funktionen* werden in diesem Abschnitt zunächst vorgestellt und anschließend ein zusammenfassender Überblick über eine vollständige *Kurvendiskussion* geboten.

6.6.1 Extrempunkte

Bei der *Parabel* wurde bereits der sogenannte *Scheitelpunkt* bestimmt, wobei die *Scheitelpunktsform* ausgenutzt wurde. Ein *Scheitelpunkt* und somit auch jeder andere *Extrempunkt* besitzt eine *Tangente* mit der *Steigung* $m_t = 0$. In diesem Unterabschnitt soll dies für alle *Funktionen* verallgemeinert werden. Dazu sei eine *Parabel* $f(x)$ zur beispielhaften Untersuchung gegeben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}(x-1)^2 - \frac{5}{4} \quad , \\ \Rightarrow S(d|e) &= S\left(1 \middle| \frac{5}{4}\right) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad . \end{aligned} \tag{6.38}$$

Die *Graphen* der *Parabel* $f(x)$ und ihrer *Ableitung* $f'(x)$, welche eine *Gerade* ist, werden in ein *Koordinatensystem* gezeichnet, sodass die Zusammenhänge sich verdeutlichen:



Die *Graphen* zeigen, dass der *Extremwert* der *Parabel d* und den *Nullstellenwert* der *Ableitung* den selben *Wert* besitzen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_{N_{f'(x)}} &= 1 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Aus dieser These kann ein allgemeines Gesetz hergeleitet werden, welches besagt, dass die *Extremstellen* x_E der *Funktion* die *Nullstellen* ihrer *Ableitung* sind:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \quad \text{Auflösen nach den Extremstellen} \quad . \tag{6.40}$$

Da die *Steigung* der *Geraden* - also der *Ableitung* - positiv ist, handelt es sich bei der *Extremstelle* um ein *Minimum* (was in einigen Mathematikbüchern auch Tiefpunkt genannt wird). Wäre die *Steigung* der *Ableitung* negativ, würde es sich um ein *Maximum* (Hochpunkt) handeln. Wobei als *notwendige Bedingung* für einen *Extrempunkt* eine *Nullstelle* der *Ableitung* $\exists f'(x_E) = 0$ gegeben sein muss, reicht dieses noch nicht aus um tatsächlich einen *Extrempunkt* zu identifizieren. Um einen *Extrempunkt* genaustens zu bestimmen und seinen Typ (*Maximum* oder *Minimum*) festlegen zu können, müssen die *Punkte* in der Umgebung der *Extremstellen* auf der *Ordinate* höher (*Minimum*) oder niedriger (*Maximum*) liegen:

$$\begin{aligned} f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Maximum} \quad , \\ f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Minimum} \quad , \end{aligned} \tag{6.41}$$

wobei dies als *hinreichende Bedingung* bezeichnet wird. Bei einigen speziellen *Funktion* wie zum Beispiel $f(x) = x^4$ verlieren die Kriterien der *hinreichenden Bedingung* ihre Aussage, da für diese und alle anderen speziellen Funktionen dieses Typs

$$f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) = 0 \tag{6.42}$$

gilt, und somit das *Verhalten* um diesen *Punkt* betrachtet werden muss. Nach der Untersuchung des *links-* und *rechtsseitigen Grenzwertes* eines direkt benachbarten Variablenwertes $x_E \pm \delta x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) > 0 \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Minimum} \quad , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) < 0 \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Maximum} \quad , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) < 0 \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kein } \textit{Extrempunkt} \quad , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) > 0 \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kein } \textit{Extrempunkt} \quad , \end{aligned} \tag{6.43}$$

kann dann bestimmt werden, ob es sich um einen *Extrempunkt* und gegebenfalls um welche Art es sich handelt. Dabei steht die *Extremstelle* x_E im Fokus der Untersuchungen, wobei der der *Extrempunkt* gegeben ist durch:

$$E\left(x_E \,|\, f\left(x_E\right)\right) \quad . \tag{6.44}$$

6.6.2 Monotonie

Das *Monotonieverhalten* beschreibt ob eine *Funktion* wachsend, fallend oder konstant ist. Ist eine *Funktion* für alle *Variablenwerte* des *Definitionsbereiches* $\mathbb{D}$ wachsend wird von einem *streng monoton steigendem Verhalten* gesprochen. Bei einer *Funktion*, die für alle *Variablenwerte* fallende *Funktionswerte* besitzt, wird dies als ein *streng monoton fallendes Verhalten* genannt. Weist eine *Funktion* in einem *Intervall* eine konstanten Bereich auf ist aber ansonsten *streng monoton steigend* oder *fallend* gilt die *Funktion* im Allgemeinen lediglich nur noch als *monoton steigend* oder *fallend*.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton steigend} \\ f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton fallend} \\ f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{monoton steigend} \\ f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{monoton fallend} \end{aligned} \tag{6.45}$$

Das *Monotonieverhalten* kann auch auf *Intervalle* angewendet werden, sodass zum Beispiel für die *Funktion* $f(x) = x^2$ folgende *Monotonien* festgestellt werden können:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \,]-\infty, 0\,[\;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton steigend} \\ f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \,]\,0, \infty\,[\;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton fallend} \end{aligned} \tag{6.46}$$

6.6.3 Satz von l'Hopital

Bei *gebrochen rationalen Funktion* kann das *Verhalten* meistens nur schwer direkt abgelesen werden, da die Gewichtung der einzelnen *Funktionsteile* im *Grenzwert* unbekannt sind. Um dennoch eine Aussage über einen *Grenzwert* einer *gebrochen rationalen Funktion* machen zu können, wird in der Regel der *Satz von l'Hopital* verwendet. Dieser *Satz* sagt aus, dass der *Grenzwert* der *gebrochen rationalen Funktion* gleich dem *Quotienten* des *Grenzwertes* der *Ableitung* des *Zählers* mit dem *Grenzwert* der *Ableitung* des *Nenners* ist.

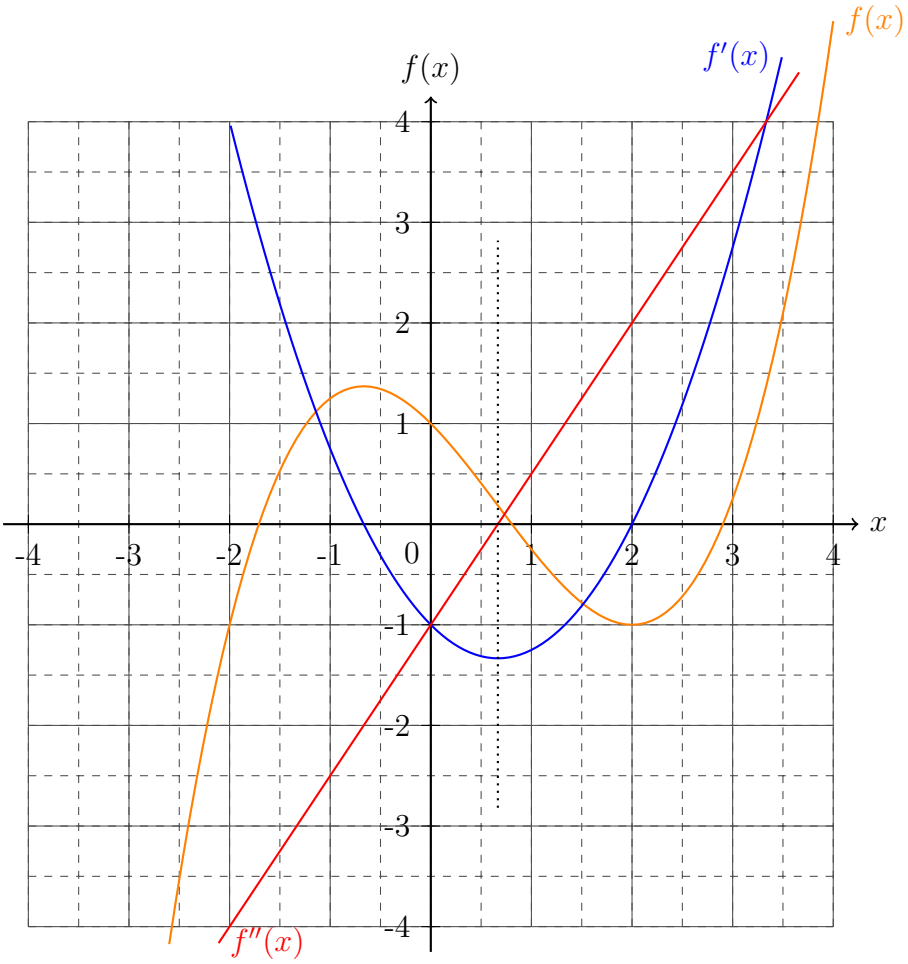
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} g'(x)}{\lim_{x \to x_0} h'(x)} \tag{6.47}$$

6.6.4 Wende- und Sattelpunkte

Bei *Funktionen* höherer *Ordnung* existieren noch weitere *Punkte* von besonderem Interesse. Um diese *Punkte* zu untersuchen wird wieder eine Beispielfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \;\; , \\ f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - x - 1 \;\; , \\ \Rightarrow S(d|e) &= S\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\right) \;\; , \\ f''(x) &= \frac{3}{2}x - 1 \;\; , \\ f'''(x) &= \frac{3}{2} \;\; . \end{aligned} \tag{6.48}$$

Diese *Funktionen* werden erneut durch ihren *Graphen* in einem *Koordinatensystem* veranschaulicht:



Deutlich an den *Graphen* wird, dass die *Variablenwerte* für den *Scheitelpunkt* der *Ableitung* und der *Nullstelle* der zweiten *Ableitung* mit dem *Variablenwert* der *Funktion* übereinstimmen, bei dem sich die Richtung der *Krümmung* der *Funktion* ändert. Der *Variablenwert* ist im *Koordinatensystem* durch die gepunktete Linie verdeutlicht. Dieser *Punkt* der *Funktion* wird *Wendepunkt* genannt. Für Wendestellen x_W gelten folgende Kriterien:

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \ , \\ f'''(x_W) &\neq 0. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Wenn allerdings die erste *Ableitung* für diesen *Variablenwert* x_W auch gleich Null ist, dann handelt es sich um einen sogenannten *Sattelpunkt*. Für einen *Sattelpunkt* gelten die folgenden Kriterien:

$$\begin{aligned} f'(x_S) &= 0 \ , \\ f''(x_S) &= 0 \ , \\ f'''(x_S) &\neq 0 \ . \end{aligned} \tag{6.50}$$

An *Wende*- wie auch *Sattelpunkten* ändert sich die *Krümmung* der *Funktion*. Das bedeutet, dass die *Steigung* vor einem *Wende*- oder *Sattelpunkt* abnimmt und nach ihm folglich zu nimmt und vice versa.

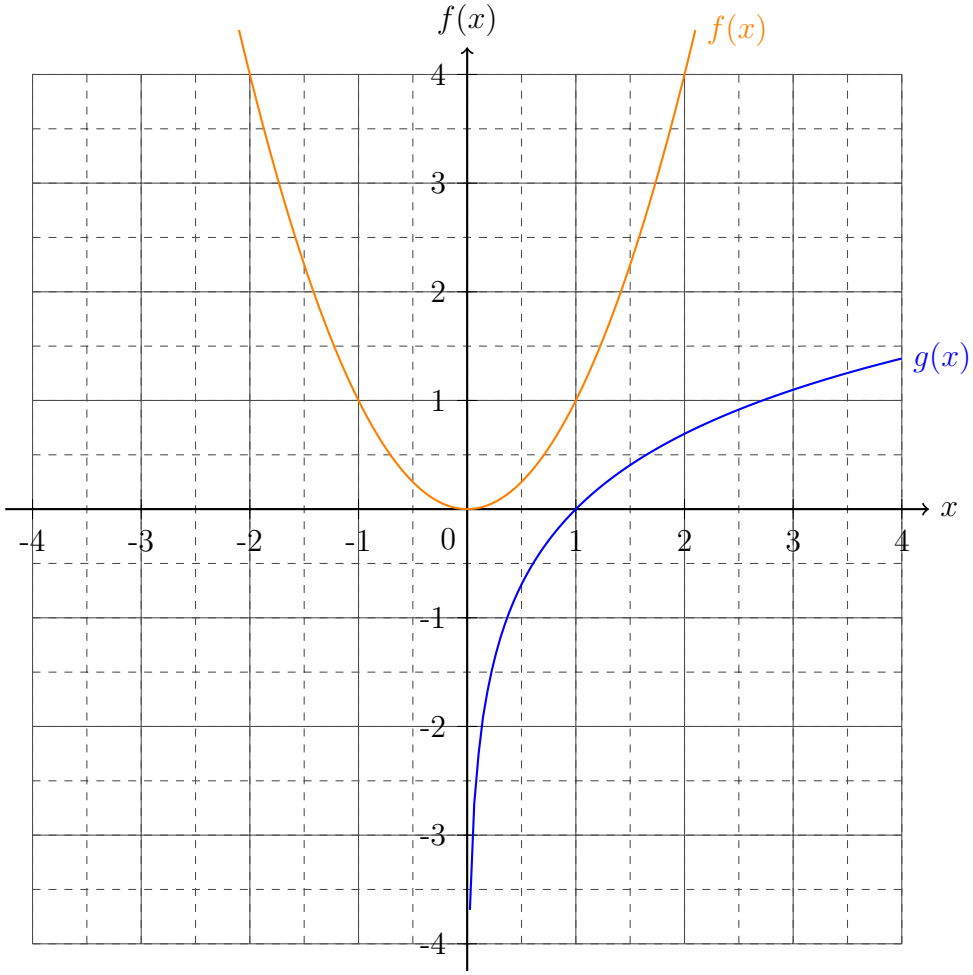
6.6.5 Konvexe und konkave Funktionen

Die Krümmung der Funktion kann entweder konkav oder konvex sein. So ist zum Beispiel die Normalparabel $f(x) = x^2$ eine konvexe Funktion für die gesamte Definitionsmenge. Für diese Eigenschaft muss folgendes Kriterium gelten:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2 \ . \tag{6.51}$$

Für eine konkave Funktion, wie zum Beispiel $g(x) = \ln(x)$, kann dieses Kriterium umgedreht werden:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2 \ . \tag{6.52}$$



Durch die *Graphen* der *Funktionen* wird deutlich, dass die *Steigung* einer *konkaven Funktion* immer weiter abnimmt und die *Steigung* einer *konvexen Funktion* immer weiter zunimmt. An einem *Wende-* oder *Sattelpunkt* wird folglich folgt auf ein *konkaves Intervall* ein *konvexes* und vice versa. Ergo sind die *Intervallgrenzen* für *konkave* oder *konvexe* Teilstücke der *Funktion* durch die *Wende-* und *Sattelpunkte* begrenzt.

6.6.6 Vollständige Kurvendiskussion

Eine vollständige Kurvendiskussion beinhaltet folgende Schritte:

1.	Definitions- und Wertemenge:	$\mathbb{D} = \{x \in\}$ und $\mathbb{W} = \{f(x) \in\}$
2.	Symmetrien:	Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$ oder Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$
3.	Verhalten:	$\lim_{x\to\infty} f(x) \ \wedge\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\wedge\ \lim_{x\searrow x_0\notin\mathbb{D}} f(x) \ \wedge\ \lim_{x\nearrow x_0\notin\mathbb{D}} f(x)$
4.	Polstellen:	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow h(x_P) \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow x_P =$ $\lim_{x\searrow x_P} f(x) \ \wedge\ \lim_{x\nearrow x_P} f(x)$
5.	Asymptoten:	Bestimme durch Polynomdivision die Teilfunktion an der sich die Funktion im Unendlichen annähert.
6.	Nullstellen:	$f(x_N) \overset{!}{=} 0$
7.	Extremstellen:	$f'(x_E) \overset{!}{=} 0 \ \wedge\ f''(x_E) < 0 \ \Rightarrow$ Minimum $f'(x_E) \overset{!}{=} 0 \ \wedge\ f''(x_E) > 0 \ \Rightarrow$ Maximum
8.	Wendestellen:	$f''(x_W) \overset{!}{=} 0 \ \wedge\ f'''(x_W) \neq 0$
9.	Sattelpunkte:	$f'(x_S) = 0 \ \wedge\ f''(x_S) \overset{!}{=} 0 \ \wedge\ f'''(x_S) \neq 0$

10.	Monotonie:	$f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; \Rightarrow$ *streng monoton steigend* $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; \Rightarrow$ *streng monoton fallend* $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; \Rightarrow$ *monoton steigend* $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; \Rightarrow$ *monoton fallend*
11.	Konvex oder konkav:	konvex: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2$ konkav: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2$
12.	Stammfunktion:	$\int f(x)dx = F(x)$
13.	Graph:	Erstelle eine Wertetabelle und übertrage die Punkte in ein Koordinatensystem und verbinde diese sinnerfassend.

6.6.7 Beispiel einer vollständige Kurvendiskussion

In diesem Beispiel wird eine *gebrochen rationale Funktion* angeführt, welche viele Eigenschaften beherbergt. Des Weiteren wurde eine solche *Funktion* als Beispiel ausgewählt, da hier mehrere Schwierigkeiten und Überlegungen einhergehen, welche in der Regel nicht in so komprimierter Form vorkommen. Die *Beispielfunktion* ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3x} \quad . \tag{6.53}$$

Am Anfang jeder *Kurvendiskussion* werden alle benötigten *Ableitungen* gebildet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 12x - 18}{2x^2(x-3)^2} \quad , \\ f''(x) &= \frac{3x^3 - 18x^2 + 54x - 54}{x^3(x-3)^3} \quad , \\ f'''(x) &= \frac{9\left(x^4 + 8x^3 - 36x^2 + 72x - 54\right)}{x^4(x-3)^4} \quad . \end{aligned} \tag{6.54}$$

Schritt 1: Bestimme die *Definitions-* und *Wertemenge*. Um die Bereiche zu berechnen, für die die *Funktion* nicht definiert ist muss der *Nenner* gleich Null gesetzt werden:

$$0 \stackrel{!}{=} x^2 - 3x = x(x-3) \;\; \Rightarrow x_{\notin \mathbb{D},1} = 0 \;\wedge\; x_{\notin \mathbb{D},2} = 3 \quad . \tag{6.55}$$

Da die *Funktion* im *Zähler* ein *Polynom ungerader Ordnung* besitzt, ergibt sich für die *Definitions-* und *Wertemenge*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0;3\}\} \quad , \\ \mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\} \quad . \end{aligned} \tag{6.56}$$

Schritt 2: Überprüfe nach *Symmetrien*. Um die *Symmetrien* einer *gebrochen rationalen Funktion* zu untersuchen, wird eine *Polynomdivision* durchgeführt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3\right) : \left(x^2 - 3x\right) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}x + 3}{x^2 - 3x} \quad . \end{aligned} \tag{6.57}$$

Durch die *Polynomdivision* wird deutlich, dass das *rationale Polynom* der *Funktion gerade* und *ungerade Potenzen* aufzeigt. Folglich besitzt die *Funktion* keine *Achsen-* oder *Punktsymmetrie*.

Schritt 3: Bestimme das *Verhalten* im *Unendlichen* und um die nicht definierten Bereiche. Um das *Verhalten* der *Funktion* zu verstehen, muss zunächst der *Grenzwert* des *gebrochen rationalen Terms* der *Funktion* nach der *Polynomdivision* verstanden werden.

$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{\frac{3}{2}x + 3}{x^2 - 3x} = -\frac{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2}}{\lim_{x\to\pm\infty} 2x - 3} = \pm 0 \quad . \tag{6.58}$$

In der Gleichung (6.58) wurde der *Satz von l'Hopital* angewendet, sodass sich zeigt, dass je nach Vorzeichen der *gebrochen rationale Term* der *Funktion* von unten beziehungsweise von oben gegen Null läuft. Somit ergeben sich folgende *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad , \\ &\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty \quad , \\ &\lim_{x\nearrow 3} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\searrow 3} f(x) = -\infty \quad . \end{aligned} \tag{6.59}$$

Schritt 4: Bestimmungen der *Polstellen* und ihrer Art. Aus Gleichung (6.59) zeigt sich, dass zwei *Polstellen mit Vorzeichenwechsel* existieren sie befinden sich bei:

$$x_{P_1} = 0 \ \wedge \ x_{P_2} = 3 \quad . \tag{6.60}$$

Schritt 5: Bestimme die *Asymptoten*, falls vorhanden. Um die *Asymptote* bestimmen zu können muss die *Funktion* nach der *Polynomdivision* aus Gleichung (6.57) betrachtet werden. Aus Gleichung (6.58) ist bekannt, dass der *gebrochen rationale Term* sich schnell der Null annähert, sodass dieser nur die Annäherungsrichtung an die *rationalen Terme* der *Funktion* beschreibt. Folglich ist die *Asymptote* gegeben durch:

$$A(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad . \tag{6.61}$$

Durch den *Grenzwert* aus Gleichung (6.58) ist ersichtlich, dass die *Asymptote* im negativen *Variablenwertebereich* von oben und im positiven *Variablenwertebereich* von unten angenähert wird.

Schritt 6: Bestimme die *Nullstellen*. Bei einer *gebrochen rationalen Funktion* ist bei der *Nullstellenbestimmung* der *Zähler* von Bedeutung. Somit gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3 \;\Rightarrow\; x_N \approx 4,321 \;\Rightarrow\; N(4,321|0) \;. \tag{6.62}$$

Gleichung (6.62) wurde hierbei mit einem programmierbaren Taschenrechner gelöst, welcher bei *Funktionen höherer Ordnung* herangezogen werden sollte, da durch die schriftlichen *iterativen Verfahren* zur Lösung der Gleichung ansonsten zu viel Zeit benötigt werden würde.

Schritt 7: Bestimme die *Extrempunkte* und ihre Art. Um die Extremwerte zu bestimmen muss die erste *Ableitung* $f'(x)$ aus Gleichung (6.54) gleich Null gesetzt werden. Da es sich um eine *gebrochen rationale Funktion* handelt muss wie schon bei der *Nullstelle* nur der *Zähler* berücksichtigt werden:

$$0 \stackrel{!}{=} x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 12x - 18 \;\Rightarrow\; x_{E_1} \approx -1,25166 \;\wedge\; x_{E_2} \approx 0,954537 \;. \tag{6.63}$$

Um die Art der *Extrempunkte* zu überprüfen, müssen die mit dem programmierbaren Taschenrechner bestimmten Werte aus Gleichung (6.63) in die zweite *Ableitung* $f''(x)$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} f''\left(x_{E_1}\right) &\approx -1,60937 \;\Rightarrow\; E_{max}\left(-1,25166|-1,60937\right) \;, \\ f''\left(x_{E_2}\right) &\approx 2,88384 \;\Rightarrow\; E_{min}\left(0,954537|2,88384\right) \;. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Schritt 8: Bestimme die *Wendepunkte*. Um die *Wendepunkte* zu bestimmen muss die zweite *Ableitung* $f''(x)$ gleich Null gesetzt werden. Wie schon bei den *Null-* und *Extremstellen* wird nur der *Zähler* betrachtet:

$$0 \stackrel{!}{=} 3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 \;\Rightarrow\; x_W \approx -8,3984 \;. \tag{6.65}$$

Der ermittelte *Wert* muss abschließend noch in die dritte *Ableitung* $f'''(x)$ eingesetzt werden:

$$f'''(x_W) \approx -0,000317 \neq 0 \;\;\Rightarrow \exists\; x_W \text{ als } \textit{Wendepunkt} \;. \tag{6.66}$$

Hierbei ist der *Wendepunkt* gegeben als:

$$W\left(-8,3984|-4,59897\right) \;. \tag{6.67}$$

Schritt 9: Überprüfe, ob ein *Wendepunkt* ein *Sattelpunkt* ist. Der berechnete *Variablenwert* des *Wendepunkts* x_W wird in die erste *Ableitung* $f'(x)$ eingesetzt.

$$f'(x_W) = 1,01013 \neq 0 \tag{6.68}$$

Wie aus Gleichung (6.68) ersichtlich wird, ist der *Wendepunkt* kein *Sattelpunkt*.

Schritt 10: Untersuche die *Funktion* in *Intervallen* nach ihrer *Monotonie*. Die *Monotonie* wird durch *Sattel-* und *Extrempunkte* sowie *Polstellen* beeinflusst. Folglich können an ihnen die *Grenzen* der *Intervalle* festgemacht werden:

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \; \forall x \in \,]-\infty, x_{E_{max}}[\qquad \text{streng monoton steigend} \;\; , \\
&f'(x) < 0 \; \forall x \in \,]x_{E_{max}}, 0[\qquad \text{streng monoton fallend} \;\; , \\
&f'(x) < 0 \; \forall x \in \,]0, x_{E_{min}}[\qquad \text{streng monoton fallend} \;\; , \\
&f'(x) > 0 \; \forall x \in \,]x_{E_{min}}, 3[\qquad \text{streng monoton steigend} \;\; , \\
&f'(x) > 0 \; \forall x \in \,]3, \infty[\qquad \text{streng monoton steigend} \;\; .
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Schritt 11: Untersuche die *Funktion* in *Intervallen* ob sie *konvex* oder *konkav* ist. Eine *Funktion* kann ihre *konkave* oder *konvexe* Eigenschaft nur an *Polstellen* und *Wendepunkten* wechseln, sodass die *Intervallgrenzen* durch diese *Punkte* gegeben sind:

$$\begin{aligned}
&]-\infty, x_W[\qquad \text{konvex} \;\; , \\
&]x_W, 0[\qquad \text{konkav} \;\; , \\
&]0, 3[\qquad \text{konvex} \;\; , \\
&]3, \infty[\qquad \text{konvex} \;\; .
\end{aligned} \tag{6.70}$$

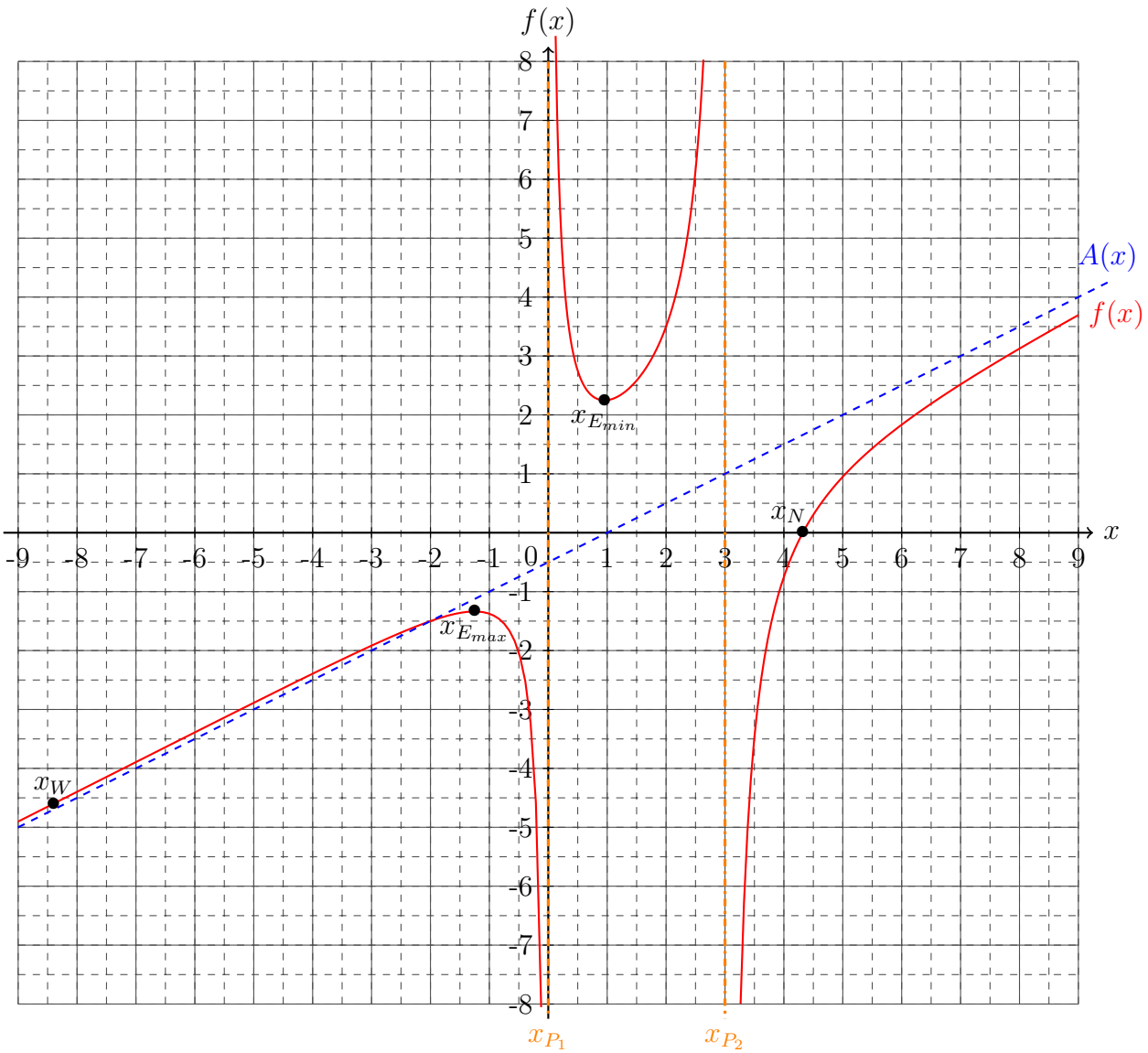
Durch die Untersuchung der *Grenzwerte* kann dies untermauert werden, da sich gegen $-\infty$ die *Funktion* von oben an die *Asymptote* $A(x)$ annähert aber allerdings bei der *Polstelle* $x_P = 0$ gegen $-\infty$ rennt, muss die *Funktion* vorm *Wendepunkt konvex* sein. Ähnliche Argumentationen lassen sich auch für die anderen *Intervalle* anstellen.

Schritt 12: Bilde die *Stammfunktion* $F(x)$ der Funktion $f(x)$. Dazu wird das *unbestimmte Integral* der *Funktion* gebildet:

$$\int f(x)dx = F(x) = \frac{1}{4}\left((x-2)x - 10\ln(3-x) + 4\ln x\right) + c \;\; , \tag{6.71}$$

wobei die die *Funktion* in aus Gleichung (6.57) durch *Faktorisierung* des *Nenners* und einer weiteren *Polynomdivision* noch weiter umgeformt wurde, sodass die *Nenner* leicht durch die *Integration* in einen *Logarithmus* überführt werden konnten.

Schritt 13: Zeichne den *Graphen* der *Funktion*. Hierfür werden zunächst alle ermittelten *Punkte* und zusätzliche Informationen in das *Koordinatensystem* eingefügt um dann noch fehlende Bereiche mit *Punkten* aus einer *Wertetabelle* zu bestimmen.



Eine *vollständige Kurvendiskussion* beansprucht viel Zeit und viele Kombinationen des bereits erlernten Wissens über die *Analysis* und *Algebra*. Dennoch ist eine *Kurvendiskussion* unabdingbar, wenn ein Sachverhalt in der Wirtschaft, der Naturwissenschaften oder anderen Bereichen genaustens beleuchtet werden muss.

Ableitungen und Stammfunktionen von wichtigen Funktionen können im Anhang (16.6) gefunden werden.

6.6.8 Übungsaufgaben zur Kurvendiskussion

Aufgabe 1: *Berechne die Extrempunkte (mit hinreichender und notwendiger Bedingung).*

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$

c) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{13}{17}$

e) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

f) $f(x) = x^3 - 5x - 10$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2$

h) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 9x$

i) $f(x) = (x-1)e^x$

j) $f(x) = x^2 e^x$

k) $f(x) = (x-2)e^{x^2}$

l) $f(x) = (3x-2)e^{\frac{1}{2}x}$

m) $f(x) = (2x^2 - x - 4)e^{\frac{1}{4}x}$

n) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) e^{\pi x^2}$

Aufgabe 2: *Berechne die Wendepunkte (mit hinreichender und notwendiger Bedingung) und überprüfe ob diese Sattelpunkte sind.*

a) *b)*

Aufgabe 3: *Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.*

a) $f(x) = 2xe^{-x}$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 6,25}{x + 2,5}e^x$

d) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$

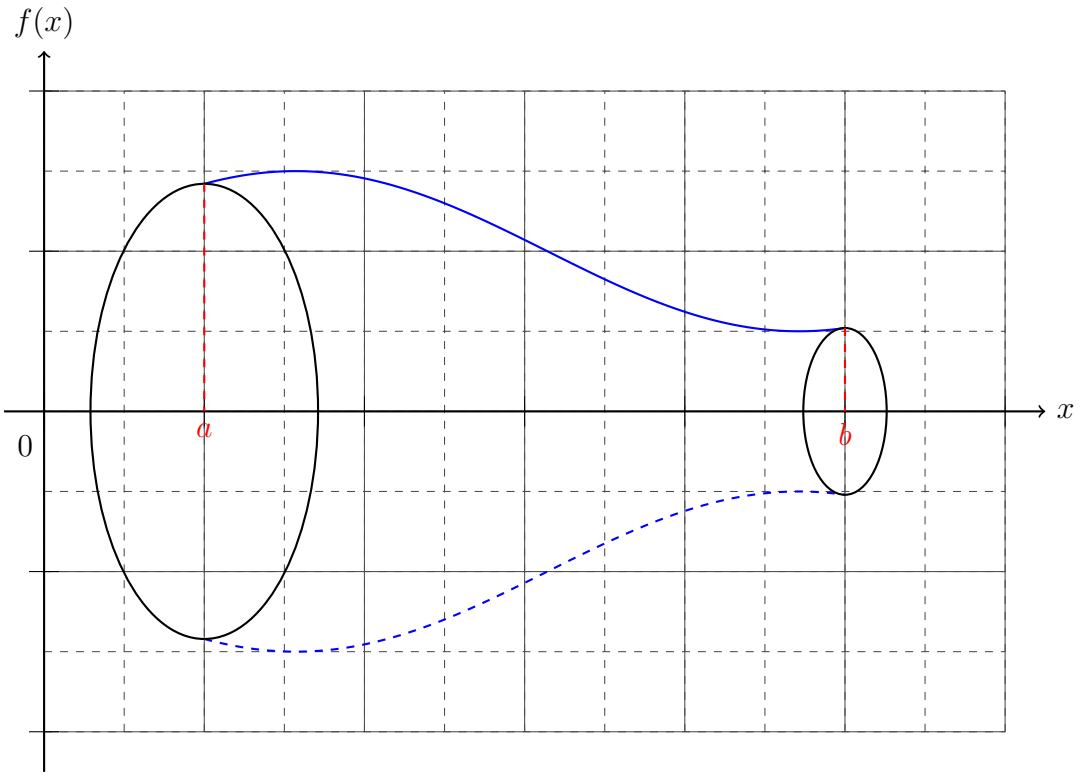
e) $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{4}x - 2}$

f) $f(x) = x^4 - 3$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.50) Lösungen zur Kurvendiskussion.

6.7 Rotationskörper

Mit dem *Integral* ist es nicht nur möglich eingeschlossene *Flächeninhalte* zu bestimmen, sondern auch von dreidimensionalen Körpern, welche entstehen, wenn die eingeschlossene *Fläche* um eine Achse rotiert wird. Diese *Rotationskörper* können benutzt werden, um das *Volumen* und die *Oberfläche* von Objekten wie zum Beispiel Vasen zu bestimmen.



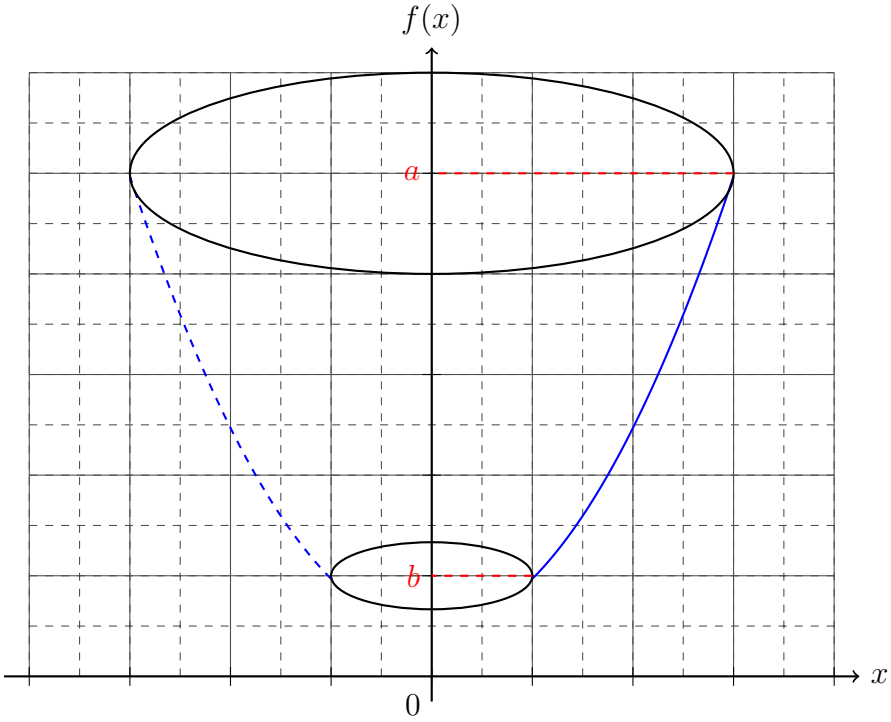
Für das *Volumen* ergibt sich, wie aus der *Geometrie* bekannt, *Grundfläche* mal *Höhe*, wobei über alle möglichen *Höhen* im *Intervall integriert* wird

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad , \tag{6.72}$$

und für die *Mantelfläche*

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx \quad . \tag{6.73}$$

Für die *Rotation* um die *Ordinate*



ergibt sich

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad . \tag{6.74}$$

Genauere *Herleitungen* dieser *Gleichungen* werden in einer späteren Version des Buches folgen.

6.7.1 Übungsaufgaben zu den Rotationskörpern

Aufgabe 1: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Abszisse in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Ordinate in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Aufgabe 3: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Abszisse in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Aufgabe 4: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Ordinate in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Aufgabe 5: *Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers um die Abszisse in den angebenen Grenzen.*

a) *b)*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.51) Lösungen zu den Rotationskörpern.

6.8 Gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben

Aufgabe 1: *Die gesuchte Funktion schneidet die Abszisse bei einem Variablenwert von* $x = 2$ *und ist ein Polynom zweiter Ordnung. Außerdem besitzt die Funktion ein Maximum bei* $E_{max}(1|3)$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 2: *Die gesuchte Funktion dritten Grades besitzt einen Sattelpunkt bei* $S\left(1\left|\frac{1}{2}\right.\right)$ *und schneidet die Abszisse bei* $x = -\frac{1}{4}$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

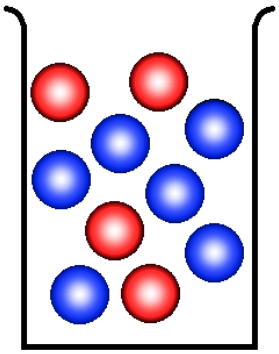
Aufgabe 3: *Die gesuchte Exponentialfunktion verdoppelt ihren Funktionswert nach einer Veränderung des Variablenwertes um ein Drittel. Außerdem schneidet die Funktion die Ordinate beim Wert* -1. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 4: *Die gesuchte Funktion vierten Grades berührt die Abszisse bei den Werten* $x_1 = 0,25$ *und* $x_2 = -1,75$ *und besitzt zum Variablenwert* $x = 1$ *den Funktionswert* $f(1) = 5$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

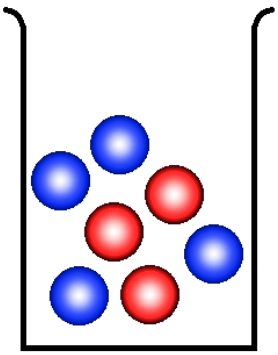
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.52) Lösungen zu den gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben.

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

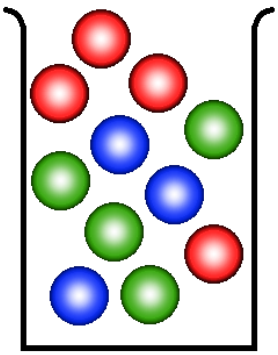
Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* basiert darauf, dass die Ergebnisse in *Verhältnissen* (2 : 3 „Zwei zu Drei“) oder in *Prozentwerten* 25% angeben werden. Beide dieser Angabearten basieren auf der *Bruchrechnung*. Folglich kann aus den *Verhältnissen* der *Prozentwert* bestimmt werden, da es sich um einen *Bruch* in einer Schreibweise mit dem *Divisionsoperator* handelt.
Nahezu alle einfachen *Wahrscheinlichkeitsprobleme* können auf Ziehungen von Kugeln mit einer Farbe aus einem Behältnis übersetzt werden. Dabei gibt der *Nenner* des *Bruches*, der die *Wahrscheinlichkeit* beschreibt, die Gesamtanzahl der Kugeln an, während der *Zähler* die Anzahl der betrachteten Farbe der Kugeln angibt.



rot: $\frac{4}{10} = 40\%$
blau: $\frac{6}{10} = 60\%$

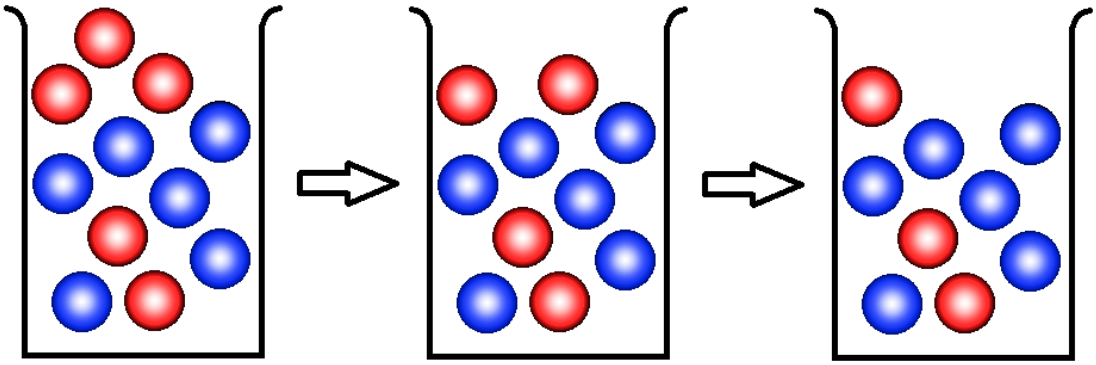


rot: $\frac{3}{7} \approx 42,86\%$
blau: $\frac{4}{7} \approx 57,14\%$



rot: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$
blau: $\frac{3}{11} = 27,\overline{27}\%$
grün: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$

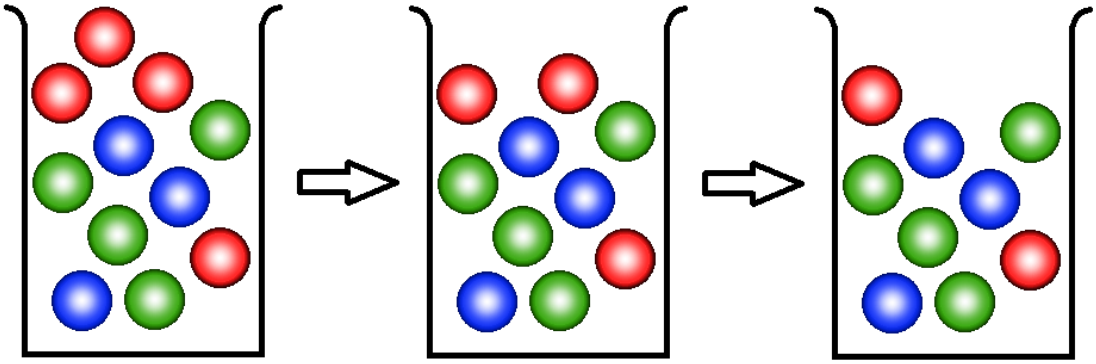
Wenn nun Ziehungen aneinander gereiht werden und die *Wahrscheinlichkeit* für jeden einzelnen Zug bestimmt werden soll, dann muss zunächst geklärt werden, ob die gezogene Kugel wieder zurück gelegt wird oder eben nicht. Wenn es sich um eine Ziehung mit Zurücklegen (ZmZ) handelt, dann ist die jeweilige *Wahrscheinlichkeit* der Farbarten der Kugeln konstant. Wenn allerdings die Kugel nicht zurück gelegt wird, dann reduziert sich die Gesamtanzahl der Kugeln - der *Nenner* - und die Anzahl der Kugeln mit der Farbe, welche gezogen wurde, um eins. Während die Kugelanzahlen - der jeweilige *Zähler* - *konstant* bleiben.



rot: $\frac{5}{11} = 45,\overline{45}\%$ rot: $\frac{4}{10} = 40\%$ rot: $\frac{3}{9} = 33,\overline{3}\%$

blau: $\frac{6}{11} = 54,\overline{54}\%$ blau: $\frac{6}{10} = 60\%$ blau: $\frac{6}{9} = 66,\overline{6}\%$

Dabei macht es keinen Unterschied, ob zwei, drei, vier oder mehr Farben vorhanden sind.



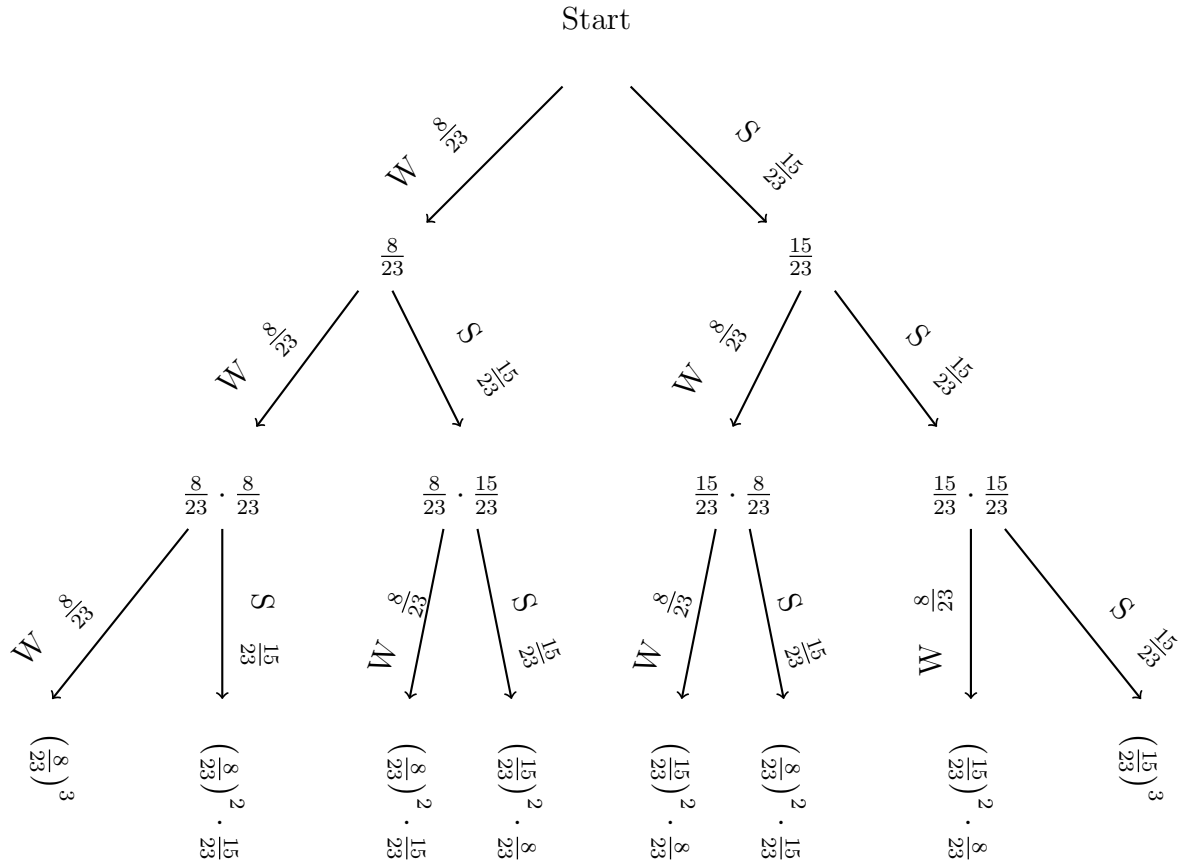
rot: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$ rot: $\frac{3}{10} = 30\%$ rot: $\frac{2}{9} = 22,\overline{2}\%$

blau: $\frac{3}{11} = 27,\overline{27}\%$ blau: $\frac{3}{10} = 30\%$ blau: $\frac{3}{9} = 33,\overline{3}\%$

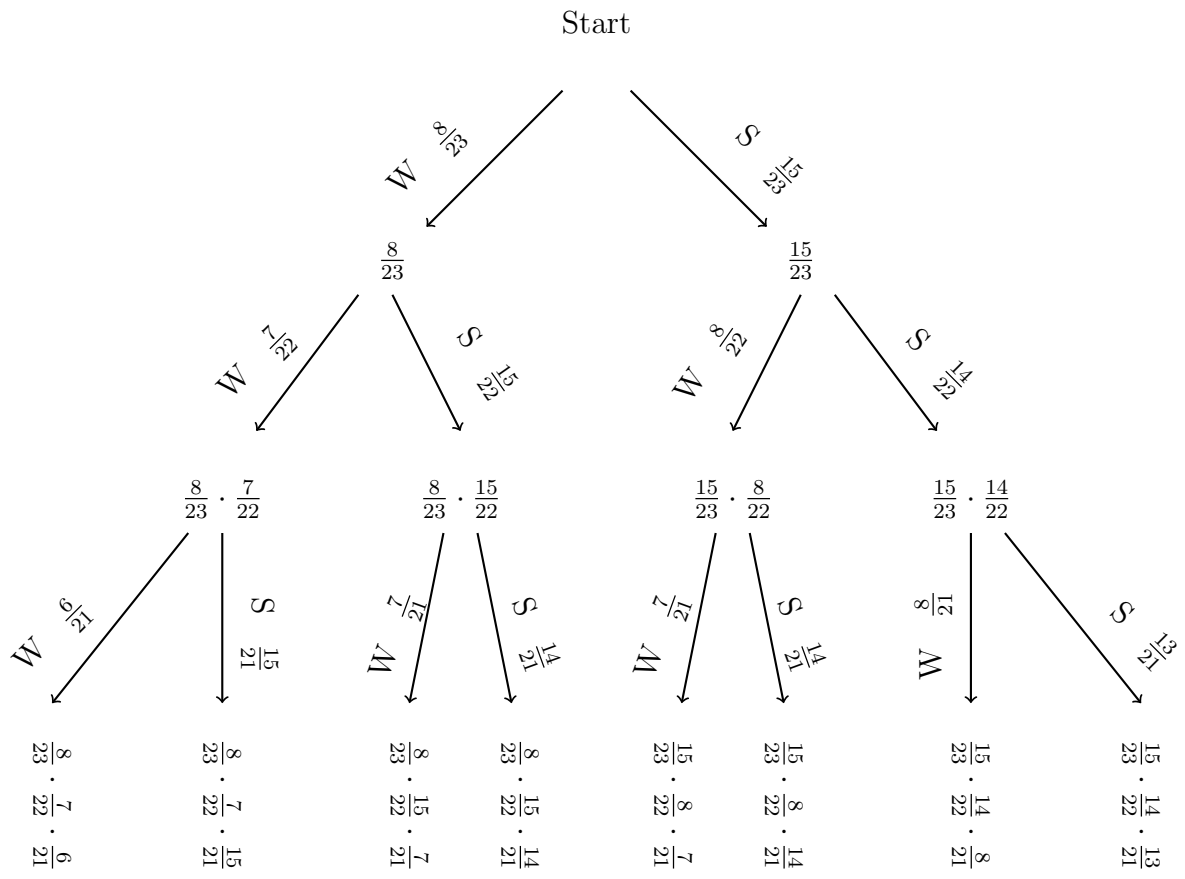
grün: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$ grün: $\frac{4}{10} = 40\%$ grün: $\frac{4}{9} = 44,\overline{4}\%$

Sei im weiteren ein Gefäß gegeben in dem sich 8 weiße und 15 schwarze Kugeln befinden. Aus diesem Gefäß soll dreimal eine Kugel gezogen und anschließend wieder zurückgelegt werden. Wie hoch ist die *Wahrscheinlichkeit* für jede mögliche Reihenfolge der Ziehungen? Diese Frage lässt sich schnell durch ein sogenanntes *Baumdiagramm* beantworten. Dabei wird von einem Startwert, also 100% ausgegangen und dann die erste Ziehung vollführt. Anschließend wird von

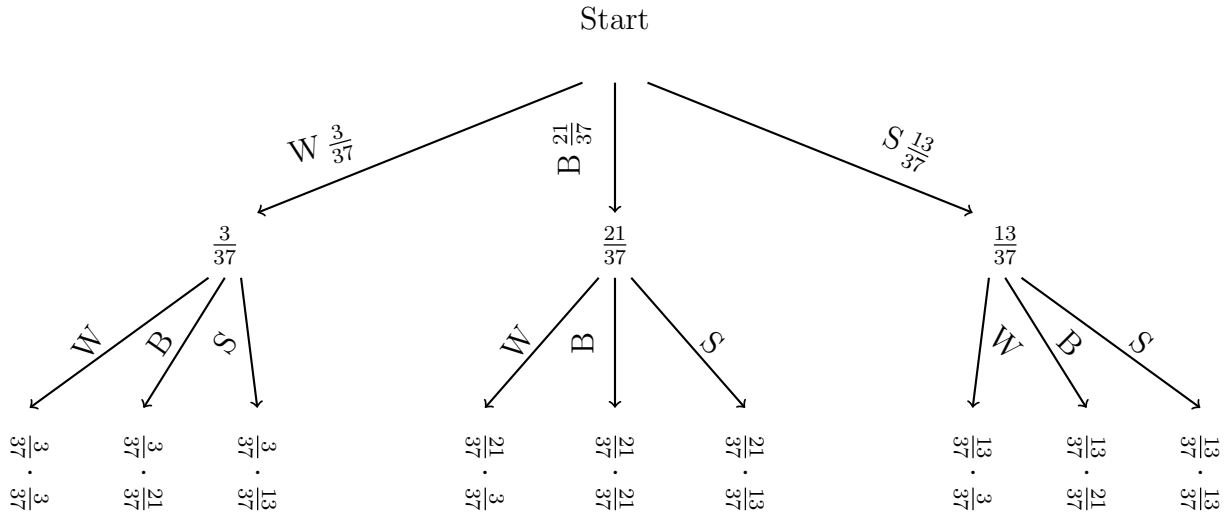
den neuen Startwerten ($100\% \cdot \frac{8}{23}$ und $100\% \cdot \frac{15}{23}$) erneut gezogen. Die Zugwahrscheinlichkeit wird dann mit dem vorangegangenen Startwert *multipliziert*. Da die *Summe* aller möglichen Einzelwahrscheinlichkeit wieder 100% ergeben muss, lassen sich die Zwischenwahrscheinlichkeiten bei aneinander gereihten Ziehungen leicht durch *Addition* überprüfen.



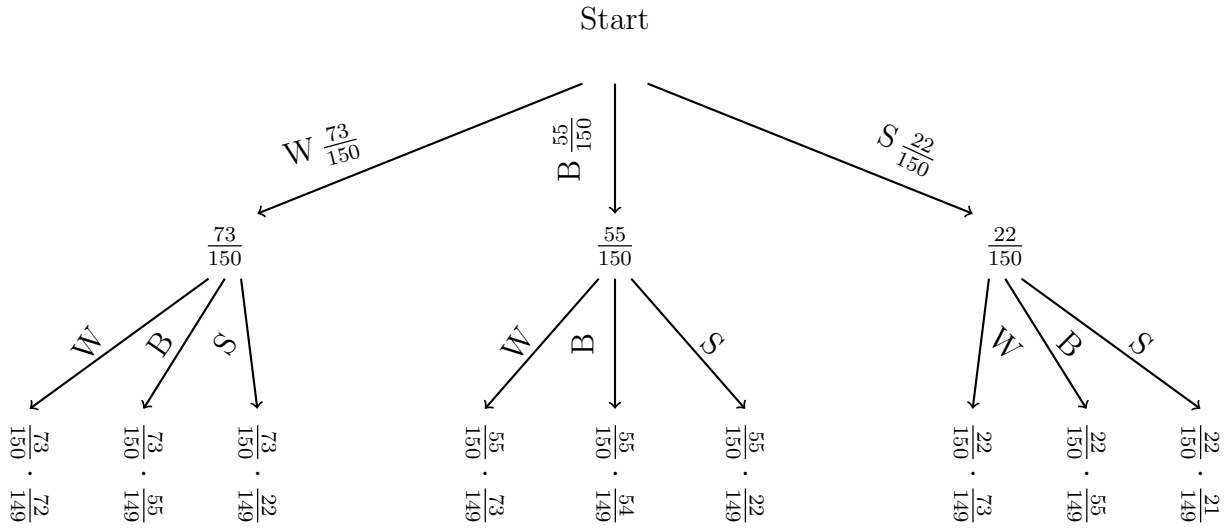
Das *Baumdiagramm* zeigt, wie sich so eine Ziehung fortsetzt und liefert die Endwahrscheinlichkeiten für jeden *Pfad*. Oftmals ist die Reihenfolge in der die Kugeln gezogen werden von keiner Bedeutung, sodass alle Pfade mit der gewünschten Anzahl der jeweiligen Kugeln *zusammenaddiert* werden müssen. Bei Ziehungen mit Zurücklegen muss lediglich die Anzahl der *Pfade* mit der Endwahrscheinlichkeit *multipliziert* werden.
Im nächsten Beispiel wird die gezogene Kugel nicht zurückgelegt. Bei einer Ziehung ohne Zurücklegen (ZoZ) reduziert sich bei jedem Schritt die Gesamtanzahl der Kugeln und je nach *Pfad* die Anzahl der Kugeln der zuvor gezogenen Farbe.



Es wird schon deutlich, dass für Ziehungen ohne Zurücklegen der *Nenner* durch einen *Bruch* von *Fakultäten* ausgedrückt werden kann. Für Ziehungen mit mehr Farben ändert sich dieses Verfahren lediglich nur durch die Anzahl der *Pfade* $\sum P$, welche stets durch die Anzahl der Farben F hoch der Ziehungen N gegeben ist. Seien zum Beispiel in einem Gefäß 13 schwarze, 3 weiße und 21 blaue Kugeln gegeben und nach irgendeinem Pfad nach zwei Ziehungen mit Zurücklegen gefragt, so ergibt sich das folgende *Baumdiagramm*.



Sei allerdings ein Gefäß mit 22 schwarzen, 73 weißen und 55 blauen Kugeln gegeben und nach irgendeinem *Pfad* nach zwei Ziehungen ohne Zurücklegen gefragt, so ergibt sich wiederum das folgende *Baumdiagramm*.



Im Wesentlichen können vier Grundfragen an eine *Wahrscheinlichkeitsrechnung* mit Baumdiagramm gestellt werden. Dabei geht es vorrangig im die Anzahl # von Kugeln einer bestimmten Farbe n_F. Dabei beschreibt die Raute # den mathematischen Begriff Anzahl, während n die gewünschte Anzahl und F die gewünschte Farbe ist. In diesen Grundfragen verbergen sich Schlüsselwörter oder deren sprachlichen Synonyme, welche mathematisch übersetzt werden müssen.

$$\begin{aligned} \text{höchstens:} \quad & \# \leq n_F \\ \text{weniger als:} \quad & \# < n_F \\ \text{mehr als:} \quad & \# > n_F \\ \text{mindestens:} \quad & \# \geq n_F \end{aligned} \tag{7.1}$$

Sei nach mindestens zwei blauen Kugeln gefragt, so ergibt sich auf das letzte Beispiel bezogen als *Wahrscheinlichkeit* der *Pfad* der zwei oder mehr blaue Kugeln zulässt: $\frac{55}{150} \cdot \frac{54}{149}$.

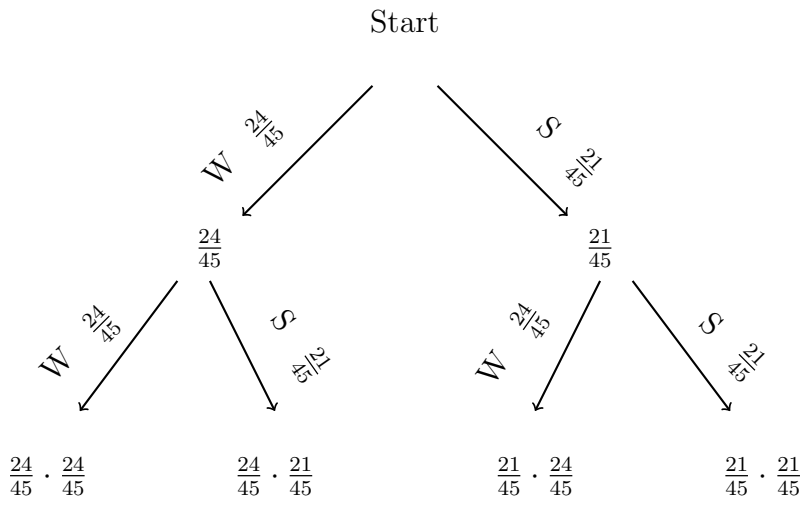
Baumdiagramme sind notwendig, um ein Verständnis für *Wahrscheinlichkeiten* aufzubauen. Im späteren Verlauf werden dann noch Systeme vorgestellt bei denen *Baumdiagramme* sich zeitlich nicht mehr lohnen würden, da die Zahl der Ziehungen gegen *Unendlich* laufen wird.

7.0.1 Übungsaufgaben zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1: *Beantworte die Fragen zum gezeigten Baumdiagramm.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze und weiße Kugeln.

a) Wie viele schwarze Kugeln befinden sich im Gefäß?
b) Wie viele Kugeln befinden sich insgesamt im Gefäß?
c) Um was für eine Ziehung handelt es sich?
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zu erst eine weiße dann eine schwarze Kugel zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nur eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine dritte weiße Kugel zu ziehen, wenn zuvor zwei weiße Kugeln gezogen wurden?
h) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn zuvor jeweils eine Kugel gezogen wurde?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?
j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

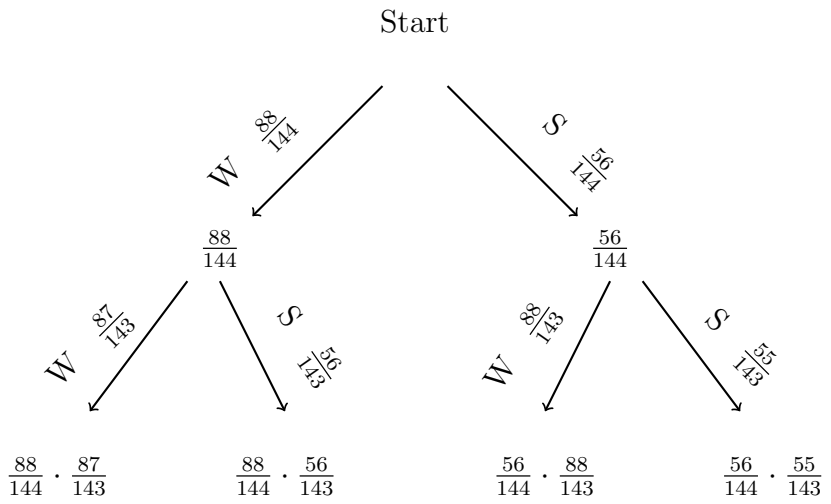


Aufgabe 2: *Beantworte die Fragen zum gezeigten Baumdiagramm.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze und weiße Kugeln.

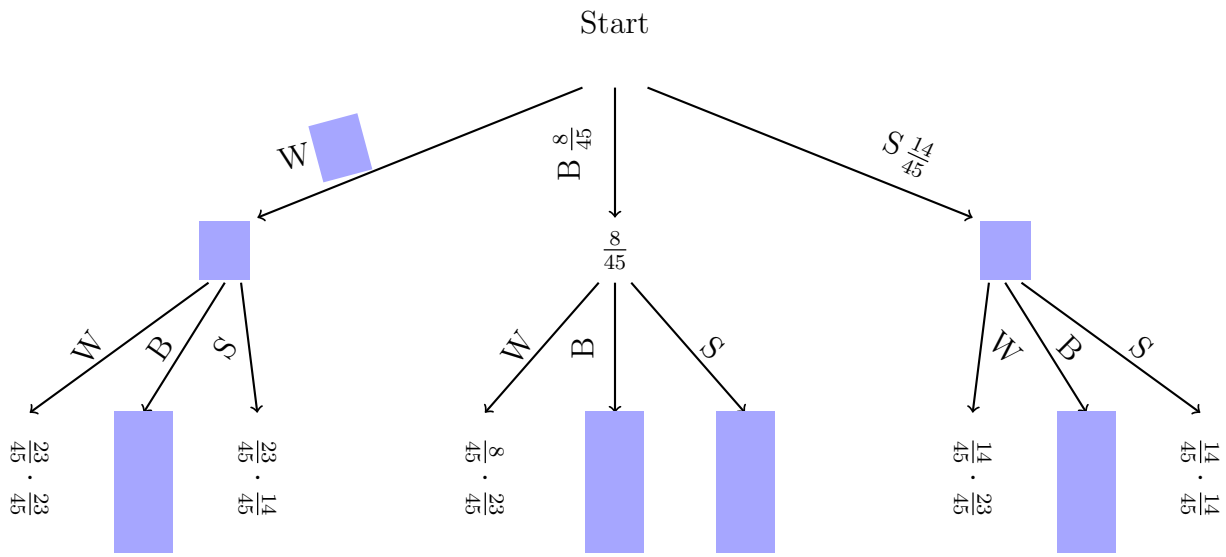
a) Wie viele weiße Kugeln befinden sich im Gefäß?
b) Wie viele Kugeln befinden sich insgesamt im Gefäß?
c) Um was für eine Ziehung handelt es sich?

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zu erst eine weiße dann eine schwarze Kugel zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nur eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine dritte weiße Kugel zu ziehen, wenn zuvor zwei weiße Kugeln gezogen wurden?
h) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn zuvor jeweils eine Kugel gezogen wurde?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?
j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mehr als zwei weiße Kugel zu ziehen?



Aufgabe 3: *Ergänze Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze (S), blaue (B) und weiße (W) Kugeln.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine blaue Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei Kugeln mit gleicher Farbe zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarz Kugel zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höhstens zwei blaue Kugeln zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?



Aufgabe 4: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 6 schwarze und 14 weiße Kugeln für drei Ziehungen mit Zurücklegen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 5: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 11 schwarze und 15 weiße Kugeln für drei Ziehungen ohne Zurücklegen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 6: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 5 schwarze (S), 7 grüne (G) und 11 weiße (W) Kugeln für zwei Ziehungen mit Zurücklegen.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine grüne Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine grüne Kugel zu ziehen?
e) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit jede Kugel einmal zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen jede Kugel einmal zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen erst eine schwarze, dann eine grüne und dann eine weiße Kugel zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination GGS zu ziehen?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

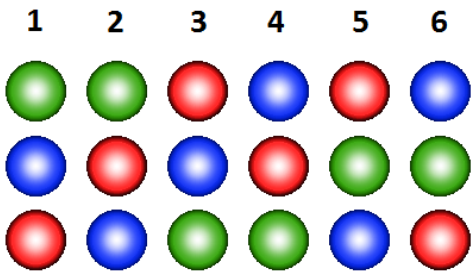
Aufgabe 7: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 8 rote (R), 3 grüne (G) und 12 blaue (B) Kugeln für zwei Ziehungen ohne Zurücklegen.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit erst bei der ersten Ziehung eine blaue Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit eine Farbe zweimal zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen mindestens zwei blaue Kugeln zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen mehr als eine rote Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen weniger als zwei grüne Kugeln zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen höchstens zwei rote Kugel zu ziehen?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination GBB zu ziehen?
j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination BGB zu ziehen?

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.53) Lösungen zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

7.1 Permutationen

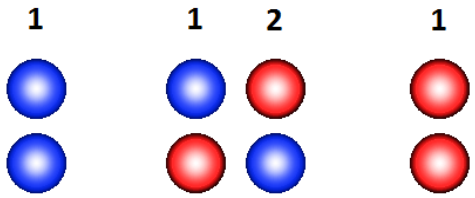
Permutationen P sind unterschiedliche Anordnungen von den gleichen Komponenten. So können drei verschiedene Kugeln auf sechs verschiedene Arten angeordnet werden.



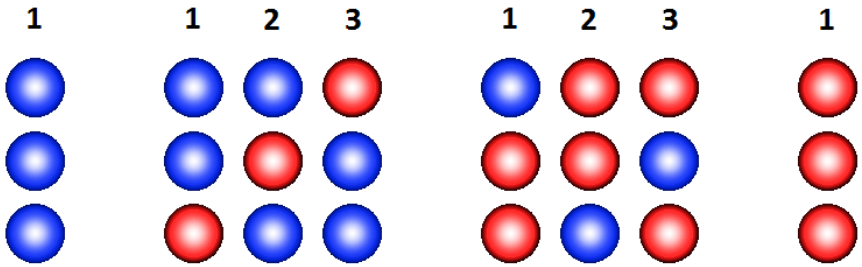
So können vier verschiedene Kugeln auf vierundzwanzig Arten angeordnet werden. Wenn zwei Kugeln die gleiche Farbe besitzen und eine dritte Kugel eine andere Farbe hat, können diese auf drei verschiedene Arten angeordnet werden. Somit ergibt sich folgendes Gesetz:

$$\#P = \frac{\#K!}{\#F_1!\#F_2!...\#F_N!} = \frac{\#K!}{\prod_{i=1}^{N} \#F_i} \quad , \tag{7.2}$$

wobei die Anzahl der *Permutationen* $\#P$ gegeben ist durch die *Fakultät* der Anzahl aller Kugeln $\#K$ *dividiert* durch das *Produkt* der Anzahl der jeweiligen farbigen Kugeln $\#F_1$. Dabei gibt der *Index* die Farbe an und N die gesamte Anzahl aller Farben.
So können alle *Pfade* von *Baumdiagrammen* durch *Permutationen* dargestellt werden. Für zwei Ziehungen mit Zurücklegen mit zwei Farben ergibt sich:



Für drei Ziehungen mit Zurücklegen für zwei Farben ergeben sich folgende Kombinationsmöglichkeiten:



Die jeweiligen *Permutationsmöglichkeiten* sind bei den *Baumdiagrammen* gegeben durch die *Binomialkoeffzienten*, welche schon aus dem ersten Kapitel bekannt sind. So kann bei zwei Farben die Anzahl der *Pfade* darüber bestimmt werden, indem das *Pascal'sche Dreieck* betrachtet

wird. Für mehr Farben ergeben sich auch mehr mögliche *Permutationen*. Die verschiedenen *Permutationen* für die jeweiligen *Pfade* bei mehreren Farben können über die *Reihe*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)^{Z} \quad , \tag{7.3}$$

wobei Z der Anzahl der Ziehungen entspricht.

7.1.1 Übungsaufgaben zu Permutationen

Aufgabe 1: *Schreibe alle möglichen Anordnungen ohne Wiederholungen auf.*

$a)$ $\{1, 2, 3\}$	$b)$ $\{R, R, B\}$
$c)$ $\{G, B, B, B\}$	$d)$ $\{R, R, B, B\}$
$e)$ $\{R, R, G, B\}$	$f)$ $\{R, R, G, G, G\}$

Aufgabe 2: *Bestimme die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen.*

$a)$ $\{1, 2, 3, 4\}$	$b)$ $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$c)$ $\{R, R, B, B, G\}$	$d)$ $\{R, R, R, R, G\}$
$e)$ $\{A, B, C, D, E, E\}$	$f)$ $\{a, b, b, b, c, c, d, d, d, d\}$

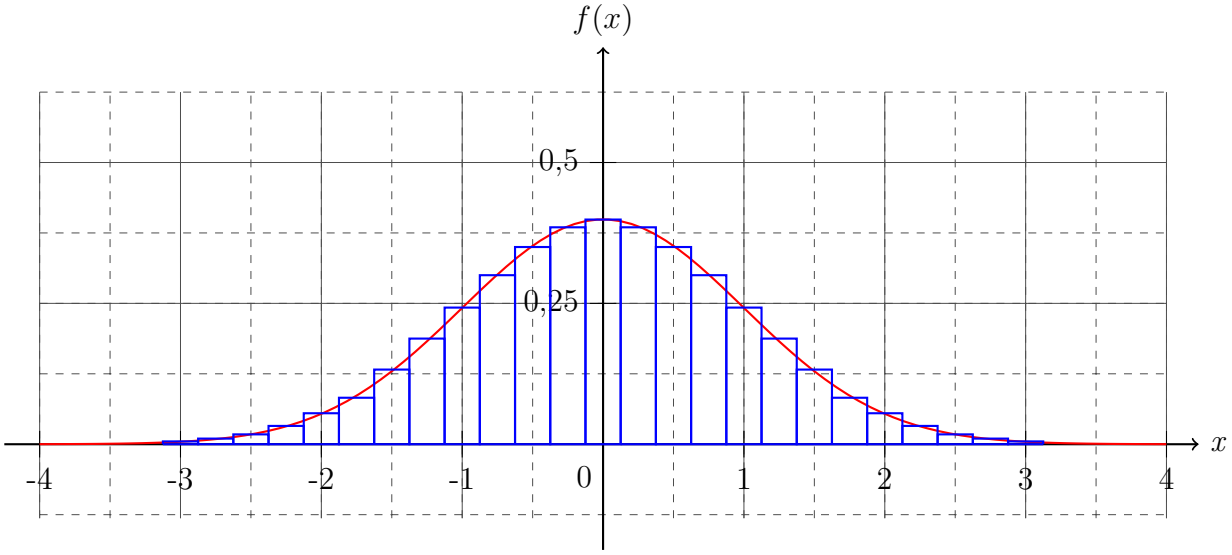
Aufgabe 3: *Bestimme die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholungen.*

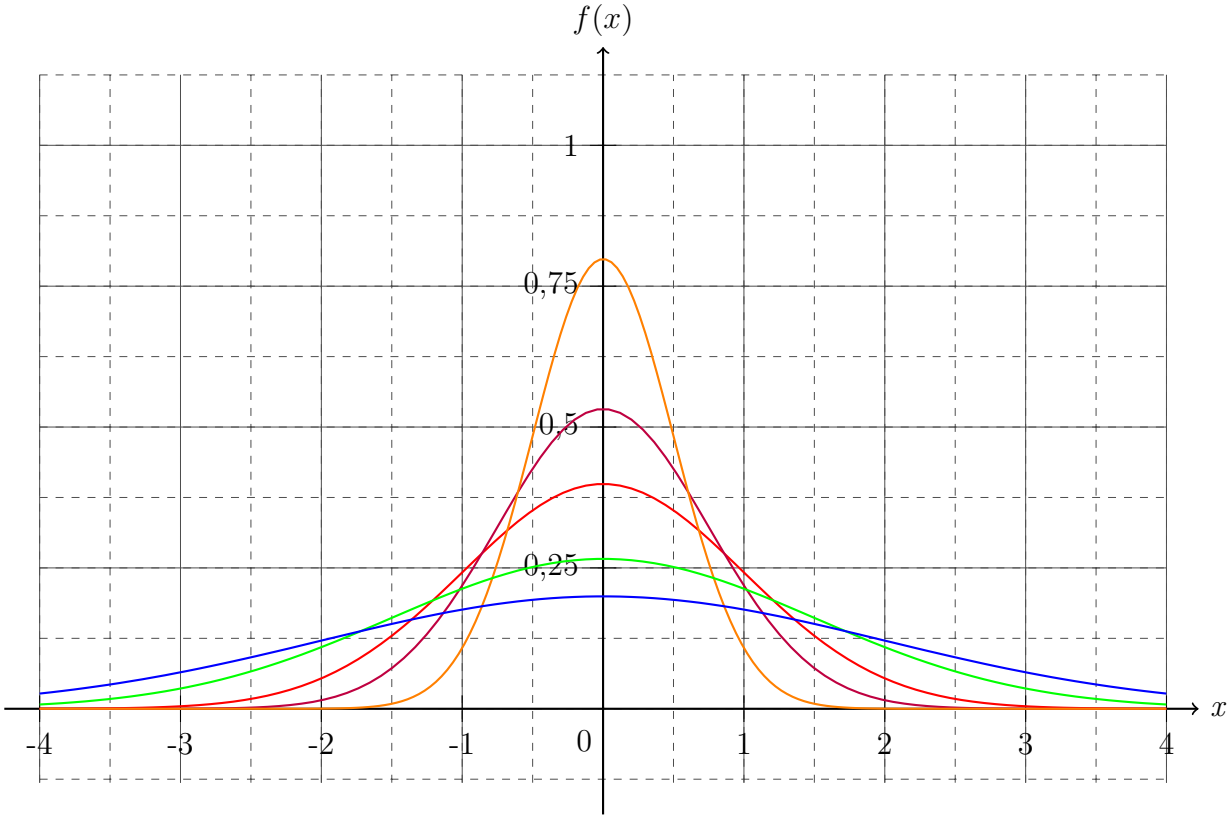
$a)$ $\{1, 2, 3, 4\}$	$b)$ $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$c)$ $\{R, R, B, B, G\}$	$d)$ $\{R, R, R, R, G\}$
$e)$ $\{A, B, C, D, E, E\}$	$f)$ $\{a, b, b, b, c, c, d, d, d, d\}$

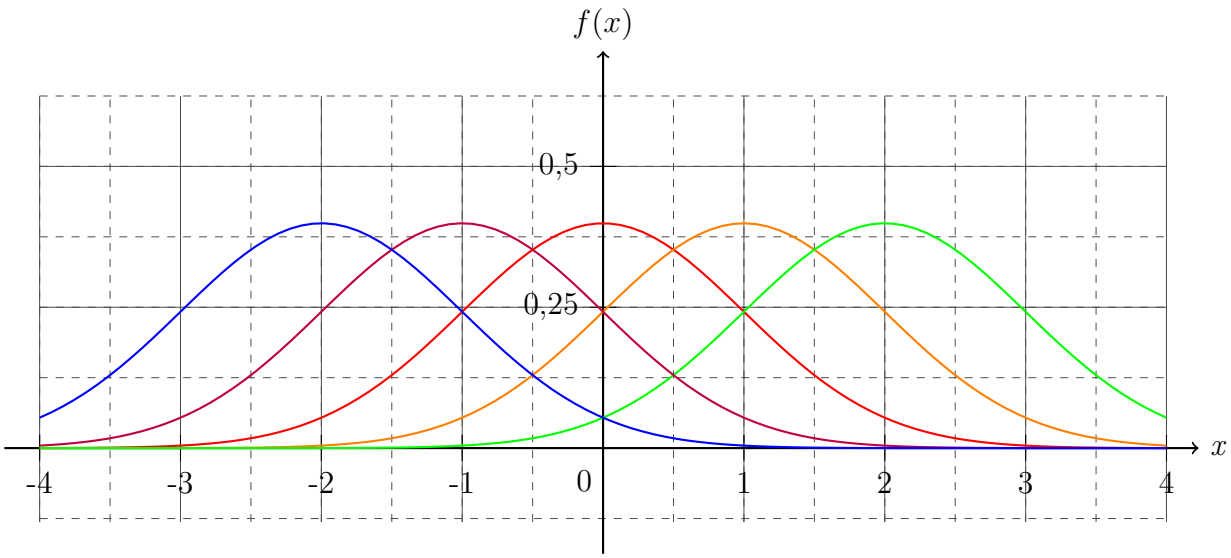
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.54) Lösungen zu Permutationen.

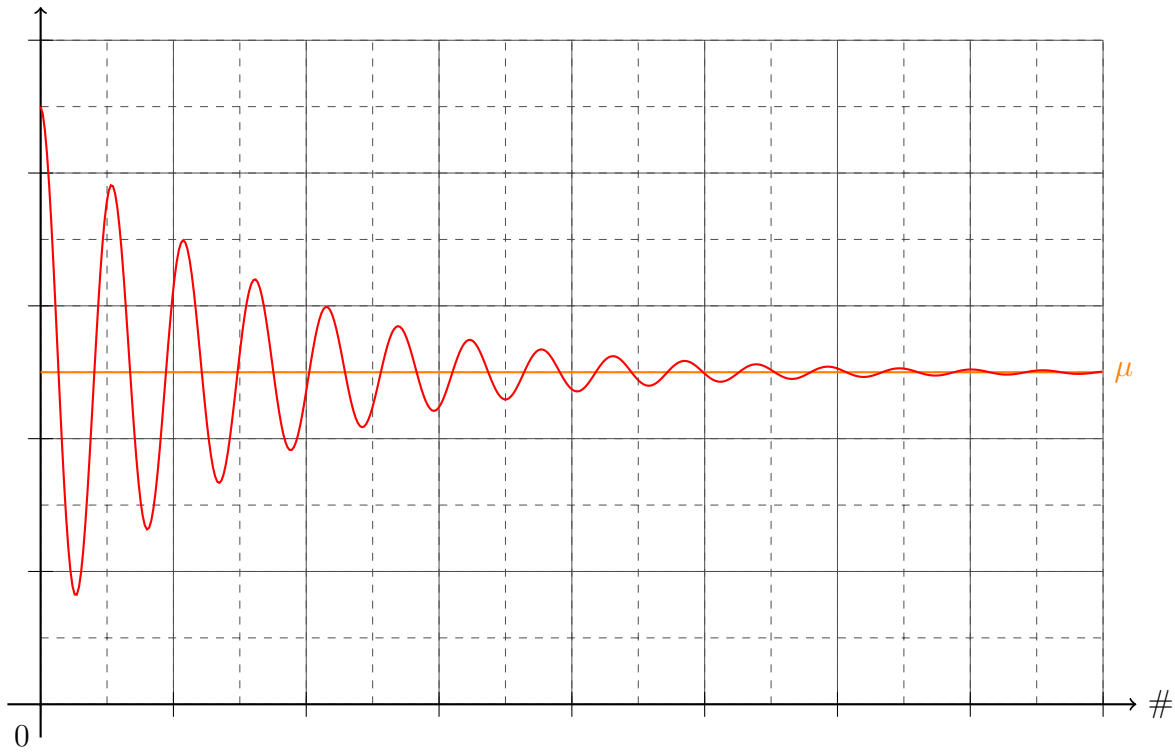
7.2 Verteilungen

Die Binomial-Verteilung Die Gauß-Verteilung (Normalverteilung) Die Poisson-Verteilung Breit-Wigner-Verteilung / Lorentz-Cauchy-Verteilung Lévy-Verteilung Gamma-Verteilung Chi-Quadrat-Verteilung






$f(x)$
0,5
0,25
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


μ
#
0

7.2.1 Übungsaufgaben zu Verteilungen

Aufgabe 1: .

$a)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.55) Lösungen zu Permutationen.

8 Vektoren

Ein Vektor ist eine Abkürzung um, die beim Übergang von zweidimensionalen zu dreidimensionalen Koordinatensystemen sich erhöhende Informationsmenge pro Punkt, in einer allgemeinen Schreibweise zu untersuchen. Da später noch mehr Dimensionen hinzu kommen können und da der Koordinatenursprung beliebig ist, lohnt es sich eine Abkürzung einzuführen.
Ein Vektor ist eine Richtungsangabe mit einer bestimmten Länge,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \tag{8.1}$$

wobei die Schreibweise $\vec{x}$ signalisiert, dass die Größe x eine Richtung hat und somit eine vektorielle Größe ist. Diese Größe hat im Beispiel der Gleichung (8.1) drei Dimensionen, was durch die drei Parameter a, b und c in den Klammern zu erkennen ist. Dabei zeigt der Vektor a-Schritte in die ersten Dimension (nach einer Konvention wird diese oft x genannt), b-Schritte in die zweite Dimension (nach einer Konvention wird diese oft y genannt) und c-Schritte in die dritte Dimension (nach einer Konvention wird diese oft z genannt). Neben der oben beschriebenen Schreibweise, existiert noch eine weitere, welche je nach Aufgabenart ebenso häufig verwendet wird:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z \\ &= a\hat{e}_x + b\hat{e}_y + c\hat{e}_z \\ &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \quad , \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dabei ist zu sehen, dass die Bezeichnung $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ eingeführt wurde, denn diese Schreibweise lässt sich problemlos um weitere Dimensionen erweitern. Dabei ist der sogenannte Einheitsvektor $\hat{e}_1$ wie folgt zu verstehen:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{8.3}$$

Die Gleichung (8.2) zeigt auch schon wie die Addition und die Subtraktion von Vektoren zu verstehen ist:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \\
\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \quad ,
\end{aligned} \tag{8.4}$$

wobei die jeweiligen Dimensionen aufaddiert werden. Auch wird deutlich, dass die Parameter a, b und c anders zu behandeln sind. Somit wird von nun an zwischen Skalaren und Vektoren unterschieden. Dabei sind die Rechenarten, welche in den Kapiteln zuvor vorgestellt wurden, für Skalare gültig. In den folgenden Abschnitten werden mehr Rechenregeln für die Vektoren vorgestellt.

Ein Skalar, welcher mit ein einem Vektor multipliziert wird, wirkt dabei auf jede Dimension:

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \quad , \tag{8.5}$$

Dabei ist die vektorielle Schreibweise wie ein Gleichungssystem zu verstehen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = a + \lambda p \\ y = b + \lambda q \\ z = c + \lambda r \end{cases}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Da man in einigen weiterführenden Büchern anderen Schreibweisen von Vektoren begegnen und es deswegen oftmals zu Verwirrungen kommen kann, sind die verschiedenen Schreibweisen hier aufgeführt. In diesem Buch wird die am weitesten verbreitete Schreibweise mit dem Pfeil verwendet.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \boldsymbol{a} \\
&= \underline{a} \\
&= \mathfrak{a}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Im folgenden werden mehr Eigenschaften der Vektoren vorgestellt.

8.0.1 Übungsaufgaben zur Vektoraddition

Aufgabe 1: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$a)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$b)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$c)\ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$d)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} =$

$e)\ 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$f)\ 2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$g)\ 6\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$h)\ 8\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$i)\ 1,2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4,5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$j)\ 0,25\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$k)\ \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$l)\ \frac{5}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$

Aufgabe 2: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$a)\ (3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3) + (2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) =$

$b)\ (4\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) + (3\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 7\hat{e}_3) =$

$c)\ 7\,(-6\hat{e}_1 + 1\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3) + 4\,(-2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3) =$

$d)\ 2\,(7\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 7\hat{e}_3) - 3\,(5\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) =$

$e)\ 3,2\,(-2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) + 1,5\,(-5\hat{e}_1 + 6\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) =$

$f)\ 6,1\,(\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3) + 0,7\,(3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3) =$

$g)\ \frac{1}{2}\,(8\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 1\hat{e}_3) + \frac{7}{3}\,(4\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3) =$

$h)\ \frac{5}{4}\,(2\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 - 5\hat{e}_3) - \frac{5}{7}\,(9\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3) =$

$i)\ \frac{6}{5}\,(-5\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3) - \frac{1}{6}\,(-3\hat{e}_1 + 6\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) =$

$j)\ \frac{8}{9}\,(3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3) + \frac{7}{10}\,(-2\hat{e}_1 - 9\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) =$

Aufgabe 3: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$a)\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$b)\quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} =$

$c)\quad 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$d)\quad 6\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$

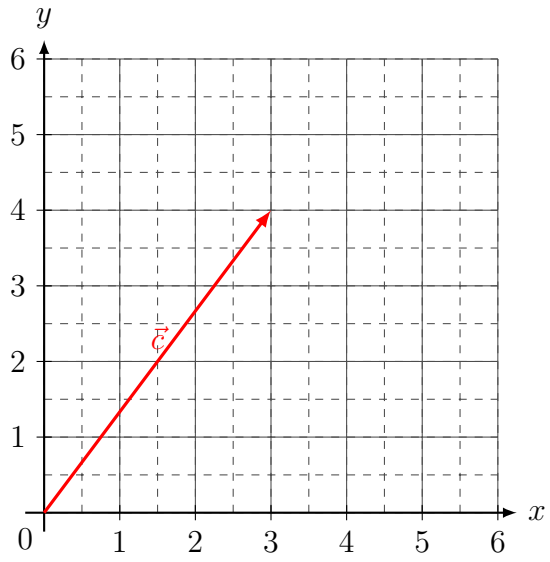
$e)\quad 1,2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4,5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,25\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$f)\quad \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.56) Lösungen zu Vektoraddition.

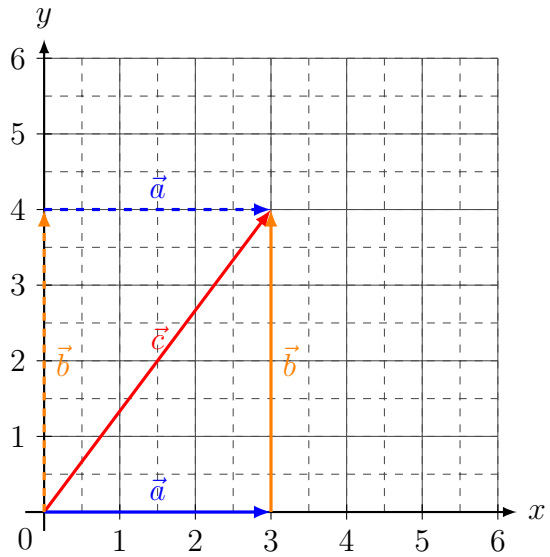
8.1 Länge von Vektoren

Wie bereits beschrieben sind Vektoren Richtungsangaben in mehrdimensionalen Räumen. Um die Eigenschaften eines Vektors zu veranschaulichen, wird ein zweidimensionales Koordinatensystem mit den Dimensionen x und y verwendet. Zunächst soll ein Vektor veranschaulicht werden:



Dabei wurde der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dargestellt. Durch die andere Schreibweise, wird die Addition nochmal verdeutlicht und anschließend veranschaulicht:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$



Dabei ist schon zu erkennen, dass die Vektoraddition kommutativ ist.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{8.9}$$

Die Länge des Vektors kann über die euklidische Norm $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ bestimmt werden, welche der Betragsschreibweise $|x| = \sqrt{x^2}$ ähnelt.

$$\begin{aligned} d = \left|\vec{d}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{3\hat{e}_1 \cdot 3\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 \cdot 0\hat{e}_2} \\ &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Wie zu sehen ist die Berechnung der Vektorlänge vergleichbar mit dem Satz des Pythagoras zu vergleichen, so ergibt sich für drei Dimensionen

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \tag{8.11}$$

Lediglich muss beachtet werden, dass $\hat{e}_n \cdot \hat{e}_n = 1$ ist und dass die jeweiligen Einträge der Vektoren mit sich selbst, wie in Gleichung (8.10) gezeigt, multipliziert aufaddiert werden.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \\ \Rightarrow |\vec{r}| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Die Einheitsvektoren $\hat{e}$ werden auch normierte Vektoren genannt, da ihre Länge genau 1 beträgt. Sie lassen sich wie folgt berechnen:

$$\hat{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} \quad . \tag{8.13}$$

8.1.1 Übungsaufgaben zur Vektornorm

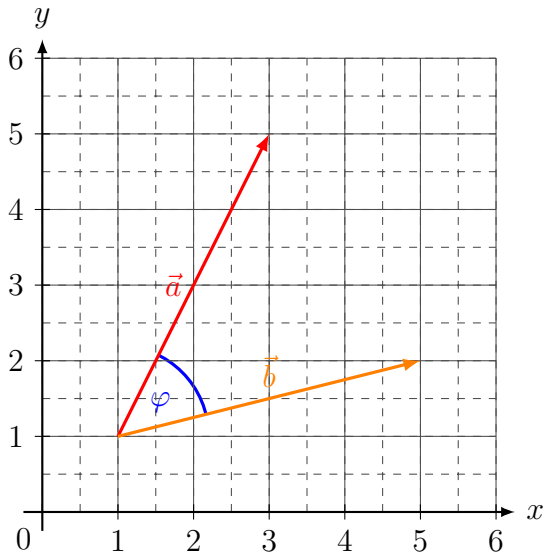
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.57) Lösungen zu Vektornorm.

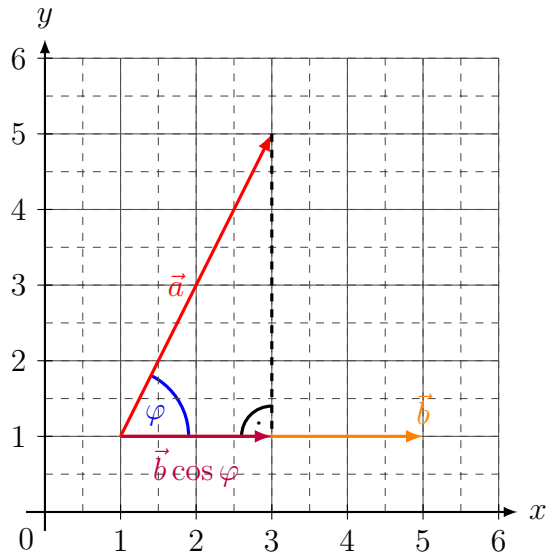
8.2 Skalarprodukt

Wie schon bei der Addition von Vektoren aus Gleichung (8.4) werden die jeweiligen Einträge der Vektoren miteinander verrechnet. Dabei kommt es beim Produkt von zwei Vektoren zu einer Besonderheit, denn dieses bildet ein Skalar, sodass alle vektoriellen Eigenschaften verloren gehen. Aus diesem Grund wird dieses Produkt auch Skalarprodukt genannt. Der Grund für die Bildung des Skalars wurde im vorhergehenden Abschnitt über die Länge eines Vektors schon erwähnt und soll im Folgenden weiter untersucht werden. Hierbei wird der Winkel zwischen den Vektoren $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \varphi$ eine Rolle spielen, da der Winkel zwischen den Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem $\hat{e}_n$ stets 90° beträgt, was wiederum nicht für die Winkel zwischen Vektoren gelten muss.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= |a||b|\cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\\ &= |a||b|\cos\varphi\end{aligned} \tag{8.14}$$

Die beiden letzteren Zeilen der Gleichung (8.14) werden deutlich, wenn es zu einer graphischen Veranschaulichung kommt:





In der linken Veranschaulichung ist die Ausgangssituation zu sehen, während in der rechten Darstellung unter der Verwendung von trigonometrischen Beziehungen deutlich wird, dass das Skalarprodukt ein rechtwinkliges Dreieck erzeugt - es wird von einer orthogonalen Projektion gesprochen. Dabei fallen insbesondere drei Spezialfälle auf:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |a||b|\cos 90^\circ = 0 \quad \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |a||b|\cos 0^\circ = |a||b| \quad \Rightarrow \vec{a}||\vec{b}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |a||b|\cos 180^\circ = -|a||b| \quad \Rightarrow \vec{a}||\vec{b}\ ,\end{aligned} \tag{8.15}$$

wobei durch die Orthogonalität der ersten Zeile die axiomatische Rechnung aus dem vorherigen Abschnitt $\hat{e}_n\cdot\hat{e}_n = 0$ (für kartesische Koordinatensysteme) untermauert werden kann. Im zweiten und dritten Spezialfall kann eine Parallelität festgestellt werden, wobei im zweiten Fall die Richtungen der Vektoren übereinstimmen, während im dritten Fall die Richtungen der

Vektoren entgegengesetzt zu einander sind. Im dritten Fall wird davon gesprochen, dass die Vektoren antiparallel zu einander sind.

Das Skalarprodukt zwischen drei Vektoren hängt von der Reihenfolge ab, was wiederum bedeutet, dass das Skalarprodukt zwischen Vektoren nicht assoziativ ist. Das Skalarprodukt ist allerdings kommutativ.

$$\begin{gathered} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \neq \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \end{gathered} \tag{8.16}$$

Da in anderen weiterführenden Mathematikbüchern andere Schreibweisen des Skalarproduktes vorgefunden werden können, werden diese hier kurz vorgestellt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \circ \vec{b} \quad \text{sehr unüblich} \\ &= \vec{a} \bullet \vec{b} \quad \text{selten} \\ &= \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \quad \text{sehr häufig} \end{aligned} \tag{8.17}$$

Die letztere Schreibweise ist die am häufigsten verwendete in der höheren Mathematik, allerdings soll in diesem Buch, wie auch in der Schule, die Verbindung zur Multiplikation aufrecht erhalten werden, sodass die bereits eingeführte Schreibweise beibehalten wird. Anders als bei der Multiplikation von Skalaren kann bei der Vektorrechnung der Skalarproduktoperator $\cdot$ nicht weggelassen werden.

8.2.1 Übungsaufgaben zum Skalarprodukt

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.58) Lösungen zum Skalarprodukt.

8.3 Matrizen und Tensoren

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

$$\mathbb{1}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{1}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

8.3.1 Determinante und Spur

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$
$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{8.20}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{8.21}$$

Regel von Sarrus: Matrix nach unten oder rechts um 2 einträge erweitern ... links oben nach rechts unten addierten, rechts oben nach links unten subtrahieren.

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{8.22}$$

$$\operatorname{spur}(A) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{8.23}$$

8.3.2 Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} \tag{8.25}$$

8.3.3 Transponierte Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T \\ (A^T)^T &= A \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ \mathrm{tr}(A^T) &= \mathrm{tr}(A) \\ \det(A^T) &= \det(A) \end{aligned} \tag{8.27}$$

8.3.4 Inverse Matrix

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} \\ \left(A^{-1}\right)^{-1} &= A \\ (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (\lambda A)^{-1} &= \lambda^{-1} A^{-1} \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \\ (A^{-1})^\dagger &= (A^\dagger)^{-1} \\ \det\left(A^{-1}\right) &= (\det A)^{-1} \end{aligned} \tag{8.28}$$

8.3.5 Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} \tag{8.29}$$

8.3.6 Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3) ist.} \\ -1 & \text{, falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist.} \\ 0 & \text{, falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \tag{8.30}$$

8.3.7 Übungsaufgaben zu Matrizen und Tensoren

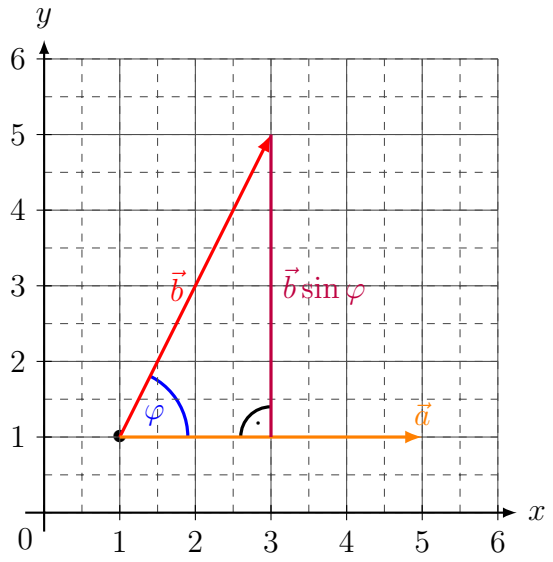
Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.59) Lösungen zu Matrizen und Tensoren.

8.4 Kreuz- und Spatprodukt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \det \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & x & a \\ \hat{e}_2 & y & b \\ \hat{e}_3 & z & c \end{vmatrix} \\ &= yc\hat{e}_1 + xc\hat{e}_2 + xb\hat{e}_3 - zb\hat{e}_1 - za\hat{e}_2 - ya\hat{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} yc - zb \\ xc - za \\ xb - ya \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8.31}$$



$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \tag{8.32}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c} \\ \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 &\Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 &\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c} \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \lambda\vec{a} &= 0 \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}\right) &= \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \mu\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \end{aligned} \tag{8.34}$$

Jacobi-Identität:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \tag{8.35}$$

Graßmann-Identität:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{8.36}$$

Lagrange-Identität:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \\
\Rightarrow \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\varphi \\
\Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Spat

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \tag{8.38}$$

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \tag{8.39}$$

8.4.1 Übungsaufgaben zum Kreuz- und Spatprodukt

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.60) Lösungen zum Kreuz- und Spatprodukt.

8.5 Vektorielle Geraden

$$\vec{f} = \vec{b} + \mu\vec{x} \tag{8.40}$$

$$1 = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} \tag{8.41}$$

$$\left(\vec{f} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} \tag{8.42}$$

windschief usw.

8.5.1 Übungsaufgaben zu vektoriellen Geraden

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.61) Lösungen zu vektoriellen Geraden.

8.6 Vektorielle Ebenen

$$\vec{E} = \vec{b} + \mu\vec{x} + \nu\vec{y} \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned} &E : 3x + y = 2z \\ &E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y = 2z\right\} \end{aligned} \tag{8.44}$$

$$1 = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} \tag{8.45}$$

$$\left(\vec{f} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} \tag{8.46}$$

8.6.1 Übungsaufgaben zu vektoriellen Ebenen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.62) Lösungen zu vektoriellen Ebenen.

8.7 Vektorielle Geometrie

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \tag{8.47}$$

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \tag{8.48}$$

8.7.1 Übungsaufgaben zur vektoriellen Geometrie

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.63) Lösungen zur vektoriellen Geometrie.

8.8 Gemischte Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.64) Lösungen zu den gemischten Aufgaben zu Vektoren.

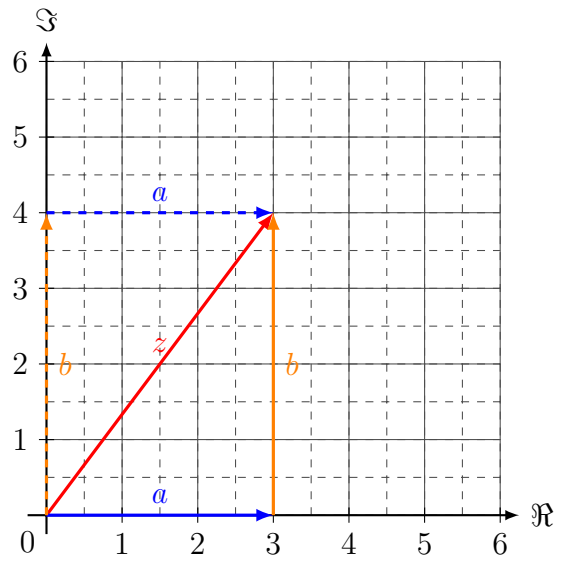
9 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die letzte Erweiterung der allgemeinen Zahlenmengen. Dabei wird die Zahl $i = \sqrt{-1}$ eingeführt. Durch die Verbindung mit der Wurzelfunktion wird schon eine periodische Eigenschaft der neuen Zahl deutlich:

$$\begin{aligned} i &:= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -\sqrt{-1} = -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= \sqrt{-1} = i \end{aligned} \tag{9.1}$$

9.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen können graphisch veranschaulicht werden, indem ein Koordinatensystem benutzt wird. Dazu werden auf der Abszisse die realen Zahlen $\Re = \mathrm{Re}$ (die bekannten reelle Zahlen $\mathbb{R}$) und auf die Ordinate die neuen Zahlen - die sogenannten imaginären Zahlen $\Im = \mathrm{Im}$.



Dabei wird deutlich, dass der Realteil $\Re$ und der Imaginärteil $\Im$ von einander getrennt sind. Dabei bildet die Kombination der beiden Zahlenteile die komplexe Zahl $z = a + bi = 3 + 4i$. Der Realteil $\Re$ und der Imaginärteil $\Im$ kann durch folgende Operatoren bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Re(z) &= \mathrm{Re}(z) = a = 3 \\ \Im(z) &= \mathrm{Im}(z) = b = 4 \quad . \end{aligned} \tag{9.2}$$

Im Folgenden werden zwei komplexe Zahlen verwendet um die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen zu erläutern:

$$\begin{aligned} z_1 &= a + bi \quad , \\ z_2 &= c + di \quad . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Wie schon die Veranschaulichung durch das Koordinatensystem zeigte, sind die Realteile und die Imaginärteile separiert zu betrachten. So ist es nicht verwunderlich, dass die Addition und Subtraktion ebenfalls separat im Real- und Imaginärteil durchgeführt.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i \\ z_1 - z_2 &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned} \tag{9.4}$$

Bei der Multiplikation muss lediglich das Distributivgesetz angewendet werden. Anschließend müssen alle Terme nach Real- und Imaginärteil sortiert werden. Hierbei sollten die vorgestellten Eigenschaften aus Gleichung (9.1) beachtet werden.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac + bdi^2) + (adi + bci) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned} \tag{9.5}$$

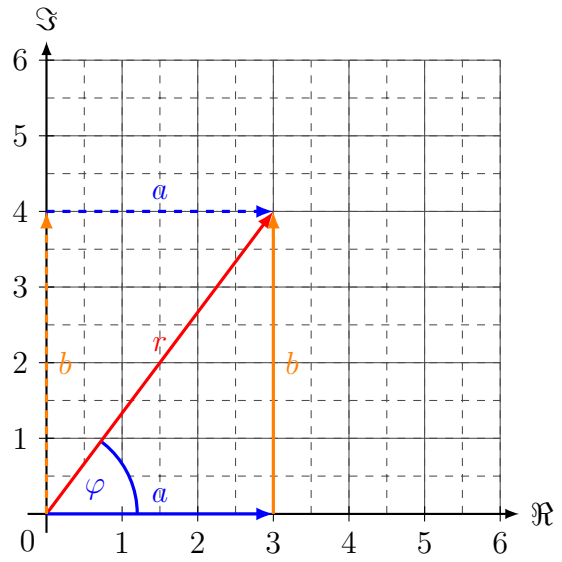
Bei der Division von komplexen Zahlen, sollte der Bruch so erweitert werden, dass i aus dem Nenner verschwindet. Dies gelingt mithilfe der sogenannten dritten binomischen Formel. Anschließend müssen die Terme im Zähler nach Real- und Imaginärteil sortiert werden.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \end{aligned} \tag{9.6}$$

Nachdem die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen erläutert wurden, muss noch der Betrag einer komplexen Zahl eingeführt werden. Wie im Koordinatensystem schon zu ersehen war, kann der Betrag der dargestellten Zahl mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden:

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad . \tag{9.7}$$

Eine komplexe Zahl kann ebenso über die Exponentialfunktion dargestellt werden.



$$z_1 = a + bi = re^{i\varphi} \tag{9.8}$$

Dabei werden die Parameter a und b in andere Parameter r und φ ungerechnet. Wenn der Parameter r festgesetzt wird lässt sich eine Beziehung zum Einheitskreis bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen erkennen, sodass folgende Identität nach kurzer Überlegung offensichtlich wird:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{9.9}$$

Mit den komplexen Zahlen kommt auch die Konjugation ins Spiel. Bei einer komplexen Konjugation wird das Vorzeichen des Imaginärteils invertiert - also umgedreht.

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= \overline{a + bi} = \overline{a - bi} \\ &= \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{9.10}$$

Die Konjugation unterliegt folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \cdot z_1 &= |z_1|^2 = a^2 + b^2 \\ \overline{z_1} + z_1 &= 2\Re(z_1) \\ \overline{z_1} + z_1 &= 2i\Im(z_1) \\ \overline{\overline{z_1}} &= z_1 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden in der weiterführenden Mathematik für nahezu alle Fachbereiche häufig vorkommen. Eine besonders häufige Anwendung ist die Fourier-Transformation, welche im Kapitel „Weiterführende Analysis“ erläutert wird.

9.1.1 Übungsaufgaben zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1: *Bestimme Real- $\Re$ und Imaginärteil $\Im$ der komplexen Zahlen.*

a) $z = 1 + 2i$
b) $z = 3 - 8i$
c) $z = -4 + i$
d) $z = 7i$
e) $z = 6$
f) $z = -7 + 5i$
g) $z = -\frac{4}{5} + \frac{6}{7}i$
h) $z = -\frac{9}{4} - \frac{7}{3}i$
i) $z = \sqrt{2} - i \ln 6$
j) $z = -e - \pi i$

Aufgabe 2: *Addiere die komplexen Zahlen.*

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$
b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$
c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$
d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$
e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$
f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$
g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$
h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$
i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$
j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$
k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$
l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$
m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$
n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$
o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$
p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$
q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$
r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$
s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$
t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\text{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 3: *Subtrahiere die komplexen Zahlen* $(z_1 - z_2)$.

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 4: *Multipliziere die komplexen Zahlen.*

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 5: *Dividiere die komplexen Zahlen* $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\text{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 6: *Komplex konjugiere die komplexen Zahlen.*

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = 6 - 9i$

c) $z = -4 - i$

d) $z = 8$

e) $z = -3i$

f) $z = -4 + 2i$

g) $z = -\frac{5}{7} + \frac{9}{8}i$

h) $z = -\frac{4}{3} - \frac{7}{9}i$

i) $z = \sqrt{5} - i \ln 8$

j) $z = e - \pi i$

Aufgabe 7: *Bestimme Betrag der komplexen Zahlen.*

a) $z = 4 + 7i$

b) $z = 2 - 2i$

c) $z = 7 - 2i$

d) $z = 1 - 7i$

e) $z = 3 + 8i$

f) $z = -7 + 5i$

g) $z = -\frac{1}{6} + \frac{5}{8}i$

h) $z = -\frac{3}{5} - \frac{9}{10}i$

i) $z = \sqrt{7} - i \ln 3$

j) $z = -e + \pi i$

Aufgabe 8: *Gegeben sind sechs komplexe Zahlen. Berechne das Ergebnis mit diesen Zahlen. Bestimme anschließend vom Ergebnis die komplex konjugierte Zahl, den Betrag sowie Real-* $\Re$ *und Imaginärteil* $\Im$.

$z_1 = 2 + 4i$ und $z_2 = 5 - i$ und $z_3 = 4 + 5i$ und
$z_4 = 3i - 5$ und $z_5 = 3 + 7i$ und $z_6 = -4 - 3i$

a) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 =$

b) $z_6 + z_5 - z_1 - z_3 =$

c) $z_2 \cdot z_6 + z_1 \cdot z_4 =$

d) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_5}{z_4} =$

e) $z_2 \cdot z_6 - z_1 \cdot z_4 =$

f) $\dfrac{z_6}{z_3} - z_1 \cdot z_2 =$

g) $\dfrac{z_6}{z_3} \cdot z_2 - z_1 =$

h) $z_5 (z_2 + z_6) + z_4 =$

i) $(z_2 + z_6)(z_4 - z_1) =$

j) $(z_3 + z_2)^2 - z_6 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.65) Lösungen zu komplexen Zahlen.

9.2 Komplexe Matrizen

Adjungierte Matrix

$$\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}^{\dagger} = \overline{\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}^{T}} = \overline{\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}}^{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ -ib & -id \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^{\dagger} &= A^{\dagger} + B^{\dagger} \\ (\lambda A)^{\dagger} &= \overline{\lambda} A^{\dagger} \\ (A^{\dagger})^{\dagger} &= A \\ (A \cdot B)^{\dagger} &= B^{\dagger} \cdot A^{\dagger} \\ (A+B)^{\dagger} &= A^{\dagger} + B^{\dagger} \\ \det(A^{\dagger}) &= \overline{\det(A)} \\ \mathrm{tr}(A^{\dagger}) &= \overline{\mathrm{tr}(A)} \end{aligned} \tag{9.13}$$

$$A^{\dagger} = \mathrm{adj}(A) = A^{*} = A^{+} = A^{H} \tag{9.14}$$

hmmm –¿

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\dagger} \tag{9.15}$$

¡– hmmm

9.2.1 Übungsaufgaben zu komplexen Matrizen

Aufgabe 1: .

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.66) Lösungen zu komplexen Matrizen.

10 Weiterführende Analysis

10.1 Taylorentwicklung

Viele *Funktionen* sind relativ einfach zu *differenzieren*, allerdings schwer zu analysieren. Durch die sogenannte *Taylorentwicklung* kann jede *Funktion iterativ* durch ein *Polynom* beschrieben werden. Die *Taylorentwicklung* ist definiert durch die *Taylorreihe*:

$$\mathcal{T}_f(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\bigg|_{x=a} (x-a)^n \quad . \tag{10.1}$$

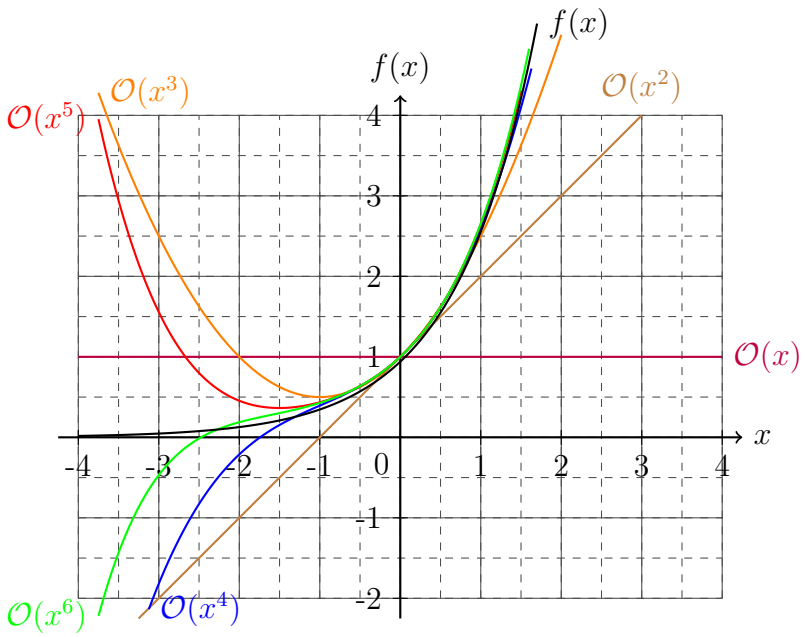
Die *Taylorreihe* $\mathcal{T}$ der *Funktion* $f(x)$ um die Stelle a ist gegeben durch *Summe* der n-ten *Ableitungen* $f^{(n)}(x)$ durch die n-te *Fakultät*. Nachdem die *Ableitungen* gebildet wurden soll links vom Querstrich | alle *Variablen* x durch den *Wert* a ersetzt werden. Abschließend bekommt jeder *Summand* der gesamten *Summe* ein *binomiales Polynom* der n-ten *Ordnung*.
Mittels der *Taylorreihe*, kann jeder *Funktion* als *Polynom* dargestellt werden. Somit ist die Entwicklung einer beliebigen *Funktion* $f(x)$ um den *Wert* $a = 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;0) &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \quad .\end{aligned} \tag{10.2}$$

Unter der Anwendung der Gleichung (10.1) kann die *Funktion* $f(x) = e^x$ um $a = 0$ entwickelt werden.

$$\mathcal{T}_f(x;0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \quad . \tag{10.3}$$

Graphisch lässt sich die Annäherung an der *Funktion* $f(x)$ um den *Punkt* $a = 0$ durch die Einzeichnung der *Graphen* je nach betrachteter *Ordnung* $\mathcal{O}\left(x^n\right)$. Hieraus folgt, dass mit zunehmender *Ordnung* die Genauigkeit der Annäherung zunimmt.


$f(x)$
$f(x)$
$\mathcal{O}(x^3)$
$\mathcal{O}(x^2)$
$\mathcal{O}(x^5)$
$\mathcal{O}(x)$
x
$\mathcal{O}(x^6)$
$\mathcal{O}(x^4)$
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

10.1.1 Übungsaufgaben zur Taylorentwicklung

Aufgabe 1: *Entwickle bis zur angebenen Ordnung und um den angegeben Punkt.*

a)	$f(x) = \sin(x)$	bis $\mathcal{O}(x^8)$	um $a = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
b)	$f(x) = \cos(x)$	bis $\mathcal{O}(x^9)$	um $a = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
c)	$f(x) = \sqrt{1+x}$	bis $\mathcal{O}(x^5)$	um $a = 0$	$\forall \lvert x\rvert \leq 1$
d)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	bis $\mathcal{O}(x^5)$	um $a = 0$	$\forall \lvert x\rvert < 1$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.67) Lösungen zur Taylorentwicklung.

10.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Differentialgleichungen beschreiben Zusammenhänge zwischen einer *Funktion* und seinen *Ableitungen*. Diese *Gleichungen* können über *Integration* und *Ableitungsansätze* gelöst werden. Generell sind zwei *Differentialgleichungstypen* mit jeweils zwei Unterarten mit den bereits vorgestellten Methoden lösbar. In diesem Abschnitt werden die *Differentialgleichungen* erster *Ordnung* vorgestellt, also dem Zusammenhang zwischen der *Funktion* und seiner ersten *Ableitung*. Dabei wird jeder *Differentialgleichung* in zwei Teile aufgeteilt, in den *homogenen* und *inhomogenen* Teil, welche man über jeweils andere Methoden lösen kann.

$$\underbrace{f(x) - \omega f'(x)}_{homogen} = \underbrace{k}_{inhomogen} \tag{10.4}$$

Um diese beispielhafte *Differentialgleichung* zu lösen, wird stets zu erst die *homogene Differentialgleichung* gelöst. Dazu wird sich der bekannten *Operatoralgebra* bemächtigt und alles was sich auf die *Variable* x bezieht auf die eine Seite des Gleichheitszeichen und alles was sich auf die *Funktionsvariable* f bezieht auf die andere Seite des Gleichheitszeichen gebracht.

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{\omega} f'(x) &= 0 \\
f - \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} &= 0 \qquad \Big| + \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} \\
f &= \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} \qquad |\cdot dx \\
fdx &= \frac{1}{\omega} df \qquad |: f \\
dx &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{f} df \qquad \Big| \int \\
\int dx &= \int \frac{1}{\omega}\frac{1}{f} df \\
x + c &= \frac{1}{\omega}\ln(f) \qquad |\cdot\omega \\
x\omega + c\omega &= \ln(f) \qquad \Big| e^{()} \\
e^{x\omega + c\omega} &= f(x) \\
\Rightarrow f_H(x) &= e^{x\omega + c\omega} \\
f_H(x) &= e^{x\omega + c\omega} \\
f_H(x) &= e^{x\omega} \cdot e^{c\omega} \\
f_H(x) &= Ae^{x\omega}
\end{aligned} \tag{10.5}$$

Dieses Verfahren wird *Separation der Variablen* genannt. Dieses Verfahren zeichnet sich wie gezeigt dadurch aus, dass die *Variablen* separiert werden, eine *Integration* durchgeführt und anschließend nach der *Funktionsvariablen* aufgelöst wird. Bei der *Integration* darf niemals die *Integrationskonstante* c vergessen werden. Im letztem Schritt wurden die *Konstanten* zusammengefasst und durch A *substituiert*.

Nachdem die *homogene* Lösung der *Differentialgleichung* gefunden wurde, muss noch die *inhomogene Gleichung* bestimmt werden. Dies wird in der Regel durch den *Ansatz „Variation*

der Konstanten“ bewerkstelligt. Für diesen *Ansatz* wird die *substituierte* zusammengefasste *Konstant* A in Abhängigkeit der *Variable* x gesetzt.

$$\begin{aligned} & f_H(x) = Ae^{x\omega} \\ \Rightarrow \text{ Ansatz: } & f_A(x) = A(x)e^{x\omega} \\ & f_A'(x) = \omega A(x)e^{x\omega} + A'(x)e^{x\omega} \end{aligned} \tag{10.6}$$

Dieser *Ansatz* $f_A(x)$ mit seiner *Ableitung* $f_A'(x)$ wird in die *Differentialgleichung* eingesetzt und anschließend für die entstehende *Differentialgleichung* der ehemaligen *Konstante* gelöst.

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{\omega}f'(x) &= k \\ \Rightarrow A(x)e^{x\omega} - \frac{1}{\omega}\left(\omega A(x)e^{x\omega} + A'(x)e^{x\omega}\right) &= k \\ \frac{1}{\omega}A'(x)e^{x\omega} &= k \qquad |\text{Separation der Variablen} \\ \frac{1}{\omega}\frac{dA}{dx}e^{x\omega} &= k \qquad \left| : \frac{e^{x\omega}}{\omega dx}\right. \\ dA &= \omega k e^{-x\omega}dx \qquad \left|\int\right. \\ \int dA &= \int \omega k e^{-x\omega}dx \\ \Rightarrow A(x) &= -ke^{-x\omega} + c \end{aligned} \tag{10.7}$$

Die Lösung für $A(x)$ wird in den *Ansatz* aus Gleichung (10.6) eingesetzt, sodass die *inhomogene* Lösung - die *partikuläre* Lösung - $f_p(x)$ gefunden wurde:

$$\begin{aligned} f_A(x) &= A(x)e^{x\omega} \qquad \text{mit } A(x) = -ke^{-x\omega} + c \\ \Rightarrow f_p(x) &= \left(-ke^{-x\omega} + c\right)e^{x\omega} \\ \Rightarrow f_p(x) &= -k + ce^{x\omega} \quad . \end{aligned} \tag{10.8}$$

Die gesamte Lösung der *Differentialgleichung* ergibt sich durch die *Addition* der *homogenen* $f_H(x)$ und der *partikulären* Lösung $f_p(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_H(x) + f_p(x) \\ \Rightarrow f(x) &= Ae^{x\omega} - k + ce^{x\omega} \\ f(x) &= (A + c)e^{x\omega} - k \\ f(x) &= Be^{x\omega} - k \quad . \end{aligned} \tag{10.9}$$

Durch spezielle Bedingungen an die *Differentialgleichung* kann die *Konstante* B genaustens bestimmt werden. Wie mit diesen *Randbedingungen* umgegangen wird, wird in einer späteren Version des Buches detailliert in Beispielen ausgeführt.

10.2.1 Übungsaufgaben zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1: *Löse die homogenen Differentialgleichungen durch Separation der Variablen.*

a) *b*)

Aufgabe 2: *Finde die inhomogenen Lösungen der Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten.*

a) *b*)

Aufgabe 3: *Löse die inhomogenen Differentialgleichungen durch Separation der Variablen und Variation der Konstanten.*

a) *b*)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.68) Lösungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung.

10.3 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die zweite *Differentialgleichungsart* ist die *Differentialgleichung* zweiter *Ordnung*. Diese stellt einen Zusammenhang zwischen der *Funktion*, der ersten und der zweiten *Ableitung* auf. In diesem Abschnitt werden die *inhomogenen Differentialgleichungen* zweiter *Ordnung* ausgelassen, da sie selten in der Naturwissenschaft vorkommen und individueller mit verschiedenen speziellen *Ansätzen* behandelt werden müssen. *Inhomogene Differentialgleichungen* zweiter *Ordnung* werden in einer späteren Version des Buches ausführlicher erläutert.

$$f''(x) + \gamma f'(x) - \omega^2 f(x) = 0 \tag{10.10}$$

Um eine *homogene Differentialgleichung* zweiter *Ordnung* zu lösen, wird in der Regel der *Exponentialansatz*

$$f(x) = Ae^{\lambda t} \tag{10.11}$$

und die damit verbundenen *Ableitungen* verwendet

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda A e^{\lambda t} \\ f''(x) &= \lambda^2 A e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{10.12}$$

und in die *Differentialgleichung* eingesetzt

$$\lambda^2 A e^{\lambda t} + \gamma \lambda A e^{\lambda t} - \omega^2 A e^{\lambda t} = 0 \ . \tag{10.13}$$

Mittels dieses *Ansatzes* wurde die unbekannte *Funktion* $f(x)$ durch den unbekannten *Parameter* λ ersetzt. Der *Parameter* A kann durch *Randbedingungen* ungleich Null gewählt werden. Durch die Eigenschaften der *Exponentialfunktion* und der Irrelevanz des *Parameters* A kann die Gleichung für λ über *quadratische Ergänzung* gelöst werden.

$$\begin{aligned} \lambda^2 A e^{\lambda t} + \gamma \lambda A e^{\lambda t} - \omega^2 A e^{\lambda t} &= 0 && \Big| : Ae^{\lambda t} \\ \lambda^2 + \gamma\lambda - \omega^2 &= 0 && \Big| + \frac{\gamma^2}{4} \\ \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2 &= \frac{\gamma^2}{4} && \Big| + \omega^2 \\ \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4} &= \frac{\gamma^2}{4} + \omega^2 \\ \left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 &= \frac{\gamma^2}{4} + \omega^2 && \Big| \sqrt{\ } \\ \lambda_{1,2} + \frac{\gamma}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2} && \Big| - \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2} \end{aligned} \tag{10.14}$$

Diese beiden Lösungen für den *Parameter* λ werden in den *Ansatz* $f(x) = Ae^{\lambda t}$ eingesetzt und die beiden Lösungen zusammen *addiert*:

$$\begin{aligned} f(x) &= Ae^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_2 t} \\ f(x) &= Ae^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega^2}\right)t} + Ae^{\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega^2}\right)t} \quad . \end{aligned} \tag{10.15}$$

Über den *Exponentialansatz* kann jede *homogene Differentialgleichung* zweiter *Ordnung* gelöst werden.

10.3.1 Übungsaufgaben zu Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 1: *Löse die homogenen Differentialgleichungen durch den exponentiellen Ansatz.*

$a)$ $b)$

Aufgabe 2: *Finde die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen durch den angebenen Ansatz.*

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.69) Lösungen zu Differentialgleichungen 2. Ordnung.

10.4 Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

10.4.1 Übungsaufgaben zu inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 1: *Finde die inhomogenen Lösungen der Differentialgleichungen und den Ansatz zur Lösung.*

$a)$ $b)$

Aufgabe 2: *Löse die inhomogenen Differentialgleichungen.*

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.70) Lösungen zu inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung.

10.5 Distributionen

Eine *Distribution* ist im tieferem Sinne keine *Funktion*. Die *δ-Distribution* kann durch *Funktionen* und *Grenzwerte* ausgedrückt werden und ist ausschließlich unter einem *Integral* vorzufinden. Die *δ-Distribution* besitzt folgende Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &= f(0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx &= f(a) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= 1 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx &= 1 \\
\int_{a}^{b} \delta(x-c)dx &= \begin{cases} f(c) & ,\forall a < c < b \\ \frac{1}{2}f(c) & ,\forall a = c \vee b = c \\ 0 & ,\forall c < a < b \vee a < b < c \end{cases} \\
\delta(-x) &= \delta(x) \\
\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall a \neq 0 \\
\delta(h(x)) &= \frac{1}{|h'(a)|}\delta(x-a) \qquad \text{mit: } h(a) = 0 \wedge h'(a) \neq 0 \text{ für: } \exists! x_N = a \\
\delta(h(x)) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|h'(a_n)|}\delta(x-a_n) \qquad \text{mit: } h(a_n) = 0 \wedge h'(a_n) \neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a) &= -f'(a) \\
H'(x) &= \delta(x)
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

Wobei $H(x)$ eine spezielle *Stufenfunktion* ist. Es handelt sich um die *Heaviside-Funktion*. Sie ist definiert durch:

$$
H(x) = \begin{cases} 0 & ,\forall x < 0 \\ \frac{1}{2} & ,\forall x = 0 \\ 1 & ,\forall x > 0 \end{cases} \tag{10.17}
$$

Die *δ-Distribution* wurde in der Physik eingeführt um analytische Probleme zu umgehen und auf die physikalischen Messungen anzupassen. So kann bei einer elektrischen Punktquelle die Quellladung durch die *δ-Distribution* beschrieben, während sich ohne sie zuvor eine *Unendlichkeit* auftat.

10.5.1 Übungsaufgaben zu Distributionen

Aufgabe 1: *Löse die Integrale mit Distribution.*

$a)$ $b)$

Aufgabe 2: *Zeige die Richtigkeit der Gleichungen.*

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.71) Lösungen zu Distributionen.

10.6 Kurvenintegral

10.6.1 Übungsaufgaben zu Kurvenintegralen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.72) Lösungen zu Kurvenintegralen.

10.7 Ringintegral

10.7.1 Übungsaufgaben zu Ringintegralen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.73) Lösungen zu Ringintegralen.

10.8 Fourier-Transformation

10.8.1 Übungsaufgaben zur Fourier-Transformation

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.74) Lösungen zur Fourier-Transformation.

10.9 Faltung

10.9.1 Übungsaufgaben zu Faltungen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.75) Lösungen zu Faltungen.

10.10 Gemischte Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1: *Löse die Differentialgleichung und führe bei der gefunden Funktionsgleichung eine Kurvendiskussion durch.*

a) *b*)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.76) Lösungen zu den gemischten Aufgaben zur Analysis.

11 Vektoranalysis

11.1 Gradient

11.1.1 Übungsaufgaben zum Gradient

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.77) Lösungen zum Gradient.

11.2 Divergenz

11.2.1 Übungsaufgaben zur Divergenz

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.78) Lösungen zur Divergenz.

11.3 Rotation

11.3.1 Übungsaufgaben zur Rotation

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.79) Lösungen zur Rotation.

11.4 Koordinatenwechsel

11.4.1 Übungsaufgaben zu Koordinatenwechseln

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.80) Lösungen zu Koordinatenwechseln.

11.5 Satz von Gauß

11.5.1 Übungsaufgaben zum Satz von Gauß

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.81) Lösungen zum Satz von Gauß.

11.6 Satz von Stokes

11.6.1 Übungsaufgaben zum Satz von Stokes

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (16.7.82) Lösungen zum Satz von Stokes.

12 Fehlerrechnung

12.1 Standardabweichungen

12.2 Lineare Regression

12.3 Fehlerfortpflanzung

13 Nährungsverfahren

13.1 Newton

14 Physikalische Anwendungen

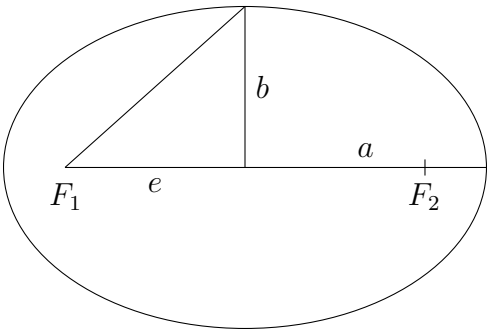
14.1 Lagrange Formalismus

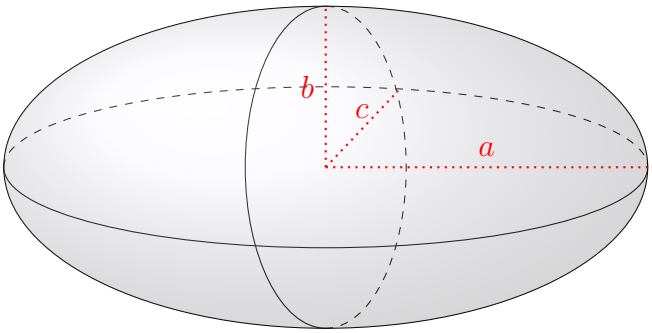
14.1.1 Euler-Lagrange Gleichungen

14.1.2 Noether Theorem

14.2 Fourier-Reihe

14.3 Ellipse und Ellipsoid





14.4 Maxwell-Gleichungen

15 Ökonomische Anwendungen

16 Anhang

16.1 Alphabete

Griechisches Alphabet:

$A\ \alpha$	Alpha	$I\ \iota$	Jota	$P\ \rho$	Rho
$B\ \beta$	Beta	$K\ \kappa$	Kappa	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	Sigma
$\Gamma\ \gamma$	Gamma	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$T\ \tau$	Tau
$\Delta\ \delta$	Delta	$M\ \mu$	My	$\Upsilon\ \upsilon$	Ypsilon
$E\ \epsilon$	Epsilon	$N\ \nu$	Ny	$\Phi\ \phi\ \varphi$	Phi
$Z\ \zeta$	Zeta	$\Xi\ \xi$	Xi	$X\ \chi$	Chi
$H\ \eta$	Eta	$O\ o$	Omikron	$\Psi\ \psi$	Psi
$\Theta\ \theta$	Theta	$\Pi\ \pi$	Pi	$\Omega\ \omega$	Omega

Altdeutsches Alphabet:

$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	A a	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	J j	$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$	S s
$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	B b	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	K k	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$	T t
$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	C c	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	L l	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$	U u
$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	D d	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$	M m	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$	V v
$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	E e	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$	N n	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$	W w
$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	F f	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$	O o	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$	X x
$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	G g	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$	P p	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$	Y y
$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	H h	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$	Q q	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$	Z z
$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$	I i	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$	R r		

Zurück zum Text durch folgenden Link: (3.5).

16.2 Pascal'sches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Zurück zum Text durch folgenden Link: (2.9.3).

16.3 10er Potenzen

Symbol	Name	10er Potenz	Ausgeschrieben	Sprachlich
Y	Yotta	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliade
E	Exa	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	10^{15}	1.000.000.000.000.000	Billarde
T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	10^{9}	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	10^{6}	1.000.000	Million
k	Kilo	10^{3}	1.000	Tausend
h	Hekto	10^{2}	100	Hundert
da	Deka	10^{1}	10	Zehn
		10^{0}	1	Eins
d	dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	centi	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
μ	mikro	10^{-6}	0,000.001	Millionstel
n	nano	10^{-9}	0,000.000.001	Milliardstel
p	piko	10^{-12}	0,000.000.000.001	Billionstel
f	femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	zepto	10^{-21}	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	yokto	10^{-24}	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel

16.4 Geometrische Eigenschaften von Körpern

Name	Ecken	Kanten	Flächen
Würfel	8	12	6
Dreiecksprisma	6	9	5
Quader	8	12	6
Fünfecksprisma	10	15	7
Sechsecksprisma	12	18	8
Siebenecksprisma	14	21	9
Achtecksprisma	16	24	10
n-ecksprisma	2n	3n	n+2
Dreieckspyramide	4	6	4
Viereckspyramide	5	8	5
Fünfeckspyramide	6	10	6
Sechseckspyramide	7	12	7
Siebeneckspyramide	8	14	8
n-eckspyramide	n+1	2n	n+1
n-eckspyramidenstumpf	2n	3n	n+2
Tetraeder	4	6	4
Oktaeder	8	12	8
Zylinder	0	2	3
Kegel	1	1	2
Kegelstumpf	0	2	3
Kugel	0	0	1

16.5 Wichtige Brüche als Dezimalzahlen

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$
$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{3}{4} = 0,75$
$\frac{3}{8} = 0,375$	$\frac{5}{8} = 0,625$
$\frac{5}{2} = 2,5$	$\frac{5}{4} = 1,25$
$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{9}{8} = 1,125$
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$	$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$
$\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$	$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$
$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$	$\frac{1}{12} = 0,08\overline{3}$
$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$	$\frac{5}{9} = 0,\overline{5}$
$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{3}{5} = 0,6$
$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{7}{10} = 0,7$
$\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$	$\frac{1}{1000} = 0,001 = 1‰$

16.6 Wichtige Stammfunktionen und Ableitungen

$f(x) = x^n$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arccot} x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$f(x) = \coth x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sinh^2 x}$

$$f(x) = \text{arsinh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = \text{arcosh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x) = \text{artanh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ,\ \forall|x|<1$$

$$f(x) = \text{arcoth}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ,\ \forall|x|>1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \ln|x|$$

$$f(x) = \frac{1}{x+a} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \ln|x+a|$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+a)^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx = -\frac{1}{x+a}$$

$$f(x) = \tan x \qquad F(x) = \int f(x)dx = -\ln|\cos x|$$

$$f(x) = \sin^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$f(x) = \cos^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$f(x) = \ln^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$f(x) = \sin ax\cos ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin ax\cos ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$f(x) = e^{ax}\sin bx \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$f(x) = e^{ax}\cos bx \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$f(x) = x\sin ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$

$$f(x) = x\cos ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a^2}\sin ax + \frac{x}{a}\cos ax$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad F(x) = \int f(x)dx = 2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = e^{ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$f(x) = xe^{ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$

$$f(x) = \ln x \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = x\ln x - x$$

$$f(x) = x\ln x \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\text{arcsinh}\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-a^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} + a^2\text{arccosh}\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\text{arcsinh}\frac{x}{a}\right)$$

mit: $X = ax^2 + b^x + c$ und $\Delta = 4ac - b^2$, $a \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{X} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\text{arctan}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & ,\forall\Delta > 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\text{arctan}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & ,\forall\Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} & ,\forall\Delta < 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & ,\forall\Delta = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{X^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{1}{X}dx$$

$$f(x) = \frac{x}{X} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{X}dx$$

16.7 Lösungen

16.7.1 Lösungen zu Mengen

Aufgabe 1:

$a)\ 4 \in \mathbb{N}$	$b)\ -1 \in \mathbb{Z}$	$c)\ 9 \in \mathbb{N}$	$d)\ 0,45 \in \mathbb{Q}$
$e)\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$	$f)\ -6 \in \mathbb{Z}$	$g)\ 4,75 \in \mathbb{Q}$	$h)\ 0,\bar{3} \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$	$j)\ -\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$	$k)\ 3 \in \mathbb{N}$	$l)\ 0,125 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 0,01 \in \mathbb{Q}$	$n)\ \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$	$o)\ 3,141 \in \mathbb{Q}$	$p)\ -0,75 \in \mathbb{Q}$

Aufgabe 2:

$a)\ 0,\bar{6} \in \mathbb{Q}$	$b)\ -\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$	$c)\ 0 \in \mathbb{N}$	$d)\ \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$	$f)\ \sqrt{13} \in \mathbb{R}$	$g)\ \frac{2}{\sqrt{16}} \in \mathbb{Q}$	$h)\ 1\% \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$	$j)\ -42 \in \mathbb{Z}$	$k)\ \sqrt{144} \in \mathbb{N}$	$l)\ \frac{16}{2} \in \mathbb{N}$
$m)\ 5,01 \in \mathbb{Q}$	$n)\ 17 \in \mathbb{N}$	$o)\ 1,1\bar{6} \in \mathbb{Q}$	$p)\ -\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3:

$a)\ \lg 10 \in \mathbb{N}$	$b)\ \sqrt{9} \in \mathbb{N}$	$c)\ -7 \in \mathbb{Z}$	$d)\ \pi \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{e^2}{2} \in \mathbb{R}$	$f)\ -\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$	$g)\ 1 \in \mathbb{N}$	$h)\ 0,597813553 \in \mathbb{Q}$
$i)\ \ln 2 \in \mathbb{R}$	$j)\ -e^{\ln \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$	$k)\ \log_3 9 \in \mathbb{N}$	$l)\ 0,1 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 28\% \in \mathbb{Q}$	$n)\ \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$	$o)\ \sqrt{17} \in \mathbb{R}$	$p)\ -\frac{1}{\ln e} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4:

$a)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,4,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,5,9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{3,4,8\}$;

$b)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7\} = \mathbb{M}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{1,2,3,5,7\} = \mathbb{K}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{4,6\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{\} = \varnothing$;

$c)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{\} = \varnothing$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \mathbb{K}$;

$d)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{2,5,8\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{1,4,7\}$;

$e)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{2,3,5,6,8,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{2,5,8\}$;

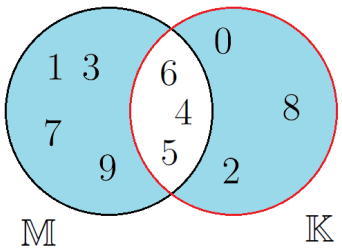
$f)$ $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1,3,5,6,7,9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3,5,7\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1,9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{4,6\}$

Aufgabe 5:

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} = \varnothing;$
b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \mathbb{M};$
c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) = \{3, 4, 6, 9\}\,;$
e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) = \{5, 7\}\,;$
f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing;$
g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L} \Delta \mathbb{K} = \{3, 5, 6, 7, 8\}\,;$
h) $\mathbb{M} \Delta \mathbb{K} = \{1, 2, 4, 8, 9\}\,;$

Aufgabe 6:

$\mathbb{M} \Delta \mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$



Aufgabe 7:

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \varnothing$; *b)* $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \mathbb{M}$; *c)* $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (1.0.1).

16.7.2 Lösungen zu Grundrechenarten

Aufgabe 1:

$a)$ $3821 + 1347 = 5168$
$b)$ $5962 + 8912 = 14874$
$c)$ $2512 + 3246 = 5758$
$d)$ $2353 + 4636 = 6989$
$e)$ $4462 + 9543 = 14005$
$f)$ $4156 + 3737 = 7893$
$g)$ $9948 + 5499 = 15447$
$h)$ $4784 + 8377 = 13161$
$i)$ $9745 + 3726 = 13471$
$j)$ $3269 + 9289 = 12558$
$k)$ $4577 + 6201 = 10778$
$l)$ $5031 + 5768 = 10799$
$m)$ $5465 + 1202 = 6667$
$n)$ $8415 + 2560 = 10975$
$o)$ $8762 + 7355 = 16117$
$p)$ $7437 + 1221 = 8658$
$q)$ $4578 + 7377 = 11955$
$r)$ $5786 + 4532 = 10318$
$s)$ $1057 + 7800 = 8857$
$t)$ $4204 + 4621 = 8825$
$u)$ $9424 + 8054 = 17478$
$v)$ $4438 + 4575 = 9013$
$w)$ $7873 + 9724 = 17597$
$x)$ $3432 + 7387 = 10819$

Aufgabe 2:

$a)$ $3821 - 1347 = 2474$
$b)$ $5962 - 1912 = 4050$
$c)$ $4512 - 3246 = 1266$
$d)$ $9353 - 4636 = 4717$
$e)$ $4462 - 2543 = 1919$
$f)$ $4156 - 3737 = 419$
$g)$ $9948 - 5499 = 4449$
$h)$ $4784 - 3377 = 1407$
$i)$ $9745 - 3726 = 6019$
$j)$ $7269 - 3289 = 3980$
$k)$ $6201 - 4513 = 1688$
$l)$ $5931 - 5768 = 163$
$m)$ $5465 - 1202 = 4263$
$n)$ $8415 - 2560 = 5855$
$o)$ $8762 - 7355 = 1407$
$p)$ $7437 - 1221 = 6216$
$q)$ $8578 - 7377 = 1201$
$r)$ $5786 - 4532 = 1254$
$s)$ $9057 - 7800 = 1257$
$t)$ $7204 - 4621 = 2583$
$u)$ $9424 - 8054 = 1370$
$v)$ $7838 - 4575 = 3263$
$w)$ $9873 - 9724 = 149$
$x)$ $8432 - 7387 = 1045$

Aufgabe 3:

$a)$ $3821 \cdot 1347 = 5146887$
$b)$ $5962 \cdot 1912 = 11399344$
$c)$ $4512 \cdot 3246 = 14645952$
$d)$ $9353 \cdot 4636 = 43360508$
$e)$ $4462 \cdot 2543 = 11346866$
$f)$ $4156 \cdot 3737 = 15530972$
$g)$ $9948 \cdot 5499 = 54704052$
$h)$ $4784 \cdot 3377 = 16155568$
$i)$ $9745 \cdot 3726 = 36309870$
$j)$ $7269 \cdot 3289 = 23907741$
$k)$ $6201 \cdot 4513 = 27985113$
$l)$ $5931 \cdot 5768 = 34210008$
$m)$ $5465 \cdot 1202 = 6568930$
$n)$ $8415 \cdot 2560 = 21542400$
$o)$ $8762 \cdot 7355 = 64444510$
$p)$ $7437 \cdot 1221 = 9080577$
$q)$ $8578 \cdot 7377 = 63279906$
$r)$ $5786 \cdot 4532 = 26222152$
$s)$ $9057 \cdot 7800 = 70644600$
$t)$ $7204 \cdot 4621 = 33289684$
$u)$ $9424 \cdot 8054 = 75900896$
$v)$ $7838 \cdot 4575 = 35858850$
$w)$ $9873 \cdot 9724 = 96005052$
$x)$ $8432 \cdot 7387 = 62287184$

Aufgabe 4:

$a)$ $7095 : 3 = 2365$
$b)$ $2568 : 6 = 428$
$c)$ $4512 : 2 = 2256$
$d)$ $5033 : 7 = 719$
$e)$ $7389 : 9 = 821$
$f)$ $9475 : 5 = 1895$
$g)$ $9872 : 8 = 1234$
$h)$ $6024 : 8 = 753$
$i)$ $9416 : 4 = 2354$
$j)$ $7273 : 7 = 1039$
$k)$ $7587 : 9 = 843$
$l)$ $3682 : 7 = 526$
$m)$ $7578 : 3 = 2526$
$n)$ $6738 : 2 = 3369$
$o)$ $8638 : 7 = 1234$
$p)$ $8464 : 8 = 1058$
$q)$ $8231 : 1 = 8231$
$r)$ $4755 : 5 = 951$
$s)$ $6024 : 8 = 753$
$t)$ $5112 : 6 = 852$
$u)$ $6840 : 15 = 456$
$v)$ $9468 : 12 = 789$
$w)$ $7704 : 24 = 321$
$x)$ $5904 : 16 = 369$

Aufgabe 5:

$a)$ $3821 + 1347 \cdot 43 = 61742$
$b)$ $4525 - 2070 : 6 = 4180$
$c)$ $8124 + 1347 - 4371 = 5100$
$d)$ $7124 - 2070 + 1392 = 6446$
$e)$ $4284 : 2 + 1347 \cdot 43 = 60063$
$f)$ $8285 : 5 - 5256 : 8 = 1000$
$g)$ $3482 \cdot 3 - 7432 : 4 = 8588$
$h)$ $8285 \cdot 8 : 5 - 5256 + 4361 = 12361$
$i)$ $1288 \cdot 2 \cdot 4 + 5416 : 4 : 2 = 10981$
$j)$ $4265 \cdot 3 - 3236 \cdot 2 + 1454 \cdot 4 = 12139$
$k)$ $822 \cdot 9 \cdot 6 : 3 - 632 \cdot 11 : 2 = 11320$
$l)$ $4265 : 5 + 6438 : 6 + 17848 : 8 = 4157$

Aufgabe 6:

a) $1203 + 6799 + 5684 + 2156 + 9852 = 25694$
b) $9982 - 595 - 651 - 3197 - 1637 = 3902$
c) $11 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 = 5544$
d) $1587 + 9613 + 9477 + 2674 + 2987 = 26338$
e) $8745 - 2971 - 841 - 1052 - 681 = 3200$
f) $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 = 2520$
g) $8461 + 5625 + 1098 + 6950 + 8509 = 30643$
h) $7894 - 412 - 753 - 951 - 456 = 5322$
i) $12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 = 16200$

Aufgabe 7:

a) $2 + 6 \cdot 3 - 5 = 15$
b) $12 - 20 : 5 + 8 \cdot 2 = 24$
c) $2 \cdot 8 : 4 + 2 - 6 : 2 = 3$
d) $63 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 15 = 41$
e) $12 \cdot 4 - 6 \cdot 5 + 33 \cdot 7 - 43 \cdot 4 = 77$
f) $10 \cdot 45 - 15 : 5 \cdot 60 + 34 = 304$
g) $7 + 3 \cdot 17 + 56 \cdot 6 - 123 = 271$
h) $55 \cdot 48 : 4 : 3 - 12 \cdot 3 = 184$
i) $54 \cdot 11 - 9 \cdot 47 - 72 : 2 \cdot 3 = 63$
j) $74 \cdot 3 - 4 \cdot 8 + 32 \cdot 5 = 350$
k) $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 12 \cdot 5 = 180$
l) $864 : 8 : 3 + 23 \cdot 7 - 12 \cdot 4 = 141$
m) $142 \cdot 13 - 24 \cdot 82 : 4 + 91 \cdot 12 = 2446$
n) $1249 \cdot 34 - 2135 : 5 + 235 \cdot 5 = 43214$

Aufgabe 8: *Berechne das Ergebnis.*

a) $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 11 = 4$
b) $4 \cdot 12 : 3 - 5 \cdot 2 + 3 = 9$
c) $75 : 5 - 5 + 72 : 8 \cdot 3 = 37$
d) $10 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 9 = 36$
e) $6 + 6 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 258$
f) $81 : 3 : 3 + 6 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 16$
g) $55 - 3 \cdot 7 + 32 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 42$
h) $15 \cdot 4 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 2 = 23$
i) $60 : 5 : 6 + 24 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 59$
j) $11 \cdot 99 - 2 \cdot 6 : 4 \cdot 8 = 1065$
k) $54 : 9 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \cdot 3 = 123$
l) $5 \cdot 5 \cdot 4 : 10 + 9 \cdot 4 : 3 = 22$
m) $42 - 11 \cdot 3 + 3 \cdot 12 = 45$
n) $49 \cdot 5 : 7 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 51$

Aufgabe 9: *Berechne das Ergebnis.*

a) $4731 + 3772 + 9141 + 1156 + 11278 + 3731 + 7542 + 1127 + 9346 = 51824$
b) $156 + 59342 + 3482 + 45642 + 284921 + 6432 + 25 + 27381 + 22833 = 450214$
c) $826265 - 1661 - 5683 - 34667 - 3727 - 8790 - 5204 - 4267 = 76226$
d) $438693 - 2362 - 2677 - 6431 - 6530 - 3256 - 1354 - 7532 - 2637 = 405914$
e) $36377 + 2367 + 2326 - 2362 - 6432 + 3467 - 9032 + 9463 - 7524 - 7345 = 21305$
f) $89349 + 3256 - 8347 + 8939 \cdot 11 - 4578 + 3250 - 6784 \cdot 5 = 147339$
g) $3422 \cdot 312 - 26806 + 6 \cdot 7846 - 92357 + 8356 \cdot 8 - 4362 = 1058063$
h) $29857 - 23658 + 26 \cdot 366 - 543 + 23568 - 485 \cdot 38 - 436 + 326 - 2666 - 735 = 16799$

Aufgabe 10: *Berechne das Ergebnis.*

a) $82 \cdot 24 - 3528 : 9 \cdot 3 = 792$
b) $52347 - 45 \cdot 23 - 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 4 = 49596$
c) $541 \cdot 24 : 4 + 72 \cdot 12 - 83 \cdot 4 = 3778$
d) $5670 : 6 : 7 + 23 \cdot 17 - 13 \cdot 11 = 383$
e) $55 \cdot 67 - 6460 : 6 \cdot 2 = 1525$
f) $14280 : 8 \cdot 2 - 14 \cdot 71 - 44 \cdot 5 = 2356$
g) $40 \cdot 70 \cdot 30 : 1000 - 450 : 10 + 80000 : 10000 = 47$
h) $75 \cdot 25 - 7 \cdot 34 - 89 + 43 \cdot 21 = 2451$

Aufgabe 11: *Schreibe die Rechnung auf und berechne das Ergebnis.*

a) $324 + 579 = 903$
b) $3960 - 1492 = 2468$
c) $4930 - 23 \cdot 54 = 3688$
d) $49565 : 5 + 1 = 9914$
e) $\frac{150000}{250} - 111 \cdot 3 = 267$
f) $10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.1.1).

16.7.3 Lösungen zur Bruchrechnung

Aufgabe 1:

$a)\ \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$	$b)\ \frac{1}{3} < \frac{3}{4}$	$c)\ \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
$d)\ \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$	$e)\ \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$	$f)\ \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
$g)\ \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$h)\ \frac{2}{5} < \frac{7}{15}$	$i)\ \frac{2}{3} > \frac{3}{6}$
$j)\ \frac{2}{3} < \frac{7}{8}$	$k)\ \frac{6}{7} > \frac{3}{4}$	$l)\ \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$
$m)\ \frac{3}{8} > \frac{1}{3}$	$n)\ \frac{5}{9} > \frac{3}{7}$	$o)\ \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
$p)\ \frac{2}{5} > \frac{3}{8}$	$q)\ \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$	$r)\ \frac{14}{8} < \frac{16}{9}$
$s)\ \frac{3}{8} = \frac{24}{64}$	$t)\ \frac{81}{9} = \frac{36}{4}$	$u)\ \frac{55}{5} = \frac{131}{11}$

Aufgabe 2:

$a)\ \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	$b)\ \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$	$c)\ \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
$d)\ \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$e)\ \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$	$f)\ \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$
$g)\ \frac{75}{125} = \frac{3}{5}$	$h)\ \frac{30}{75} = \frac{6}{15}$	$i)\ \frac{72}{108} = \frac{2}{3}$
$j)\ \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$	$k)\ \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$l)\ \frac{24}{8} = 3$
$m)\ \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$	$n)\ \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	$o)\ \frac{48}{144} = \frac{1}{3}$
$p)\ \frac{33}{3} = 11$	$q)\ \frac{54}{72} = \frac{3}{4}$	$r)\ \frac{5000}{10000} = \frac{1}{2}$
$s)\ \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$	$t)\ \frac{36}{66} = \frac{6}{11}$	$u)\ \frac{63}{108} = \frac{7}{12}$

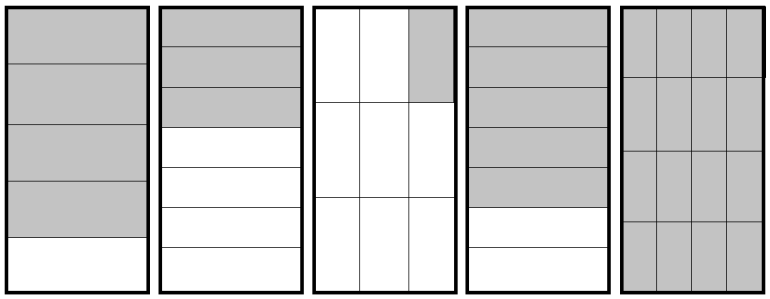
Aufgabe 3:

$a)\ \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{36}$	$b)\ \frac{5}{7} \cdot 7 = \frac{35}{49}$	$c)\ \frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{96}$
$d)\ \frac{1}{2} \cdot 24 = \frac{24}{48}$	$e)\ \frac{7}{8} \cdot 6 = \frac{42}{48}$	$f)\ \frac{4}{6} \cdot 11 = \frac{44}{66}$
$g)\ \frac{5}{7} \cdot 8 = \frac{40}{56}$	$h)\ \frac{5}{13} \cdot 9 = \frac{45}{117}$	$i)\ \frac{4}{11} = \frac{28}{77} \cdot 7$
$j)\ \frac{7}{4} \cdot 9 = \frac{63}{36}$	$k)\ \frac{6}{11} \cdot 5 = \frac{30}{55}$	$l)\ \frac{3}{12} \cdot 4 = \frac{12}{48}$
$m)\ \frac{2}{3} \cdot 21 = \frac{42}{63}$	$n)\ \frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{21}{24}$	$o)\ \frac{4}{6} \cdot 13 = \frac{52}{78}$
$p)\ \frac{3}{9} \cdot 8 = \frac{24}{72}$	$q)\ \frac{5}{12} \cdot 6 = \frac{30}{72}$	$r)\ \frac{7}{12} \cdot 7 = \frac{49}{84}$
$s)\ \frac{3}{4} \cdot 17 = \frac{51}{68}$	$t)\ \frac{5}{6} \cdot 4 = \frac{20}{24}$	$u)\ \frac{13}{6} \cdot 1000 = \frac{13000}{6000}$

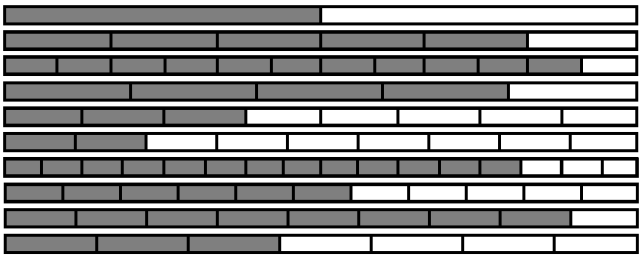
Aufgabe 4:

Quadrate: $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.
Kreise: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, 1, \frac{2}{3}, \frac{13}{16}, 0, \frac{5}{8}, \frac{5}{12}$ und $\frac{1}{16}$.
Quadrate: $\frac{18}{64}, \frac{4}{9}, \frac{10}{36}, \frac{4}{12}, \frac{16}{64}, \frac{6}{24}, \frac{1}{6}, \frac{6}{18}, \frac{10}{32}$ und $\frac{9}{12}$.
Kreise: $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{12}{16}, \frac{5}{6}, \frac{8}{16}, \frac{6}{6}, \frac{2}{8}, \frac{8}{12}$ und $\frac{0}{16}$.
Rechtecke links: $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$
Rechtecke rechts: $\frac{5}{8}, \frac{7}{16}$ und $\frac{1}{8}$

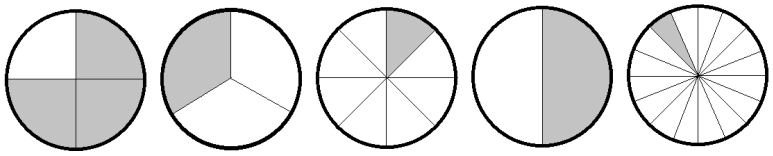
Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{9}$ *und* $\frac{3}{7}$



Aufgabe 7: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 8:

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$ *c)* $\frac{7}{12}+\frac{4}{12}=\frac{11}{12}$

d) $\frac{25}{9}+\frac{43}{9}=\frac{67}{9}$ *e)* $\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ *f)* $\frac{7}{11}+\frac{14}{11}=\frac{21}{11}$

g) $\frac{6}{32}+\frac{5}{32}=\frac{11}{32}$ *h)* $\frac{33}{9}+\frac{29}{9}=\frac{62}{9}$ *i)* $\frac{83}{39}+\frac{23}{39}=\frac{106}{39}$

Aufgabe 9:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ *e)* $\frac{5}{16}+\frac{3}{8}=\frac{11}{16}$ *f)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

g) $\frac{1}{4}+\frac{3}{32}=\frac{11}{32}$ *h)* $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$ *i)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Aufgabe 10:

$a)\ \frac{7}{2}-\frac{4}{2}=\frac{3}{2}$ $b)\ \frac{9}{8}-\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$ $c)\ \frac{12}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$

$d)\ \frac{31}{5}-\frac{23}{5}=\frac{8}{5}$ $e)\ \frac{6}{17}-\frac{5}{17}=\frac{1}{17}$ $f)\ \frac{8}{13}-\frac{2}{13}=\frac{6}{13}$

$g)\ \frac{86}{23}-\frac{45}{23}=\frac{41}{23}$ $h)\ \frac{55}{19}-\frac{21}{19}=\frac{24}{19}$ $i)\ \frac{65}{83}-\frac{15}{83}=\frac{50}{83}$

Aufgabe 11:

$a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $b)\ \frac{3}{7}-\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$ $c)\ \frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$

$d)\ \frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ $e)\ \frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$ $f)\ \frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$

$g)\ \frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}$ $h)\ \frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$ $i)\ \frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Aufgabe 12:

$a)\ \frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$ $b)\ \frac{13}{7}-\frac{15}{14}=\frac{11}{14}$ $c)\ \frac{9}{5}+\frac{13}{10}=\frac{31}{10}$

$d)\ \frac{21}{2}-\frac{31}{8}=\frac{53}{8}$ $e)\ \frac{9}{8}+\frac{19}{16}=\frac{37}{16}$ $f)\ \frac{5}{3}-\frac{11}{9}=\frac{4}{9}$

$g)\ \frac{7}{4}+\frac{67}{32}=\frac{123}{32}$ $h)\ \frac{13}{5}-\frac{25}{15}=\frac{14}{15}$ $i)\ \frac{13}{3}+\frac{11}{6}=\frac{37}{6}$

$j)\ \frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$ $k)\ \frac{13}{4}-\frac{9}{6}=\frac{7}{4}$ $l)\ \frac{9}{5}+\frac{3}{4}=\frac{51}{20}$

$m)\ \frac{21}{4}-\frac{11}{8}=\frac{31}{8}$ $n)\ \frac{3}{8}+\frac{9}{32}=\frac{21}{32}$ $o)\ \frac{4}{3}-\frac{10}{9}=\frac{2}{9}$

$p)\ \frac{7}{8}-\frac{11}{32}=\frac{17}{32}$ $q)\ \frac{13}{5}-2=\frac{3}{5}$ $r)\ 14+\frac{11}{6}=\frac{95}{6}$

$s)\ \frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$ $t)\ \frac{15}{6}-\frac{7}{3}=\frac{1}{6}$ $u)\ \frac{9}{5}-\frac{3}{4}=\frac{21}{20}$

$v)\ \frac{23}{4}+\frac{17}{8}=\frac{63}{8}$ $w)\ \frac{7}{9}-\frac{11}{18}=\frac{1}{6}$ $x)\ \frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=\frac{99}{1000}$

$y)\ \frac{5}{20}-\frac{1}{1000}=\frac{249}{1000}$ $z)\ \frac{13}{15}+6=\frac{103}{15}$

Aufgabe 13:

$a)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$	$b)\ \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$	$c)\ \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{25}$
$d)\ \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$	$e)\ \frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{128}$	$f)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{27}$
$g)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{32}=\frac{3}{128}$	$h)\ \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{75}$	$i)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$
$j)\ \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{27}$	$k)\ \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}=3$	$l)\ \frac{9}{7}\cdot\frac{10}{11}=\frac{90}{77}$
$m)\ \frac{2}{7}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{14}$	$n)\ \frac{2}{12}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$	$o)\ \frac{2}{9}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{27}$
$p)\ \frac{5}{6}\cdot\frac{6}{13}=\frac{5}{13}$	$q)\ \frac{2}{8}\cdot\frac{8}{20}=\frac{1}{10}$	$r)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{8}$
$s)\ \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$	$t)\ \frac{9}{15}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{25}$	$u)\ \frac{7}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$
$v)\ \frac{2}{8}\cdot\frac{6}{11}=\frac{3}{22}$	$w)\ \frac{6}{1}\cdot\frac{0}{83}=0$	$x)\ \frac{5}{4}\cdot\frac{32}{50}=\frac{8}{10}$

Aufgabe 14:

$a)\ \frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$	$b)\ \frac{3}{7}:\frac{1}{14}=6$	$c)\ \frac{2}{5}:\frac{3}{10}=\frac{4}{3}$
$d)\ \frac{1}{2}:\frac{3}{8}=\frac{4}{3}$	$e)\ \frac{3}{8}:\frac{5}{16}=\frac{6}{5}$	$f)\ \frac{1}{3}:\frac{2}{9}=\frac{3}{2}$
$g)\ \frac{1}{4}:\frac{3}{32}=\frac{8}{3}$	$h)\ \frac{2}{5}:\frac{2}{15}=3$	$i)\ \frac{2}{3}:\frac{1}{6}=4$
$j)\ \frac{2}{9}:\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$	$k)\ \frac{6}{5}:\frac{5}{2}=3$	$l)\ \frac{9}{7}:\frac{10}{11}=\frac{99}{70}$
$m)\ \frac{2}{7}:\frac{9}{4}=\frac{8}{63}$	$n)\ \frac{2}{12}:\frac{4}{5}=\frac{5}{24}$	$o)\ \frac{2}{9}:\frac{8}{3}=\frac{1}{12}$
$p)\ \frac{5}{6}:\frac{6}{13}=\frac{65}{36}$	$q)\ \frac{2}{8}:\frac{8}{20}=\frac{5}{8}$	$r)\ \frac{1}{4}:\frac{5}{2}=\frac{1}{10}$
$s)\ \frac{9}{4}:\frac{2}{5}=\frac{45}{8}$	$t)\ \frac{9}{15}:\frac{7}{5}=\frac{3}{7}$	$u)\ \frac{7}{9}:\frac{9}{4}=\frac{28}{81}$
$v)\ \frac{2}{8}:\frac{6}{11}=\frac{11}{24}$	$w)\ \frac{0}{1}:\frac{6}{83}=0$	$x)\ \frac{5}{4}:\frac{32}{50}=\frac{125}{64}$

Aufgabe 15:

$a)\ \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ $b)\ \frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} = \frac{195}{98}$ $c)\ \frac{9}{5} : \frac{13}{10} = \frac{18}{13}$

$d)\ \frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} = \frac{651}{16}$ $e)\ \frac{9}{8} : \frac{19}{16} = \frac{18}{19}$ $f)\ \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} = \frac{55}{27}$

$g)\ \frac{7}{4} : \frac{67}{32} = \frac{56}{67}$ $h)\ \frac{13}{5} : \frac{25}{15} = \frac{39}{25}$ $i)\ \frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{26}{11}$

$j)\ \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$ $k)\ \frac{13}{4} : \frac{9}{6} = \frac{13}{6}$ $l)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{12}{5}$

$m)\ \frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} = \frac{231}{32}$ $n)\ \frac{3}{8} : \frac{9}{32} = \frac{4}{3}$ $o)\ \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27}$

$p)\ \frac{7}{8} : \frac{11}{32} = \frac{28}{11}$ $q)\ \frac{13}{5} : 2 = \frac{13}{10}$ $r)\ 14 \cdot \frac{11}{6} = \frac{77}{3}$

$s)\ \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{128}$ $t)\ \frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$ $u)\ \frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{12}{5}$

$v)\ \frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} = \frac{391}{32}$ $w)\ \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} = \frac{77}{162}$ $x)\ \frac{1}{10} : \frac{1}{1000} = 100$

$y)\ \frac{5}{20} : \frac{1}{1000} = 250$ $z)\ \frac{13}{15} \cdot 6 = \frac{26}{5}$

Aufgabe 16:

$a)\ \frac{5}{2}$ $b)\ \frac{3}{7}$ $c)\ \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$d)\ \frac{13}{36}$ $e)\ \frac{73}{120}$ $f)\ \frac{67}{132}$

$g)\ \frac{5}{12}$ $h)\ \frac{123}{85}$ $i)\ \frac{167}{234}$

$j)\ \frac{51}{80}$ $k)\ \frac{133}{32}$ $l)\ \frac{77}{180}$

$m)\ \frac{83}{154}$ $n)\ \frac{71}{20}$ $o)\ \frac{142}{609}$

Aufgabe 17:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$

b) $\frac{8}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{139}{60}$

c) $\frac{11}{2}-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}=\frac{113}{24}$

d) $\frac{4}{5}+\frac{7}{3}+\frac{2}{9}=\frac{151}{45}$

e) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{17}{6}$

f) $\frac{21}{5}-\frac{8}{7}+\frac{2}{3}=\frac{391}{105}$

g) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{49}{60}$

h) $\frac{8}{5}-\frac{3}{7}+\frac{3}{8}=\frac{433}{280}$

i) $\frac{8}{7}-\frac{1}{9}+\frac{7}{5}=\frac{766}{315}$

j) $\frac{7}{8}+\frac{4}{3}+\frac{3}{10}=\frac{301}{120}$

k) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=\frac{149}{140}$

l) $\frac{10}{7}-\frac{1}{5}+\frac{5}{9}=\frac{562}{315}$

m) $\frac{14}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{151}{45}$

n) $\frac{11}{3}-\frac{8}{9}+\frac{7}{10}=\frac{313}{90}$

o) $\frac{9}{2}+\frac{9}{5}+\frac{7}{4}=\frac{161}{20}$

p) $\frac{2}{7}-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{277}{504}$

q) $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{19}{6}$

r) $\frac{4}{5}+\frac{9}{4}+\frac{3}{7}=\frac{487}{140}$

s) $\frac{8}{3}-\frac{7}{8}+\frac{6}{5}=\frac{359}{120}$

t) $\frac{6}{5}+\frac{11}{3}-2=\frac{43}{15}$

u) $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}+\frac{11}{9}=\frac{1006}{315}$

v) $\frac{8}{9}+\frac{3}{2}+5=\frac{133}{18}$

w) $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{97}{60}$

x) $\frac{5}{9}+\frac{13}{4}-3=\frac{29}{36}$

y) $\frac{11}{2}-\frac{7}{4}+\frac{8}{5}=\frac{107}{20}$

z) $\frac{5}{12}+\frac{7}{11}+9=\frac{1327}{132}$

Aufgabe 18:

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

b) $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = 5$

c) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{6} : \frac{3}{8} = \frac{154}{9}$

d) $\frac{4}{5} : \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{105}$

e) $\frac{1}{4} : \frac{5}{6} : \frac{7}{4} = \frac{6}{35}$

f) $\frac{21}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{5}$

g) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$

h) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{35}$

i) $\frac{8}{7} \cdot \frac{1}{9} : \frac{7}{5} = \frac{40}{441}$

j) $\frac{7}{8} : \frac{4}{3} : \frac{3}{10} = \frac{35}{16}$

k) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{63}{40}$

l) $\frac{10}{7} : \frac{1}{5} : \frac{5}{9} = \frac{90}{7}$

m) $\frac{14}{5} : \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{21}{5}$

n) $\frac{11}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10} = \frac{308}{135}$

o) $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{567}{40}$

p) $\frac{2}{7} : \frac{1}{9} : \frac{3}{8} = \frac{48}{7}$

q) $\frac{4}{3} : \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = 5$

r) $\frac{4}{5} : \frac{9}{4} : \frac{3}{7} = \frac{112}{135}$

s) $\frac{8}{3} \cdot \frac{7}{8} : \frac{6}{5} = \frac{35}{18}$

t) $\frac{6}{5} : \frac{11}{3} \cdot 2 = \frac{36}{55}$

u) $\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{9} = \frac{44}{35}$

v) $\frac{8}{9} : \frac{3}{2} : 5 = \frac{16}{135}$

w) $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{21}{20}$

x) $\frac{5}{9} : \frac{13}{4} \cdot 3 = \frac{20}{39}$

y) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{4} : \frac{8}{5} = \frac{385}{64}$

z) $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} : 9 = \frac{35}{1188}$

Aufgabe 19:

a) $\frac{3}{2} + \frac{7}{3} - \frac{1}{6} = \frac{11}{3}$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{7}{20}$

c) $\frac{7}{6} : 2 \cdot \frac{11}{3} - \frac{47}{36} = \frac{5}{6}$

d) $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{116}{15}$

e) $6 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} : \frac{1}{10} = \frac{200}{7}$

f) $\frac{12}{5} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4} - \frac{8}{9} + \frac{3}{10} = \frac{611}{180}$

g) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

h) $\frac{63}{71} \cdot \frac{289}{14} \cdot \frac{71}{33} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{5}{63} \cdot \frac{33}{289} = \frac{5}{17}$

Aufgabe 20:

a) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{27}$

b) $\frac{5}{7} : \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\right) = \frac{100}{231}$

c) $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{36}$

d) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{7}\right) = \frac{10}{7}$

e) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{5}\right) = \frac{142}{225}$

f) $\frac{7}{8} : \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9}\right) = \frac{36}{35}$

h) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{9}{5}\right) = \frac{837}{70}$

Aufgabe 21:

a) $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ mit: $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{3}{4}$

b) $2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{35}{9}$ mit: $a = \frac{5}{6}$ und $b = \frac{3}{7}$

c) $\frac{4 \cdot a}{2 \cdot b} = \frac{56}{27}$ mit: $a = \frac{7}{3}$ und $b = \frac{9}{4}$

d) $\frac{a \cdot c}{b + c} = \frac{49}{50}$ mit: $a = \frac{7}{2}$ und $b = \frac{9}{4}$ und $c = \frac{7}{8}$

e) $\frac{a + a \cdot c}{a \cdot b} = \frac{32}{25}$ mit: $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{5}{4}$ und $c = \frac{3}{5}$

f) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{99}{40}$ mit: $b = \frac{11}{8}$ und $c = \frac{5}{9}$

g) $\left(\frac{2 \cdot a}{b} + \frac{a}{c}\right) : \frac{a}{3 \cdot b} = \frac{51}{8}$ mit: $b = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{4}{3}$

h) $\frac{6 \cdot a}{b} \cdot \frac{b}{a \cdot c} = 72$ mit: $c = \frac{1}{12}$

Aufgabe 22:

a) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

c) $\frac{a}{b} : \frac{2 \cdot c}{d} = \frac{a \cdot d}{2 \cdot b \cdot c}$

d) $\frac{a}{b} + 4 = \frac{a + 4 \cdot b}{b}$

e) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a - c \cdot b}{d \cdot b}$

f) $\frac{a}{b} + \frac{2 \cdot c}{d} = \frac{a \cdot d + 2 \cdot c \cdot b}{b \cdot d}$

g) $\frac{a}{b} + 4 : \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d + 4 \cdot c \cdot b}{bd}$

h) $\frac{a}{b} : \frac{4}{5} - \frac{c}{d} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15 \cdot a \cdot d - 8 \cdot b \cdot c}{12 \cdot b \cdot d}$

i) $\frac{4 \cdot a}{b} + \frac{2 \cdot c}{a \cdot d} = \frac{4 \cdot a \cdot a \cdot d + 2 \cdot c \cdot b}{a \cdot b \cdot d}$

j) $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{dc}{b} = \frac{a \cdot c + d \cdot b + c \cdot dc}{b \cdot c}$

k) $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot c}$

l) $\frac{a \cdot b \cdot d \cdot d + 18 \cdot b - 15 \cdot c \cdot d - a \cdot a \cdot b \cdot d}{3 \cdot a \cdot b \cdot d}$

Aufgabe 23:

a) $\frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{3}{7}$

b) $\frac{\overbrace{\cancel{12}}^{3} \cdot \cancel{6} \cdot \overbrace{\cancel{15}}^{3}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{6}} = 9$

c) $\frac{\overbrace{\cancel{6}}^{2} \cdot \overbrace{\cancel{14}}^{2} \cdot 4}{\underbrace{\cancel{9}}_{3} \cdot 7 \cdot \cancel{7}} = \frac{16}{21}$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}} = \frac{3}{5}$

e) $\frac{7}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{7}{15}$

f) $\frac{\overbrace{\cancel{8}}^{2}}{\cancel{96}} \cdot \frac{\cancel{112}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{96}}{\cancel{112}} = 2$

g) $\frac{\cancel{4} \cdot 3 + 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 11} = \frac{8}{11}$

h) $\frac{6 \cdot \overbrace{\cancel{8}}^{2} + 7 \cdot \overbrace{\cancel{12}}^{3}}{7 \cdot \cancel{4}} = \frac{33}{7}$

i) $\frac{\overbrace{\cancel{14}}^{7} \cdot \overbrace{\cancel{6}}^{3} + \overbrace{\cancel{16}}^{4} \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = \frac{41}{4}$

j) $\frac{8}{\cancel{5}} \cdot \frac{9}{2} : \frac{2}{\cancel{5}} = 18$

k) $\frac{\cancel{7}}{4} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{7}} : \frac{\cancel{9}}{3} = \frac{3}{4}$

l) $\frac{2\cancel{98}}{5\cancel{17}} \cdot \frac{4\cancel{89}}{2\cancel{98}} : \frac{4\cancel{89}}{5\cancel{17}} = 1$

m) $\frac{\cancel{d} \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d} \cdot e \cdot \cancel{d}} = \frac{b}{e}$

n) $\frac{d}{\cancel{d}} \cdot \frac{c}{e} : \frac{e}{\cancel{d}} = \frac{d \cdot c}{e \cdot e}$

o) $\frac{\overbrace{\cancel{8}}^{2} \cdot \cancel{d} \cdot b + \cancel{4} \cdot \cancel{d} \cdot b}{\cancel{d} \cdot \cancel{4} \cdot c} = \frac{3 \cdot b}{c}$

Aufgabe 24:

a) $\frac{13 - 5 \cdot 2 + 36 : 3 + 9 \cdot 5}{5} = \frac{24}{5}$

b) $\frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 33 : 11}{4 \cdot 3 - 72 : 9 + 3 \cdot 6} = \frac{27}{34}$

c) $\frac{6 \cdot 8 : 4 + 2 - 16 : 2}{89 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 35} = \frac{1}{14}$

d) $\frac{52 - 95 : 5 + 11 \cdot 5}{156 - 8 \cdot 2 \cdot 4 - 108 : 9 : 2} = \frac{44}{43}$

e) $\frac{66 \cdot 5 - 19 \cdot 4 + 111 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 - 77} = \frac{5749}{110}$

f) $\frac{21 + 80 \cdot 2 + 16 \cdot 3 - 56}{2835 : 5 - 14 \cdot 11 : 2} = \frac{173}{490}$

Aufgabe 25:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ *b)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{2} = \frac{157}{42}$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{11}{6}$ *d)* $\frac{35}{6} : \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{5} = \frac{19}{30}$

e) $\frac{7}{3} : \frac{7}{9} + \frac{12}{13} : \frac{5}{8} = \frac{291}{65}$ *f)* $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{881}{504}$

Aufgabe 26:

a) $\frac{1}{3} \to 3$ *b)* $\frac{5}{4} \to \frac{4}{5}$ *c)* $\frac{3}{8} \to \frac{8}{3}$ *d)* $\frac{2}{9} \to \frac{9}{2}$

e) $\frac{6}{7} \to \frac{7}{6}$ *f)* $\frac{5}{3} \to \frac{3}{5}$ *g)* $\frac{13}{5} \to \frac{5}{13}$ *h)* $\frac{9}{4} \to \frac{4}{9}$

i) $\frac{7}{10} \to \frac{10}{7}$ *j)* $\frac{16}{9} \to \frac{9}{16}$ *k)* $\frac{17}{8} \to \frac{8}{17}$ *l)* $\frac{1}{20} \to 20$

l) $\frac{5}{1000} \to \frac{1000}{5}$ *m)* $\frac{23}{83} \to \frac{83}{23}$ *n)* $\frac{66}{73} \to \frac{73}{66}$ *o)* $\frac{96}{1} \to \frac{1}{96}$

Aufgabe 20: (Eine von mehreren möglichen Lösungen.)

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{4}$ und maximal: $\frac{5}{2} + \frac{4}{3}$ *b)* $\frac{2}{6} + \frac{1}{4}$ und maximal: $\frac{6}{1} + \frac{4}{2}$

c) $\frac{2}{4} - \frac{7}{1}$ und maximal: $\frac{7}{1} - \frac{2}{4}$ *d)* $\frac{3}{3} - \frac{6}{2}$ und maximal: $\frac{6}{2} - \frac{3}{3}$

e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9}$ und maximal: $\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{5}$ *f)* $\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}$ und maximal: $\frac{5}{1} \cdot \frac{8}{2}$

g) $\frac{5}{7} : \frac{6}{3}$ und maximal: $\frac{7}{5} : \frac{3}{6}$ *h)* $\frac{2}{10} : \frac{7}{5}$ und maximal: $\frac{10}{2} : \frac{5}{7}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.2.1).

16.7.4 Lösungen zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1:

$a)\ \frac{1}{2} = 0,5$	$b)\ \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$	$c)\ \frac{1}{5} = 0,2$
$d)\ \frac{1}{8} = 0,125$	$e)\ \frac{1}{4} = 0,25$	$f)\ \frac{1}{16} = 0,0625$
$g)\ \frac{3}{4} = 0,75$	$h)\ \frac{4}{5} = 0,8$	$i)\ \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$
$j)\ \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$	$k)\ \frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$	$l)\ \frac{19}{5} = 3,8$
$m)\ \frac{5}{9} = 0,\bar{5}$	$n)\ \frac{11}{6} = 1,8\bar{3}$	$o)\ \frac{5}{3} = 1,\bar{6}$
$p)\ \frac{43}{5} = 8,6$	$q)\ \frac{55}{2} = 27,5$	$r)\ \frac{17}{8} = 2,125$
$s)\ \frac{67}{7} = 9,\overline{571428}$	$t)\ \frac{81}{3} = 27$	$u)\ \frac{55}{7} = 7,\overline{857142}$
$v)\ \frac{1}{10} = 0,1$	$w)\ \frac{1}{100} = 0,01$	$x)\ \frac{1}{1000} = 0,001$

Aufgabe 2:

$a)\ 4 \cdot 0,1 = 0,4$	$b)\ 1 + 0,75 = 1,75$	$c)\ 9 \cdot 1,001 = 9,009$
$d)\ 2,125 - 1 = 1,125$	$e)\ 6,\bar{6} + 3,\bar{3} = 10$	$f)\ 1 + 0,0004 = 1,0004$
$g)\ 3,003 : 3 = 1,001$	$h)\ 100 \cdot 1,001 = 100,1$	$i)\ 1000 \cdot 0,001 = 1$
$j)\ 5,\bar{5} : 5 = 1,\bar{1}$	$k)\ 5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} = 0,8\bar{3}$	$l)\ 14 + 0,\bar{7} = 14,\bar{7}$
$m)\ 4 \cdot 0,9 = 3,6$	$n)\ 8 - 0,15 = 7,85$	$o)\ 4 \cdot 2,212 = 8,848$
$p)\ 9,853 - 6 = 3,853$	$q)\ 1,5 + 8,7 = 10,2$	$r)\ 2 + 1,6974 = 3,6974$
$s)\ 2,195 : 5 = 0,439$	$t)\ 125 \cdot 0,005 = 0,625$	$u)\ 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$
$v)\ 16,24\bar{8} : 0,8 = 20,3\bar{1}$	$w)\ 11 \cdot 0,01 + 1,\bar{1} = 1,22\bar{1}$	$x)\ 46 + 8,\bar{5} = 54,\bar{5}$

Aufgabe 3:

$a)\ 0,562 \approx 0,56$	$b)\ 0,337 \approx 0,34$	$c)\ 0,753 \approx 0,75$	$d)\ 12,2567 \approx 12,26$
$e)\ 7,419 \approx 7,42$	$f)\ 2,456 \approx 2,46$	$g)\ 9,783 \approx 9,78$	$h)\ 37,3783 \approx 37,38$
$i)\ 5,505 \approx 5,51$	$j)\ 4,782 \approx 4,78$	$k)\ 0,228 \approx 0,23$	$l)\ 25,7342 \approx 25,73$
$m)\ 0,111 \approx 0,11$	$n)\ 4,776 \approx 4,78$	$o)\ 5,387 \approx 5,39$	$p)\ 78,0152 \approx 78,02$
$q)\ 1,002 \approx 1,00$	$r)\ 1,273 \approx 1,27$	$s)\ 4,324 \approx 4,32$	$t)\ 11,0144 \approx 11,01$
$u)\ 2,572 \approx 2,57$	$v)\ 0,004 \approx 0,00$	$w)\ 0,786 \approx 0,79$	$x)\ 35,7855 \approx 35,79$

Aufgabe 4:

$a)$ $18,49$€	$b)$ $18,98$€	$c)$ $23,20$€	$d)$ $18,23$€	$e)$ $18,19$€
$f)$ $20,20$€	$g)$ $18,80$€	$h)$ $17,23$€	$i)$ $18,89$€	$j)$ $16,18$€

Aufgabe 5:

$a)$ 2	$b)$ $0,5$	$c)$ $6,5$	$d)$ $0,15$
$e)$ $0,15$	$f)$ $0,03$	$g)$ $2,75$	$h)$ $0,0019$
$i)$ $18,3$	$j)$ $44,78$	$k)$ $7,8$	$l)$ $287,70005$

Aufgabe 6:

$a)$ $0,5 + 1,2 = 1,7$	$b)$ $1,4 + 6,7 = 8,1$
$c)$ $4,9 + 3,5 = 8,4$	$d)$ $11,4 + 6,8 = 18,2$
$e)$ $6,6 + 8,7 = 15,3$	$f)$ $3,2 + 9,9 = 13,1$
$g)$ $5,4 + 8,2 = 13,6$	$h)$ $14,6 + 18,7 = 33,3$
$i)$ $0,53 + 4,24 = 4,77$	$j)$ $7,34 + 5,72 = 13,06$
$k)$ $41,93 + 73,52 = 115,45$	$l)$ $1,44 + 5,87 = 7,31$
$m)$ $6,524 + 5,842 = 12,366$	$n)$ $5,426 + 3,332 = 8,758$
$o)$ $7,452 + 8,134 = 15,586$	

Aufgabe 7:

$a)$ $2,5 - 1,2 = 1,3$	$b)$ $9,4 - 6,7 = 2,7$
$c)$ $4,9 - 3,5 = 1,4$	$d)$ $11,4 - 6,8 = 4,6$
$e)$ $9,6 - 8,7 = 0,9$	$f)$ $13,2 - 9,9 = 3,3$
$g)$ $15,4 - 8,2 = 7,2$	$h)$ $14,6 - 11,7 = 2,9$
$i)$ $6,53 - 4,24 = 2,29$	$j)$ $7,34 - 5,72 = 1,62$
$k)$ $141,93 - 73,52 = 68,41$	$l)$ $8,44 - 5,87 = 2,57$
$m)$ $6,524 - 5,842 = 0,682$	$n)$ $5,426 - 3,332 = 2,094$
$o)$ $9,452 - 8,134 = 1,318$	

Aufgabe 8:

$a)$ $2,5 \cdot 1,2 = 3$
$b)$ $9,4 \cdot 6,7 = 62,98$
$c)$ $4,9 \cdot 3,5 = 17,15$
$d)$ $11,4 \cdot 6,8 = 77,52$
$e)$ $9,6 \cdot 8,7 = 83,52$
$f)$ $13,2 \cdot 9,9 = 130,68$
$g)$ $15,4 \cdot 8,2 = 126,28$
$h)$ $14,6 \cdot 11,7 = 170,82$
$i)$ $6,53 \cdot 4,24 = 27,6872$
$j)$ $7,34 \cdot 5,72 = 41,9848$
$k)$ $141,93 \cdot 73,52 = 10434,6936$
$l)$ $8,44 \cdot 5,87 = 49,5428$
$m)$ $6,524 \cdot 5,842 = 38,113208$
$n)$ $5,426 \cdot 3,332 = 18,078432$
$o)$ $9,452 \cdot 8,134 = 76,882568$

Aufgabe 9:

$a)$ $-2,5 - 1,2 = -3,7$
$b)$ $-9,4 + 6,7 = -2,7$
$c)$ $1,9 - 3,5 = -1,6$
$d)$ $11,4 - 16,8 = -5,4$
$e)$ $-9,6 + 8,7 = -0,9$
$f)$ $-13,2 - 9,9 = -23,1$
$g)$ $-15,4 + 8,2 = -7,2$
$h)$ $-14,6 + 11,7 = -2,9$
$i)$ $-6,53 + 4,24 = -2,29$
$j)$ $2,34 - 5,72 = -3,38$
$k)$ $-141,93 - 73,52 = -215,45$
$l)$ $-8,44 + 5,87 = -2,57$
$m)$ $-6,524 - 5,842 = -12,366$
$n)$ $0,426 - 3,332 = -2,906$
$o)$ $4,452 - 8,134 = -3,682$

Aufgabe 10:

$a)$ $0,3 + 0,5 \cdot 3 - 0,6 = 1,2$
$b)$ $3,5 - 1,2 \cdot 2,4 : 2 + 6,7 = 7,32$
$c)$ $3,4 \cdot 5,4 + 0,2 \cdot 20 - 5,4 = 16,96$
$d)$ $8,8 : 2,2 - 1,1 + 5,4 \cdot 3,1 = 19,64$
$e)$ $0,5 \cdot 7,8 - 3 \cdot 1,5 + 9,2 \cdot 3,4 = 30,68$
$f)$ $4,1 \cdot 2,4 \cdot 5 - 2,5 \cdot 8 \cdot 2,3 = 3,2$
$g)$ $7,3 \cdot 1,2 - 5,5 + 4,2 : 0,5 + 8,3 \cdot 1,3 = 22,45$
$h)$ $12,5 \cdot 3,4 : 0,1 + 66,4 - 32,7 \cdot 0,8 = 465,24$

Aufgabe 11:

$a)$ $1,34 + 9,42 + 4,82 + 8,23 = 23,81$
$b)$ $42,24 + 1,74 + 25,72 + 37,31 = 107,01$
$c)$ $5,25 + 7,35 + 14,56 + 88,53 = 115,69$
$d)$ $63,34 + 2,52 + 26,26 + 8,87 = 100,99$
$e)$ $7,32 + 1,45 + 0,51 + 0,093 = 9,373$
$f)$ $0,525 + 0,178 + 0,952 + 0,227 = 1,882$
$g)$ $25,561 + 95,156 + 32,681 + 44,679 = 198,077$
$h)$ $12,45 + 0,2456 + 3,184 + 9,48134 = 25,$

Aufgabe 12:

a) $53,34 - 13,52 - 3,72 - 18,2 = 17,9$
b) $14,4 - 0,52 - 4,32 - 1,23 = 8,33$
c) $7,6 - 0,65 - 0,93 - 1,32 = 4,7$
d) $75,34 - 5,6 - 7,21 - 19,12 = 43,41$
e) $45,8 - 4,54 - 12,3 - 23,95 = 5,01$
f) $129,33 - 53,32 - 12,45 - 18,48 = 45,08$
g) $4,345 - 0,892 - 0,345 - 2,567 = 0,541$
h) $19,3 - 0,414 - 11,4263 - 0,3245 = 7,1352$

Aufgabe 13:

a) $4,34 - 9,82 + 1,82 - 6,73 = -10,39$
b) $5,43 + 8,54 - 11,44 + 5,42 = 7,95$
c) $9,41 + 1,45 + 0,06 - 13,89 = -2,97$
d) $-7,156 + 3,256 + 0,561 + 5,814 = 2,475$
e) $-0,892 + 2,567 - 12,45 + 53,32 = 42,545$
f) $-4,346 - 0,255 - 0,814 - 9,419 = -14,834$
g) $-41,94 + 5,392 - 0,2576 - 18,15 = -54,9556$
h) $-84,601 - 0,0536 + 0,104 + 714,4 = 6209,84$

Aufgabe 14:

a) $4 \to \frac{1}{4}$
b) $9 \to \frac{1}{9}$
c) $0,2 \to 5$
d) $0,75 \to \frac{4}{3}$
e) $0,01 \to 100$
f) $20 \to \frac{1}{20}$
g) $0,\bar{6} \to \frac{3}{2}$
h) $0,9 \to \frac{10}{9}$
i) $0,45 \to \frac{20}{9}$
j) $0,3 \to \frac{10}{3}$
k) $12 \to \frac{1}{12}$
l) $1,5 \to \frac{2}{3}$
l) $0,53 \to \frac{100}{53}$
m) $2,83 \to \frac{100}{283}$
n) $0,235 \to \frac{1000}{235}$
o) $0,924 \to \frac{1000}{924}$

Aufgabe 15:

a) $\frac{2}{3} > 0,65$
b) $0,\bar{5} = \frac{5}{9}$
c) $\frac{3}{4} < 0,755$
d) $\frac{5}{8} > 0,67$
e) $2,35 > \frac{46}{20}$
f) $1,2 < \frac{17}{15}$
g) $0,225 < \frac{1}{4}$
h) $\frac{72}{1000} > 0,07$
i) $\frac{9}{5} > 1,77$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.3.1).

16.7.5 Lösungen zu Parametern

Aufgabe 1:

$a)\ = 5x + 2a$ $\quad b)\ = 7u + 15k$
$c)\ = 4x + 19y$ $\quad d)\ = 73g + 11p$
$e)\ = 22a + 8b$ $\quad f)\ = 21a + 10b$
$g)\ = b + 11h + 9d$ $\quad h)\ = 3x + 3y + 36z$

Aufgabe 2:

$a)\ = 3a + 5d$ $\quad b)\ = 4y + 5x$ $\quad c)\ = 3g - 19h$
$d)\ = 33a + 28b$ $\quad e)\ = 9z + 12g$ $\quad f)\ = 9a - 9f$
$g)\ = 74k - 6h$ $\quad h)\ = 5u - 31l$ $\quad i)\ = -7z - 5r$
$j)\ = 25y + 15x$ $\quad k)\ = 29c + 59d$ $\quad l)\ = 4o + 3p$
$m)\ = 8v - 9q$ $\quad n)\ = 10e + 14w$ $\quad o)\ = 38s - 100d - 53a$
$p)\ = 10h + 16g + 19f$ $\quad q)\ = 17a + 12b$ $\quad r)\ = 27a + 15c$
$s)\ = 12c + 30z + 40t$ $\quad t)\ = 40x + 16z + 45y$ $\quad u)\ = 4b + c$
$v)\ = 12z + 33d - 32s + 45a$

Aufgabe 3:

$a)\ = \frac{2}{5}p + \frac{8}{7}e =$ $\quad b)\ = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}y$
$c)\ = \frac{9}{10}a + \frac{1}{4}b =$ $\quad d)\ = \frac{3}{10}r + \frac{1}{9}w$
$e)\ = \frac{9}{4}f + \frac{11}{6}u =$ $\quad f)\ = \frac{23}{9}n + \frac{3}{10}m + \frac{p}{11}$
$g)\ = \frac{3}{2}v + \frac{21}{10}m =$ $\quad h)\ = \frac{47}{15}c + \frac{13}{5}d + \frac{15}{28}s$

Aufgabe 4:

$a)\ = 4,8g + 2,7x$ $\quad b)\ = 6,7v + 4,6t$
$c)\ = 3,4y + 15,7z$ $\quad d)\ = 30,7h + 3,5g$
$e)\ = 0,026f + 1,002t$ $\quad f)\ = 0,55y + 10,11x$
$g)\ = 10,12d - 0,75z + 4,106p$ $\quad h)\ = 12,75k + 8,07l$

Aufgabe 5:

$a)\ = -7y - 15x$	$b)\ = -4,1f + 9,1a - 4,2g$
$c)\ = -0,95g - 1,5d$	$d)\ = 8,34t + 0,75z$
$e)\ = -22,15u - 8,87a$	$f)\ = -6,15z - 5,3y + 6x$
$g)\ = -0,325d + 0,6g$	$h)\ = -2,25t + 0,5z + 2,95x$

Aufgabe 6:

$a)\ = -5a$	$b)\ = 4k + 0,3h + 2g$
$c)\ = -3t - 1,8u$	$d)\ = 2,2z - 2,5t - 0,75$
$e)\ = -1,75e - s$	$f)\ = 3fd - 3,2d + 3,1f$
$g)\ = 8,6b + 0,85a$	$h)\ = -11,5b + 3,35a$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.4.1).

16.7.6 Lösungen zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1:

$a)\ a + b - c = 1$
$b)\ 3 \cdot a - 4 \cdot b + c = 5$
$c)\ c \cdot b - b \cdot a = 2$
$d)\ a \cdot b - b \cdot a = 0$
$e)\ 4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot c - 3 \cdot b \cdot c = 32$
$f)\ 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 52$
$g)\ a \cdot b \cdot c = 24$
$h)\ 4 \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{a} = \frac{22}{3} = 7,\bar{3}$

Aufgabe 2:

$a)\ a \cdot a = 81$	mit: $a = 9$
$b)\ 4 + c \cdot d = 12$	mit: $c = 2$ und $d = 4$
$c)\ 2 \cdot a \cdot b + 8 = 50$	mit: $a = 3$ und $b = 7$
$d)\ 7 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c = 25$	mit: $a = 2$ und $b = 5$ und $c = 3$
$e)\ a \cdot b \cdot c \cdot d = 27$	mit: $a = \frac{1}{4}$ und $b = 4$ und $c = 3$ und $d = 9$
$f)\ \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 81$	mit: $G = 27$ und $h = 9$
$g)\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t = \frac{9}{2}$	mit: $a = \frac{1}{4}$ und $t = 6$
$h)\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t + v \cdot t = 98,48$	mit: $a = 9,81$ und $v = 5$ und $t = 4$

Aufgabe 3:

$a)\ a \cdot 3 = 6 \cdot d$	mit: $a = 2 \cdot d$
$b)\ c \cdot d = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	mit: $c = a + b$ und $d = 2$
$c)\ a + 4 = d \cdot c + 4 \cdot t + 4$	mit: $a = d \cdot c + 4 \cdot t$
$d)\ A = 24$	mit: $A = a \cdot b$ und $b = 3$ und $a = 8$
$e)\ H - F = 4$	mit: $F = a - b$ und $H = a + b$ und $b = 2$
$f)\ \frac{f}{g} = \frac{2 \cdot b \cdot c}{a \cdot d}$	mit: $f = 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$ und $g = 2 \cdot a \cdot a \cdot d \cdot d$
$g)\ \xi \cdot \upsilon + \vartheta = a \cdot b + \wp$	mit: $\xi = a$ und $\upsilon = b$ und $\vartheta = \wp$
$h)\ \Delta + \square + \diamond = \zeta$	mit: $\Delta = \nabla - \Xi$ und $\square = \Xi + \Phi$ und $\diamond = \zeta - \nabla - \Phi$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6	7
a	3	6	$0,25$	$3,1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{3}$
b	4	2	$1,75$	$4,5$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{4}$
$c = a \cdot b$	12	12	$0,4375$	$13,95$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{15}{4}$
$d = \frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{1}{7}$	$0,6\overline{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{20}{27}$
$e = c \cdot d$	9	36	$0,125$	$9,61$	$\frac{9}{4}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{25}{9}$
$f = e + 2 \cdot a$	15	48	$0,625$	$15,81$	$\frac{21}{4}$	$\frac{133}{4}$	$\frac{55}{9}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.5.1).

Lösung zur Prozentrechnung

Aufgabe 1:

$a)$ $0,01 = 1\%$	$b)$ $100 = 10000\%$	$c)$ $0,5 = 50\%$
$d)$ $0,125 = 12,5\%$	$e)$ $0,0024 = 0,24\%$	$f)$ $289 = 2,89\%$
$g)$ $0,9315 = 93,15\%$	$h)$ $0,0341 = 3,41\%$	$i)$ $0,891 = 89,1\%$
$j)$ $0,54 = 54\%$	$k)$ $354 = 35400\%$	$l)$ $0,976342 = 97,6342\%$
$m)$ $0,354 = 35,4\%$	$n)$ $1,1229 = 112,29\%$	$o)$ $245,287 = 24528,7\%$
$p)$ $5,1006 = 510,06\%$	$q)$ $0,0005 = 0,05\%$	$r)$ $1,154578 = 115,4578\%$
$s)$ $0,999 = 99,9\%$	$t)$ $3,1204 = 312,04\%$	$u)$ $0,0487 = 4,87\%$
$v)$ $3,9552 = 395,52\%$	$w)$ $0,5755 = 57,55\%$	$x)$ $0,000004 = 0,0004\%$

Aufgabe 2:

$a)$ $1\% = 0,01$	$b)$ $100\% = 1$	$c)$ $54\% = 0,54$
$d)$ $1626\% = 16,26$	$e)$ $2,374\% = 0,02374$	$f)$ $2,01\% = 0,0201$
$g)$ $99\% = 0,99$	$h)$ $5\% = 0,05$	$i)$ $81,063\% = 0,81063$
$j)$ $8\% = 0,08$	$k)$ $0,4\% = 0,004$	$l)$ $30\% = 0,30$
$m)$ $0,06\% = 0,0006$	$n)$ $11,89\% = 0,1189$	$o)$ $0,9\% = 0,009$
$p)$ $12\% = 0,12$	$q)$ $0\% = 0$	$r)$ $587,3\% = 5,873$
$s)$ $4\% = 0,04$	$t)$ $909\% = 9,09$	$u)$ $11\% = 0,11$
$v)$ $9786\% = 97,86$	$w)$ $8,457\% = 0,08457$	$x)$ $5,64\% = 0,0564$

Aufgabe 3:

$a)\ \frac{1}{4} = 25\%$ $b)\ \frac{1}{3} \approx 33,3\%$ $c)\ \frac{5}{6} \approx 83,3\%$

$d)\ \frac{9}{14} \approx 64,3\%$ $e)\ \frac{8}{25} = 32\%$ $f)\ \frac{1}{8} = 12,5\%$

$g)\ \frac{7}{9} \approx 77,7\%$ $h)\ \frac{9}{4} = 225\%$ $i)\ \frac{43}{83} \approx 51,8\%$

$j)\ \frac{8}{3} \approx 266,67\%$ $k)\ \frac{7}{2} = 350\%$ $l)\ \frac{1}{97} \approx 1,03\%$

$m)\ \frac{5}{66} \approx 7,58\%$ $n)\ \frac{1}{351} \approx 0,28\%$ $o)\ \frac{4}{25} = 16\%$

$p)\ \frac{1}{7} \approx 14,29\%$ $q)\ \frac{9}{8} = 112,5\%$ $r)\ \frac{21}{250} = 8,4\%$

$s)\ \frac{3}{71} \approx 4,23\%$ $t)\ \frac{5}{83} \approx 6,02\%$ $u)\ \frac{16}{354} \approx 4,52\%$

$v)\ \frac{1}{1} = 100\%$ $w)\ \frac{0}{4} = 0\%$ $x)\ \frac{75}{976} \approx 7,68\%$

Aufgabe 4:

$a)\ 700 \cdot 1\% = 7$ $b)\ 45 \cdot 100\% = 45$

$c)\ 200 \cdot 4\% = 8$ $d)\ 80 \cdot 25\% = 20$

$e)\ 1500 \cdot 2\% = 30$ $f)\ 50000 \cdot 3\% = 1500$

$g)\ 9000 \cdot 99\% = 8910$ $h)\ 3141 \cdot 0,1\% = 3,141$

$k)\ 972 \cdot 245\% = 2381,4$ $l)\ 5707 \cdot 2\% = 114,14$

$m)\ 2040 \cdot 54\% = 1101,6$ $n)\ 2786 \cdot 9\% = 250,74$

$o)\ 6872 \cdot 78\% = 5360,16$ $p)\ 7827 \cdot 44,68\% = 3497,1036$

$q)\ 1837 \cdot 0,827\% = 15,19199$ $r)\ 3287 \cdot 0,37\% = 12,1619$

$s)\ 79,94 \cdot 45\% = 35,973$ $t)\ 3248,69 \cdot 7,34\% = 238,453846$

$u)\ 2304,56 \cdot 0,003\% = 0,0691368$ $v)\ 287,784 \cdot 92,75\% = 266,91966$

$w)\ 954,557 \cdot 3,786\% = 36,13952802$ $x)\ 245,57 \cdot 78,57\% = 192,944349$

Aufgabe 5:

a) 4% von 1000€ sind: $4\% \cdot 1000€ = 40€$
b) 2% von 5550€ sind: $2\% \cdot 5550€ = 111€$
c) 10% von 862434€ sind: $10\% \cdot 862434€ = 86243,4€$
d) 19% von 299€ sind: $19\% \cdot 299€ = 56,81€$
e) 12% von 1200€ sind: $12\% \cdot 1200€ = 144€$
f) 11% von 65300€ sind: $11\% \cdot 65300€ = 7183€$

Aufgabe 6:

a) 4%Jahreszins auf 2000€ ergeben nach einem Jahr: 2080€
b) 11%Jahreszins auf 7500€ ergeben nach einem Jahr: 8325€
c) 3%Jahreszins auf 4500€ ergeben nach einem Jahr: 4635€
d) 2,5%Jahreszins auf 13480€ ergeben nach einem Jahr: 13817€
e) 1,9%Jahreszins auf 14567€ ergeben nach einem Jahr: 14843,77€
f) 2,15%Jahreszins auf 18346€ ergeben nach einem Jahr: 18740,44€
g) 3,75%Jahreszins auf 20500€ ergeben nach einem Jahr: 21268,75€
h) 2,275%Jahreszins auf 84344€ ergeben nach einem Jahr: 86262,83€
i) 4,015%Jahreszins auf 48346€ ergeben nach einem Jahr: 50287,09€
j) 2,34%Jahreszins auf 32567€ ergeben nach einem Jahr: 33329,07€
k) 2,7325%Jahreszins auf 93872€ ergeben nach einem Jahr: 96437,05€
l) 0,05%Jahreszins auf 25268€ ergeben nach einem Jahr: 25280,63€

Aufgabe 7:

a) 2862,25€ *b*) 6753,05€ *c*) 4998,88€
d) 15814,08€ *e*) 31774,83€ *f*) 105321,09€
g) 155539,37€ *h*) 147487,65€ *i*) 43130,79€
j) 20716673,68€

Aufgabe 8:

$a)$ $5515,10$€	$b)$ $8702,43$€	$c)$ $14206,07$€
$d)$ $33764,35$€	$e)$ $27257,17$€	$f)$ $9632,57$€
$g)$ $51205,80$€	$h)$ $54933,23$€	$i)$ $37058,62$€
$j)$ $105000,10$€	$k)$ $159610,93$€	$l)$ $507418,17$€

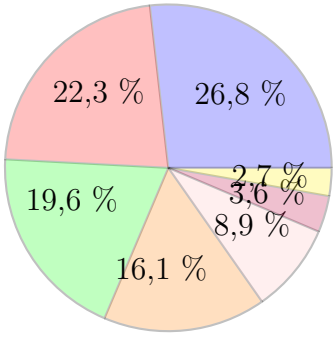
Aufgabe 9:

$a)$ $+20\%$	$b)$ $+10\%$	$c)$ $-11,\bar{1}\%$
$d)$ $+11,\bar{3}\%$	$e)$ $\approx -7,37\%$	$f)$ $\approx +78,57\%$
$g)$ $\approx +16,92\%$	$h)$ $\approx -17,14\%$	$i)$ $-95,\bar{5}\%$
$j)$ $\approx +68,22\%$	$k)$ $+160\%$	$l)$ $\approx +69,04\%$
$m)$ $\approx -14,31\%$	$n)$ $\approx +66,78\%$	$o)$ $\approx -13,79\%$

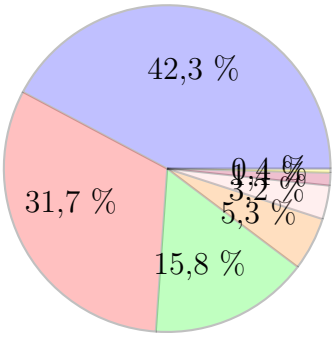
Aufgabe 10:

$a)$	150	125	110	90	50	20	15
Anteil in %	26,8	22,3	19,6	16,1	8,9	3,6	2,7
$b)$	600	450	225	75	45	20	5
Anteil in %	42,3	31,7	15,8	5,3	3,2	1,4	0,4
$c)$	2560	1870	1500	1235	950	375	110
Anteil in %	29,8	21,7	17,4	14,4	11,0	4,4	1,3
$d)$	11050	8600	4620	2200	950	290	180
Anteil in %	39,6	30,8	16,6	7,9	3,4	1,0	0,6
$e)$	23300	17200	12400	9700	4500	2600	1200
Anteil in %	32,9	24,3	17,5	13,7	6,3	3,7	1,7
$f)$	67376	34525	15170	9542	7346	3456	2637
Anteil in %	48,1	24,7	10,8	6,8	5,2	2,5	1,9

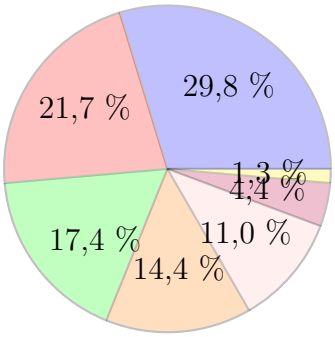
a)



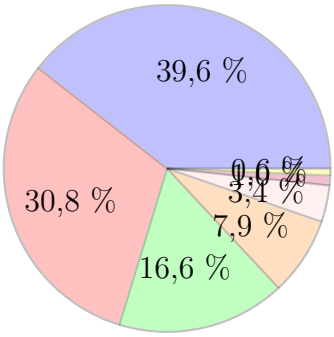
b)



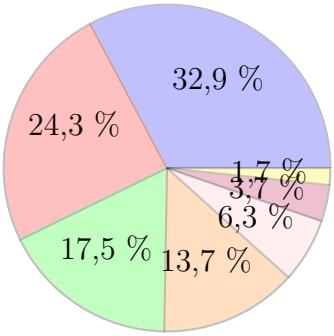
c)



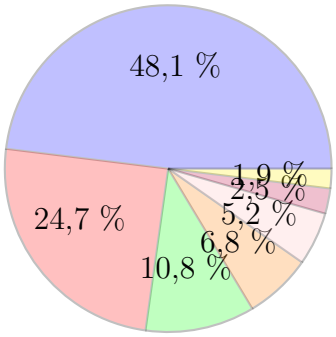
d)



e)



f)



Aufgabe 11:

a) $a:\ 6250\ ;\ b:\ 8325\ ;\ c:\ 6950\ ;\ d:\ 1400\ ;\ e:\ 2075$

b) $a:\ 13761\ ;\ b:\ 7986\ ;\ c:\ 3927\ ;\ d:\ 3201\ ;\ e:\ 4125$

c) $a:\ 2775\ ;\ b:\ 2075\ ;\ c:\ 1912,5\ ;\ d:\ 1487,5\ ;\ e:\ 1975\ ;\ f:\ 2262,5$

d) $a:\ 3519\ ;\ b:\ 3197\ ;\ c:\ 1598,5\ ;\ d:\ 1920,5\ ;\ e:\ 1276,5$

e) $a:\ 43510\ ;\ b:\ 28215\ ;\ c:\ 8740\ ;\ d:\ 9215\ ;\ e:\ 5320$

f) $a:\ 6875\ ;\ b:\ 7810\ ;\ c:\ 7315\ ;\ d:\ 8855\ ;\ e:\ 12375\ ;\ f:\ 11770$

Aufgabe 12:

a) P	R
100 %	300 €
1%	3 €
13%	39 €

: 100 ·13 : 100 ·13

b) P	R
100 %	600 €
1 %	6 €
20 %	120 €

: 100 ·20 : 100 ·20

c) P	R
100 %	850 €
1 %	8,5 €
26 %	221 €

: 100 ·26 : 100 ·26

d) P	R
150 %	1200 €
1 %	8 €
60 %	480 €

: 150 ·60 : 150 ·60

e) P	R
125 %	5000 €
1 %	40 €
75 %	3000 €

: 125 ·75 : 125 ·75

f) P	R
80 %	1600 €
1 %	20 €
15 %	300 €

: 80 ·15 : 80 ·15

g) P	R
75 %	3000 €
1 %	40 €
40 %	1600 €

: 75 ·40 : 75 ·40

h) P	R
3000 ‰	7200 €
1 ‰	2,4 €
5 ‰	12 €

: 3000 ·5 : 3000 ·5

i) P	R
14 %	7700 €
1 %	550 €
100 %	55000 €

: 14 ·100 : 14 ·100

Aufgabe 13:

$a)$ 50€	$b)$ 432€ = 432
$c)$ 1625€	$d)$ 6179,58€ =
$e)$ 10000€	$f)$ 6€ =
$g)$ 1081€	$h)$ 3% von 256,95€ =
$i)$ 1493,52€	$j)$ 22170,8€ =
$k)$ 520€	$l)$ 46144€ =
$m)$ 2427,39€	$n)$ 11000€ =
$o)$ 3122€	$p)$ 3666,8€ =
$q)$ 52560€	$r)$ 88879,1112€ =
$s)$ 6,072€	$t)$ 65560€ =
$u)$ 11994862,36€	$v)$ 411,03€ =

Aufgabe 14:

$a)$ 35€	$b)$ 237,5€ =
$c)$ 46,55€	$d)$ 1000,4€ =
$e)$ 1300€	$f)$ 272,475€ =
$g)$ 82,72€	$h)$ 2028,192€ =

Aufgabe 15:

$a)$ 1250€	$b)$ $392,\overline{857142}$€
$c)$ 250€	$d)$ 18608€
$e)$ $7684,4\overline{8}$€	$f)$ $742,\overline{7}$€
$g)$ 2221233€	$h)$ $1700363,\overline{63}$€
$i)$ $\approx 11712,688$€	$j)$ $\approx 95612,759$€

Aufgabe 16:

a) $6\% \to \frac{100}{6}$ *b)* $583\% \to \frac{100}{583}$ *c)* $52\% \to \frac{100}{52}$ *d)* $84\% \to \frac{100}{84}$
e) $44\% \to \frac{100}{44}$ *f)* $954\% \to \frac{100}{954}$ *g)* $0,5\% \to \frac{1000}{5}$ *h)* $149\% \to \frac{100}{149}$
i) $106\% \to \frac{100}{106}$ *j)* $0,7\% \to \frac{1000}{7}$ *k)* $9\% \to \frac{100}{9}$ *l)* $2004,5\% \to \frac{1000}{20045}$
l) $33,3\% \to \frac{1000}{333}$ *m)* $6,2\% \to \frac{1000}{62}$ *n)* $10,6\% \to \frac{1000}{106}$ *o)* $708,32\% \to \frac{10000}{70832}$

Aufgabe 17: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $33\% > 0,3$ *b)* $0,25 > 21\%$ *c)* $78\% > 0,77$
d) $6,74 < 690\%$ *e)* $0,45 = 45\%$ *f)* $0,285 < 29,2\%$
g) $934,67\% = 9,3467$ *h)* $11,2\% > 0,012$ *i)* $0,83 < 85\%$

Aufgabe 18: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{1}{3} > 30\%$ *b)* $120\% = \frac{5}{4}$ *c)* $\frac{3}{8} = 37,5\%$
d) $\frac{5}{6} > 83,2\%$ *e)* $1,5\% = \frac{3}{200}$ *f)* $0,4\% < \frac{1}{25}$
g) $90\% > \frac{8}{9}$ *h)* $\frac{7}{16} < 48,75\%$ *i)* $\frac{35}{9} < 392\%$

Aufgabe 19: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

$a)\ \frac{1}{2} > 0,4$	$b)\ \frac{1}{4} > 22\%$	$c)\ 85\% < 0,88$
$d)\ \frac{7}{8} < 90\%$	$e)\ 0,62 = 62\%$	$f)\ \frac{1}{6} > 15\%$
$g)\ 123\% < 1,25$	$h)\ 13,5\% < \frac{3}{20}$	$i)\ 1,74 < \frac{7}{4}$
$j)\ 0,6 = \frac{3}{5}$	$k)\ 2,5 > \frac{22}{9}$	$l)\ 240\% = \frac{12}{5}$
$m)\ 14,2\% < \frac{1}{7}$	$n)\ 6,4358 < 648,32\%$	$o)\ \frac{3}{100} > 0,3\%$

Aufgabe 20:

Jahr n	0	1	2	3	4	5
Zinsen z_n	0	60	$60,72$	$61,45$	$62,19$	$62,93$
Gesamtkapital G_n	5000	5060	$5120,72$	$5182,17$	$5244,35$	$5307,29$

Jahr n	6	7	8	9	10
Zinsen z_n	$63,69$	$64,45$	$65,23$	$66,00$	$66,80$
Gesamtkapital G_n	$5370,97$	$5435,43$	$5500,65$	$5566,66$	$5633,46$

$\Rightarrow$ Summe der Zinsen: $\sum_{i=0}^{10} z_i = 633,46$

$\Rightarrow$ Gesamtkapital nach 10 Jahren: $G_{10} = 5633,46$

Kurze Rechnung: $G_n = G_0 \cdot (1+p)^n = G_0 \cdot q^n$

$\Rightarrow \quad G_{10} = 5000 \cdot (1+1,2\%)^{10} = 5000 \cdot 1,012^{10} = 5633,46$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.6.1).

16.7.7 Lösungen zu den negativen Zahlen

Aufgabe 1:

	$+6$	-6	$+5$	-5	$+9$	-9	$+14$	-14
$+6$	12	0	11	1	15	-3	20	-8
-6	0	-12	-1	-11	3	-15	8	-20
$+5$	11	-1	10	0	14	-4	19	-9
-5	1	-11	0	-10	4	-14	9	-19
$+9$	15	3	14	4	18	0	23	-5
-9	-3	-15	-4	-14	0	-18	5	-23
$+14$	20	8	19	9	23	5	28	0
-14	-8	-20	-9	-19	-5	-23	0	-28

	-30	$+21$	-59	-16	-84	$+67$	-13	$+13$
$+18$	-12	39	-41	2	-66	85	5	31
-24	-54	-3	-83	-40	-108	43	-37	-11
$+43$	13	64	-16	27	-41	110	30	56
-62	-92	-41	-121	-78	-146	5	-75	-49
$+23$	-7	44	-36	7	-61	90	10	36
-52	-82	-31	-111	-68	-136	15	-65	-39
$+4$	-26	25	-55	-12	-80	71	-9	17

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

$a)$ $6 - 11 = -5$
$b)$ $-4 - 15 = -19$
$c)$ $15 - 53 = -38$
$d)$ $-16 - 13 = -29$
$e)$ $-40 + 14 = -26$
$f)$ $-64 + 22 = -42$
$g)$ $33 - 44 = -11$
$h)$ $-18 - 25 = -43$
$i)$ $-43 + 82 = 39$
$j)$ $-23 - 41 = -64$
$k)$ $-61 + 73 = 12$
$l)$ $88 - 92 = -4$
$m)$ $10 - 19 = -9$
$n)$ $-24 - 54 = -78$
$o)$ $45 - 76 = -31$
$p)$ $-57 - 29 = -86$
$q)$ $-12 + 31 = 19$
$r)$ $-43 + 56 = 13$
$s)$ $-55 - 23 = -78$
$t)$ $56 - 91 = -35$
$u)$ $23 - 56 = -33$
$v)$ $-47 - 12 = -59$
$w)$ $-47 - (-46) = -1$
$x)$ $-(-23) - 64 = -41$
$y)$ $= 36$
$z)$ $= -12$

Aufgabe 4:

$a)\ -2+4=2$ $b)\ -12+25=13$ $c)\ -34+62=28$

$d)\ -52+49=-3$ $e)\ -77+53=-24$ $f)\ -145+86=-59$

$g)\ -75-24=-99$ $h)\ -38-52=-90$ $i)\ -367-572=-939$

$j)\ -\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$ $k)\ -\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$ $l)\ -\frac{1}{4}+\frac{7}{8}=\frac{5}{8}$

$m)\ -\frac{4}{7}+\frac{6}{5}=\frac{22}{35}$ $n)\ -\frac{3}{8}+\frac{5}{7}=\frac{19}{56}$ $o)\ -\frac{4}{9}+\frac{8}{5}=\frac{52}{45}$

$p)\ -\frac{8}{3}-\frac{9}{4}=-\frac{59}{12}$ $q)\ -\frac{5}{6}-\frac{8}{9}=-\frac{31}{18}$ $r)\ -\frac{4}{7}-\frac{11}{3}=-\frac{89}{21}$

Aufgabe 5:

$a)\ -7\cdot 8=-56$ $b)\ -11\cdot 12=-132$ $c)\ -24\cdot 5=-120$

$d)\ 4\cdot(-9)=-36$ $e)\ 17\cdot(-4)=-68$ $f)\ 72\cdot(-3)=-216$

$g)\ -5\cdot(-7)=35$ $h)\ -9\cdot(-8)=72$ $i)\ -13\cdot(-13)=169$

$j)\ -\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{8}$ $k)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{35}$ $l)\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}=-\frac{10}{27}$

$m)\ \frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{21}{40}$ $n)\ \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{56}{27}$ $o)\ \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{9}{7}\right)=-3$

$p)\ -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{16}{21}$ $q)\ -\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{8}{9}$ $r)\ -\frac{4}{11}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=\frac{48}{55}$

$s)\ -\frac{6}{7}:\frac{5}{6}=-\frac{36}{35}$ $t)\ -\frac{3}{5}:\frac{2}{9}=-\frac{27}{10}$ $u)\ \frac{7}{8}:\left(-\frac{11}{3}\right)=-\frac{21}{88}$

$v)\ \frac{15}{4}:\left(-\frac{7}{15}\right)=-\frac{225}{28}$ $w)\ -\frac{11}{7}:\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{33}{28}$ $x)\ -\frac{5}{13}:\left(-\frac{10}{9}\right)=\frac{9}{26}$

Aufgabe 6:

$a)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$ $b)\ \frac{-3}{4}\cdot\frac{5}{6}=-\frac{5}{8}$ $c)\ \frac{-2}{3}\cdot\frac{-4}{5}=\frac{8}{15}$

$d)\ \frac{-1}{2}\cdot\frac{4}{-3}=\frac{2}{3}$ $e)\ -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{15}$ $f)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{-9}=\frac{4}{21}$

$g)\ \frac{-8}{9}\cdot\frac{-5}{6}=\frac{20}{27}$ $h)\ -\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{-4}{-3}\right)=\frac{4}{7}$ $i)\ -\frac{7}{7}\cdot\frac{8}{-5}=\frac{8}{5}$

Aufgabe 7:

$a)\ \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$ $b)\ \frac{-3}{4} : \frac{5}{6} = -\frac{9}{10}$ $c)\ \frac{-2}{3} : \frac{-4}{5} = \frac{5}{6}$

$d)\ \frac{-1}{2} : \frac{4}{-3} = \frac{3}{8}$ $e)\ -\frac{1}{6} : \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{12}$ $f)\ -\frac{6}{7} : \frac{2}{-9} = \frac{27}{7}$

$g)\ \frac{-8}{9} : \frac{-5}{6} = \frac{16}{15}$ $h)\ -\frac{3}{7} : \left(-\frac{-4}{-3}\right) = \frac{9}{28}$ $i)\ -\frac{7}{7} : \frac{8}{-5} = \frac{5}{8}$

Aufgabe 8:

$a)\ \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{19}{12}$ $b)\ \frac{-3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{19}{12}$ $c)\ \frac{-2}{3} + \frac{-4}{5} = -\frac{22}{15}$

$d)\ \frac{-1}{2} - \frac{4}{-3} = \frac{5}{6}$ $e)\ -\frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{17}{30}$ $f)\ -\frac{6}{7} + \frac{2}{-9} = -\frac{68}{63}$

$g)\ \frac{-8}{9} - \frac{-5}{6} = -\frac{1}{18}$ $h)\ -\frac{3}{7} - \left(-\frac{-4}{-3}\right) = \frac{19}{21}$ $i)\ -\frac{7}{7} - \frac{8}{-5} = \frac{3}{5}$

$j)\ \frac{-2}{5} - \frac{6}{7} = \frac{-44}{35}$ $k)\ \frac{-1}{4} + \frac{4}{-7} = -\frac{23}{28}$ $l)\ \frac{7}{3} + \frac{-15}{2} = -\frac{31}{6}$

$m)\ \frac{-4}{3} - \frac{7}{-5} = \frac{1}{15}$ $n)\ -\frac{5}{7} - \left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{52}{35}$ $o)\ -\frac{3}{10} + \frac{5}{-9} = -\frac{77}{90}$

$p)\ \frac{-5}{4} - \frac{-7}{-5} = -\frac{53}{20}$ $q)\ -\frac{10}{12} - \left(-\frac{-3}{-8}\right) = -\frac{11}{24}$ $r)\ -\frac{7}{10} - \frac{3}{-8} = -\frac{13}{40}$

Aufgabe 9:

$a)\ a+b=-14$	mit: $a=-5$ und $b=-9$
$b)\ 3\cdot a+b=-9$	mit: $a=-2$ und $b=-3$
$c)\ a-b=4$	mit: $a=-7$ und $b=-11$
$d)\ 4\cdot a-6\cdot b=44$	mit: $a=-4$ und $b=-10$
$e)\ 8\cdot a\cdot b=48$	mit: $a=-2$ und $b=-3$
$f)\ a\cdot b-b\cdot c=12$	mit: $a=-5$ und $b=-4$ und $c=-2$
$g)\ a+b=-\frac{17}{12}$	mit: $a=-\frac{2}{3}$ und $b=-\frac{3}{4}$
$h)\ -2\cdot a-b=\frac{88}{35}$	mit: $a=-\frac{6}{7}$ und $b=-\frac{4}{5}$
$i)\ 9\cdot a\cdot b=\frac{81}{11}$	mit: $a=-\frac{9}{5}$ und $b=-\frac{5}{11}$
$j)\ -2\cdot a:b=-\frac{32}{35}$	mit: $a=-\frac{2}{5}$ und $b=-\frac{7}{8}$
$k)\ \frac{1}{3}\cdot a:b+\frac{3}{2}\cdot c=-\frac{52}{105}$	mit: $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{7}{6}$ und $c=-\frac{4}{9}$
$l)\ a\cdot b:c-b:a=-\frac{177}{175}$	mit: $a=-\frac{7}{4}$, $b=-\frac{3}{10}$ und $c=-\frac{5}{8}$

Aufgabe 10:

$a)\ -4+8-13-41+53-29-43+71-12+66-44-79+38+23=-6$

$b)\ -4\cdot 5+4\cdot(-3)-15:(-3)+6\cdot(-4):(-2)=-15$

$c)\ -6\cdot(-8)-4\cdot 2\cdot(-8)+88:(-11)-43+85-62=84$

$d)\ -3(-2\cdot 7+3\cdot(-2))-45:(-9):(-5)\cdot(-13)+33-71=35$

$e)\ 4\cdot(-8)\cdot 4:(-2)-55+3\cdot(-8)-4(4-9\cdot 2)=41$

$f)\ 12:(-6)\cdot(-5)-3(-2-7\cdot 4)+(-3)\cdot(-2)\cdot(-4):(-6)\cdot(-3)-63-58+92=59$

$g)\ -(-(-3))\cdot(-(-2)\cdot(-(-(-4))))-(-(-(-(-12))))=12$

$h)\ -(-4)\cdot(-(-(-3))\cdot(-(-(-(-(-5))))))):(-(-(-6)))-(-(-(-15)))=5$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.7.1).

16.7.8 Lösungen zur Klammersetzung

Aufgabe 1:

$a)\ \frac{1}{2}(9+7)=8$

$b)\ \frac{25+65}{10}=9$

$c)\ 4(3+2)=20$

$d)\ \frac{16+48}{2}=32$

$e)\ \frac{1}{4}(144-92)=13$

$f)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{13-5}{4}=\frac{12}{5}$

$g)\ 5,5(1,5+6,25)=42,625$

$h)\ \frac{6,3-5-0,3}{20}:\frac{2}{5}=\frac{1}{8}$

$i)\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{24}$

$j)\ \frac{77-47}{3}\cdot\frac{3+5}{24}=\frac{10}{3}$

$k)\ 4(3+2)-2(1+3)=12$

$l)\ \frac{12-8+14}{2}\cdot\left(3+\frac{9}{2}\right)=\frac{135}{2}$

Aufgabe 2:

$a)\ 2(a+7)=2a+14$

$b)\ 4(b+c)=4b+4c$

$c)\ 7(4+v)=28+7v$

$d)\ d(b-c)=db-dc$

$e)\ 6(ab-cd)=6ab-6cd$

$f)\ mo(ep-ewe)=moep-moewe$

$g)\ ha(llo-i)=hallo-hai$

$h)\ te(st+e)=test+tee$

$i)\ \ =TagStunde-TagMinute$

$j)\ (4b+7c)5=20b+35c$

$k)\ 2(2a-3c)4=16a-24c$

$l)\ \xi(\Psi-\Phi)=\xi\Psi-\xi\Phi$

$m)\ 4\diamond(3\hbar-6\Gamma)=12\diamond\hbar-24\diamond\Gamma$

$n)\ 2\tau(5\sigma+3\rho)3\lambda=30\tau\sigma\lambda+18\tau\rho\lambda$

Aufgabe 3:

$a)\ 4(a+b)=4a+4b$

$b)\ c(a-5b)=ac-5bc$

$c)\ \frac{2}{5}(9a-5)=\frac{18a}{5}-2$

$d)\ (a+b)(a+b)=aa+2ab+bb$

$e)\ \frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}-\frac{5c}{d}\right)=\frac{2a}{5b}-\frac{2c}{d}$

$f)\ (a-b)(a-b)=aa-2ab+bb$

$g)\ (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$h)\ (a-b)(a+b)=aa-bb$

$i)\ \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$j)\ \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b)=a+2ab+bb$

Aufgabe 4:

$a)\ \ 3\,(a+2) = 3a+6$
$b)\ \ 5\,(3a-5) = 15a-25$
$c)\ \ d\,(3a-4b) = 3ad-4bd$
$d)\ \ 4a\,(2d-8u) = 8ad-32au$
$e)\ \ -2\,(4a+3de) = -8a-6de$
$f)\ \ -2a\,(7d-3b) = -14ad+6ab$
$g)\ \ (a+2)\,(b+1) = ab+2b+a+2$
$h)\ \ (a+2b)\,(3+c) = 3a+6b+ac+2bc$
$i)\ \ (2a+3c)\,(1-x) = 2a+3c-2ax-3cx$
$j)\ \ (2a-2b)\,(2c-2d) = 4ac-4bc-4ad+4bd$
$k)\ \ (lo-rof)\,(l-lo) = lol-rofl-lolo+roflo$
$l)\ \ (ah-n)\,(a-e) = aha-na-ahe+ne$
$m)\ \ (6-2x)\,(3d-2e) = 18d-6dx-12e+4xe$
$n)\ \ (g-l)\,(ame+odd) = game-lame+godd-lodd$
$o)\ \ (2s+4o)\,(-3a+4c) = -6as+8sc-12ao+16oc$
$p)\ \ (10-f)\,(8+2e) = 80-8f+20e-2ef$
$q)\ \ -(9-a)\,(4+d) = 36+9d-4a-ad$
$r)\ \ -(a+e)\,(d-f) = -ad-ed+af+ef$
$s)\ \ -(4d+3s)\,(2f-5) = -8df-6fs+20d+15s$
$t)\ \ -(5x+3)\,(6y-3z) = -30xy-18y+15xz+9z$
$u)\ \ a\,(8ge-ze)\,(h+4r) = 8geha-zeha+32gera-4zera$
$v)\ \ b\,(4a-2d)\,(5-3x) = 20ab-10b-13abx+6bx$
$w)\ \ -2\,(rt-wer)\,(los+4gt) = -2rtlos+2werlos-8rtgt+8wergt$
$x)\ \ -3\,(2d-5)\,(-4+p) = 24d-6dp-60+15p$
$y)\ \ (a+b)\,(c+d)\,(e+f) = ace+ade+bce+bde+acf+adf+bcf+bdf$
$z)\ \ (a-b)\,(c-d)\,(e-f) = ace-acf-ade+adf-bce+bcf+bde-bdf$

Aufgabe 5:

$a)\ \ 2a+2b = 2(a+b)$
$b)\ \ ab-ad = a(b-d)$
$c)\ \ abe+aef = ae(b-f)$
$d)\ \ 3ag-6a = 3a(g-2)$
$e)\ \ 2ab+2bc-2bd = 2b(a+c-d)$
$f)\ \ 2a-4b+8d = 2(a-2b+4d)$
$g)\ \ ab+ac+ad+ae-af = a(b+c+d+e-f)$
$h)\ \ 5\Delta\nabla-\Delta\diamond\nabla = \Delta\nabla\,(5-\diamond)$
$i)\ \ \Delta\Phi\Gamma+\Phi\nabla\Delta = \Delta\Phi\,(\Gamma+\nabla)$
$j)\ \ \alpha\beta(1+\chi) =$
$k)\ \ \Theta\Sigma\Xi-\Xi\Pi\Sigma+\Theta\Xi\Phi = \Xi(\Theta\Sigma-\Pi\Sigma+\Theta\Phi)$
$l)\ \ 2\Omega\Sigma-4\Sigma\Pi+6\Lambda\Sigma = 2\Sigma(\Omega-2\Pi+3\Lambda)$

Aufgabe 6:

a) $9a + 9b = 9(a + b)$

b) $2a + 6 - 8b = 2\,(a + 3 - 4b)$

c) $ab - acd + aa = a\,(b - cd + a)$

d) $2ab + 4ab + 8ab = 2ab\,(1 + 2 + 4)$

e) $\dfrac{5a}{bc} + \dfrac{25}{bc} = \dfrac{5}{bc}\,(a + 5)$

f) $abcdefghijkl - bcdefghijk = bcdefghijk\,(al - 1)$

h) $\dfrac{2a + 13ab}{7} = \dfrac{a}{7}\,(2 + 13b)$

i) $\dfrac{3cd - 6bd}{a - ba} = \dfrac{2d}{a}\dfrac{c - 2b}{1 - b}$

j) $\dfrac{\square\nabla - 3\nabla\square}{4 - \diamond} = \dfrac{-2}{4 - \diamond}\nabla\square$

k) $\dfrac{\hbar\mu\sigma - \hbar\lambda\mu}{\theta\rho + \psi\theta} = \dfrac{\hbar\mu}{\theta}\dfrac{\sigma - \lambda}{\rho + \psi}$

l) $\dfrac{4\Pi\Sigma\Theta + 8\delta\Lambda\Sigma}{5\Gamma\Delta - \Gamma} = \dfrac{4\Sigma}{\Gamma}\dfrac{\Pi\Theta + \delta\Lambda}{5\Delta - 1}$

m) $\dfrac{15asdfgh - 5hfsa}{3\tau\zeta\xi\psi - 9\nu\tau\zeta} = \dfrac{5hfsa}{3\tau\zeta}\dfrac{3dg - 1}{\xi\psi - 3\nu}$

Aufgabe 7:

a) $x^2 + 2x - 8$

b) $x^2 + 12x + 27$

c) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

d) $x^3 - 5x^2 - 38x + 168$

e) $x^4 - 4x^3 - 140x^2 + 576x - 576$

f) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

g) $x^4 - \dfrac{17x^2}{18} + \dfrac{25}{144}$

h) $x^4 - 69x^2 - 44x + 672$

i) $-x^4 + ax^3 - bx^3 + cx^3 - dx^3 + abx^2 - acx^2 + bcx^2 - bdx^2 + cdx^2$
$\quad - abcx + abdx - acdx + bcdx - abcd$

j) $-x^6 + bx^5 + 2cx^5 - 2dx^5 + a^2x^4 - 2bcx^4 + 2bdx^4 - c^2x^4 + 4cdx^4$
$\quad - a^2bx^3 - 2a^2cx^3 + 2a^2dx^3 + bcx^3 - 4bcdx^3 - 2c^2dx^3 + 2a^2bcx^2 - 2a^2bdx^2$
$\quad + a^2c^2x^2 - 4a^2cdx^2 + 2bc^2dx^2 - a^2bc^2x + 4a^2bcdx + 2a^2c^2dx - 2a^2bc^2d$

Aufgabe 8:

a) $= -abe - abp + ade + adp$

b) $= 20tx - 45ty - 28xz + 63yz$

c) $= -2ah - 15dg + 13dh$

d) $= 10gr + 15kr - 41ag - 63ak - 6dg - 8dk$

e) $= -18acd + 46ae + 3bcd - 53be$

f) $= -48ace + 56acf - 60ade + 70adf + 72bce - 84bcf + 90bde - 105bdf$

Aufgabe 9:

a) $-4a(8c-d) = -32ac + 4ad$

b) $-5b(-2g-4) = 10bg + 20b$

c) $-3(-5g+8k) = 15g - 24k$

d) $2p(-3e-4r) = -6pe - 8rp$

e) $-11v(-11n+12m) = 121vn - 132vm$

f) $-9x(-4y+3z)\cdot(-2k) = -72xyk + 36xzk$

Aufgabe 10:

a) $= 2ac + ad + 6bc + 3bd$

b) $= 6bc - 21b - 8c + 28$

c) $= 8kt - 5gt + 30gz - 48kz$

d) $= 21el + 15eh - 20hr - 28lr$

e) $= 2bggst + 4ags - 2bceghtt - 4aceht$

f) $= 24abb + 30abk + 8ab + 10ak$

Aufgabe 11:

a) $x^2 + 4x + \boxed{4} = (x+2)^2$

b) $x^2 - 6x + \boxed{9} = (x-3)^2$

c) $x^2 - 2x + 1 = \left(x - \boxed{1}\right)^2$

d) $x^2 + 8x + 16 = \left(x + \boxed{4}\right)^2$

e) $x^2 + 10x + \boxed{25} = \left(x + \boxed{5}\right)^2$

f) $x^2 + 6x + \boxed{9} = \left(x + \boxed{3}\right)^2$

g) $x^2 - 5x + \boxed{6,25} = \left(x - \boxed{2,5}\right)^2$

h) $x^2 + 3x + \boxed{2,25} = \left(x + \boxed{1,5}\right)^2$

i) $x^2 - \boxed{6}x + 9 = (x-3)^2$

j) $x^2 - \boxed{4}x + 4 = (x-2)^2$

k) $x^2 - \boxed{2}x + \boxed{1} = (x-1)^2$

l) $x^2 + \boxed{14}x + \boxed{49} = (x+7)^2$

m) $x^2 + \boxed{10}x + 25 = \left(x + \boxed{5}\right)^2$

n) $x^2 - \boxed{18}x + 81 = \left(x - \boxed{9}\right)^2$

o) $x^2 - \boxed{14}x + 49 = \left(x - \boxed{7}\right)^2$

p) $x^2 + \boxed{24}x + 144 = \left(x + \boxed{12}\right)^2$

Aufgabe 12:

a) $x^2 + 2x + 3 + 1 - 1 = (x+1)^2 + 2$

b) $x^2 - 6x + 7 + 9 - 9 = (x-3)^2 - 2$

c) $x^2 - 4x - 3 + 4 - 4 = (x-2)^2 - 7$

d) $x^2 + 8x + 12 + 16 - 16 = (x+4)^2 - 4$

e) $x^2 + 5x + 2,25 + 6,25 - 6,25 = \left(x + 2,5\right)^2 - 4$

f) $x^2 - 2x - 33 + 1 - 1 = \left(x - 1\right)^2 - 34$

g) $x^2 + x - 2 + 0,25 - 0,25 = \left(x + 0,5\right)^2 - 2,25$

h) $x^2 + 3x + 5 + 2,25 - 2,25 = \left(x + 1,5\right)^2 + 2,75$

i) $x^2 - 12x + 3 + 36 - 36 = (x-6)^2 - 33$

j) $x^2 + 22x - 7 + 121 - 121 = (x+11)^2 - 114$

k) $x^2 + 10x - 13 + 25 - 25 = \left(x + 5\right)^2 - 38$

l) $x^2 + 8x + 6 + 16 - 16 = \left(x + 4\right)^2 - 10$

m) $x^2 + 6x + 4 + 9 - 9 = \left(x + 3\right)^2 - 5$

n) $x^2 - 12x + 30 + 36 - 36 = \left(x - 6\right)^2 - 6$

Aufgabe 13:

a) $x^2 - 2x + 5 + 1 - 1 = (x-1)^2 + 4$

b) $x^2 + 4x - 2 + 4 - 4 = (x+2)^2 - 6$

c) $x^2 - 12x - 3 + 36 - 36 = (x-6)^2 - 39$

d) $x^2 - 8x + 14 + 16 - 16 = (x-4)^2 - 2$

e) $x^2 - 4x - 7 + 4 - 4 = (x-2)^2 - 11$

f) $x^2 + 14x + 5 + 49 - 49 = (x+7)^2 - 44$

g) $x^2 + 3x - 1 + 2,25 - 2,25 = (x+1,5)^2 - 3,25$

h) $x^2 - 5x - 8 + 6,25 - 6,25 = (x-2,5)^2 - 14,25$

i) $x^2 - x + 4 + 0,25 - 0,25 = (x-0,5)^2\, 3,75$

j) $x^2 - 1,5x - 1 + 0,5625 - 0,5625 = (x-0,75)^2 - 1,5625$

Aufgabe 14:

a) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
b) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
c) $(x+7)(x-7) = x^2 - 49$
d) $(x+5)^2 + 4 = x^2 + 10x + 29$
e) $(x-2)(x+2) - 5 = x^2 - 9$
f) $(x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$
g) $(x+2,5)^2 + 2 = x^2 + 5x + 8,25$
h) $(x-6)^2 - 2,75 = x^2 - 12x + 33,25$
i) $(x+2)(x-2) + 5,5 = x^2 + 1,5$
j) $(x-1,5)(x+1,5) - 2,1 = x^2 - 4,35$
k) $2(x+3)^2 - 8,3 = 2x^2 + 12x + 9,7$
l) $3(x-0,5)^2 + 5,1 = 3x^2 - 1,5x + 5,85$
m) $1,25(x-1,5)^2 - 9,75 = 1,25x^2 - 3,75x - 6,9375$
n) $-0,5(x+3,4)^2 + 11,1 = -0,5x^2 - 3,4x + 5,32$
o) $0,3(x-2,25)(x+2,25) + 0,4 = 0,3x^2 - 1,11875$
p) $-0,15(x+1,7)(x-1,7) - 2,31 = -0,15x^2 - 1,8765$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.8.4).

16.7.9 Lösungen zur Potenzen

Aufgabe 1:

a) $2^3 = 8$
b) $3^4 = 81$
c) $2^6 = 64$
d) $2^{-1} = \frac{1}{2}$
e) $10^3 = 1000$
f) $8^3 = 512$
g) $4^{-3} = \frac{1}{64}$
h) $10^{-6} = \frac{1}{1000000}$
i) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$
j) $\left(5^3\right)^2 = 15625$
k) $4^{\left(3^2\right)} = 4096$
l) $2^6 \cdot 2^2 = 256$
m) $\left(2^3 + 2^3\right)^3 = 4096$
n) $\left(10^2\right)^{-1} = \frac{1}{100}$
o) $\left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} = 64$
p) $\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 100$
q) $\left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} = 3,141$
r) $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 = 125$

Aufgabe 2:

$a)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ $b)\ \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$ $c)\ \left(\frac{11}{17}\right)^2 = \frac{121}{289}$

$d)\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $e)\ \left(\frac{124}{217}\right)^{-1} = \frac{217}{124}$ $f)\ \left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{81}$

$g)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$ $h)\ \left(\frac{144}{169}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{13}$ $i)\ \left(\frac{83}{87}\right)^{-1} = \frac{87}{83}$

$j)\ \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \frac{64}{9}$ $k)\ \left(\frac{36}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ $l)\ \left(\frac{225}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{11}{15}$

$m)\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{125}$ $n)\ \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ $o)\ \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$

Aufgabe 3:

$a)\ \sqrt{16} = 4$ $b)\ \sqrt{81} = 9$ $c)\ \sqrt[3]{8} = 2$

$d)\ \sqrt[3]{27} = 3$ $e)\ \sqrt{144} = 12$ $f)\ \sqrt[5]{100000} = 10$

$g)\ \sqrt{289} = 17$ $h)\ \sqrt[4]{81} = 3$ $i)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} = 2$

$j)\ \sqrt{a^8}^{\frac{1}{4}} = a$ $k)\ \sqrt[10]{1024} = 2$ $l)\ \sqrt[7]{\sqrt[4]{\sqrt[9]{\sqrt[13]{\lambda^{33}}}}}^{2} = \lambda^2$

Aufgabe 4:

$a)\ 3dm = 30cm$ $b)\ 4m = 400cm$

$c)\ 7cm = 70mm$ $d)\ 500cm = 50dm$

$e)\ 25km = 25000m$ $f)\ 8000000cm = 80km$

$g)\ 2dm^2 = 200cm^2$ $h)\ 14m^2 = 140\,000cm^2$

$i)\ 9cm^2 = 900mm^2$ $j)\ 2500cm^2 = 25dm^2$

$k)\ 65km^2 = 65\,000\,000m^2$ $l)\ 7500000cm^2 = 750m^2$

$m)\ 6dm^3 = 6000cm^3$ $n)\ 7m^3 = 7000000cm^3$

$o)\ 12cm^3 = 12000mm^3$ $p)\ 3000cm^3 = 3dm^3$

$q)\ 253km^3 = 253\,000\,000\,000m^3$ $r)\ 5000000cm^3 = 5000dm^3$

$s)\ 46dm^2 = 4600cm^2$ $t)\ 75m = 7500cm$

$u)\ 34cm^3 = 34000mm^3$ $v)\ 8900cm = 890dm$

$w)\ 63km^2 = 63\,000\,000m^2$ $x)\ 74000000cm^3 = 74000dm^3$

Aufgabe 5:

a) $1m^2 = 10^4 cm^2$ *b)* $2,718km = 2,718 \cdot 10^6 mm$ *c)* $1mm^3 = 10^{-6} dm^3$

d) $3m^3 = 3 \cdot 10^3 dm^3$ *e)* $0,5cm^2 = 5 \cdot 10^{-5} m^2$ *f)* $13,3cm^3 = 1,33 \cdot 10^{-5} m^3$

g) $10^3 km^2 = 10^{11} dm^2$ *h)* $1,234dm = 1,234 \cdot 10^2 mm$ *i)* $\frac{15}{4}\mu m^2 = \frac{15}{4} \cdot 10^6 mm^2$

j) $\frac{1}{3}Mm^3 = \frac{1}{3} \cdot 10^9 km^3$ *k)* $0,01km^2 = 10^8 cm^2$ *l)* $125mm^5 = 1,25 \cdot 10^{-3} cm^5$

m) $6,\bar{6}m^4 = 6,\bar{6} \cdot 10^8 cm^4$ *n)* $0,025km^7 = 2,5 \cdot 10^{40} mm^7$ *o)* $3,141Tm^2 = 3,141 \cdot 10^{36} nm^2$

Aufgabe 6:

a) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

c) $\left(\sqrt{2}a + 2\right)^4 = 4a^4 + 16\sqrt{2}a^3 + 48a^2 + 32\sqrt{2}a + 16$

d) $\left(3a + \frac{2}{3}\right)^3 = 27a^3 + 18a^2 + 4a + \frac{8}{27}$

e) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

f) $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$

g) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

h) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$

i) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

j) $(a-c)^8 = a^8 - 8a^7c + 28a^6c^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

k) $(\hbar + \ell)^{-3} = \frac{1}{\hbar^3 + 3\hbar^2\ell + 3\hbar\ell^2 + \ell^3}$

l) $(\Box - \nabla)^{-5} = \frac{1}{\Box^5 - 5\Box^4\nabla + 10\Box^3\nabla^2 - 10\Box^2\nabla^3 + 5\Box\nabla^4 - \nabla^5}$

m) $(ab + cd)^{-3} = \frac{1}{a^3b^3 + 3a^2b^2cd + 3abc^2d^2 + c^3d^3}$

n) $(\kappa - \gamma + \eta\epsilon)^{-2} = \frac{1}{\kappa^2 + \gamma^2 + \eta^2\epsilon^2 - 2\kappa\gamma + 2\kappa\eta\epsilon - 2\gamma\eta\epsilon}$

Aufgabe 7:

$a)\ 5^2 = 25$	$b)\ -5^2 = -25$	$c)\ (-5)^2 = 25$
$d)\ 6^2 = 36$	$e)\ -6^2 = -36$	$f)\ (-6)^2 = 36$
$g)\ 4^3 = 64$	$h)\ -4^3 = -64$	$i)\ (-4)^3 = -64$
$j)\ 3^4 = 81$	$k)\ -3^4 = -81$	$l)\ (-3)^4 = 81$
$m)\ 2^5 = 32$	$n)\ -2^5 = -32$	$o)\ (-2)^5 = -32$
$p)\ 13^0 = 1$	$q)\ -17^0 = -1$	$r)\ (-11)^0 = 1$

Aufgabe 8:

$a)\ 3,00 \cdot 10^4$	$b)\ 8,54 \cdot 10^6$	$c)\ 7,27 \cdot 10^7$
$d)\ 4,75 \cdot 10^7$	$e)\ 5,84 \cdot 10^8$	$f)\ 1,25 \cdot 10^7$
$g)\ 1,00 \cdot 10^{-6}$	$h)\ 3,52 \cdot 10^{-5}$	$i)\ 6,47 \cdot 10^{-11}$
$j)\ 9,56 \cdot 10^{-4}$	$k)\ 9,12 \cdot 10^7$	$l)\ 7,31 \cdot 10^{-9}$
$m)\ 7,85 \cdot 10^{-3}$	$n)\ 4,56 \cdot 10^{11}$	$o)\ 9,14 \cdot 10^4$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.9.4).

16.7.10 Lösungen zu Logarithmen

Aufgabe 1:

$a)\ \log_2 16 = 4$	$b)\ \lg 1000 = 3$	$c)\ \log_8 64 = 2$
$d)\ \mathrm{lb}\ 512 = 9$	$e)\ \ln e^9 = 9$	$f)\ \log_5 125 = 3$
$g)\ \log_{25} 125 = \frac{3}{2}$	$h)\ \lg\left(11 \cdot 10^6\right) = 6 + \lg 11 \approx 7,04$	$i)\ \log_{17} 1 = 0$
$j)\ \log_3 81 = 4$	$k)\ \log_4 64 = 3$	$l)\ \log_{15} 225 = 2$

Aufgabe 2:

a) $\log_5 7 = \dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}$

b) $\log_8 251 = \dfrac{\lg 251}{\lg 8}$

c) $\log_8 512 = \dfrac{\mathrm{lb}512}{\mathrm{lb}8} = \dfrac{9}{3} = 3$

d) $\log_3 39 = \dfrac{\log_5 39}{\log_5 3}$

e) $\lg 24 = \dfrac{\log_{22} 24}{\log_{22} 10}$

f) $\lg\left(3 \cdot 10^8\right) = 8 \cdot \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 10}$

g) $\mathrm{lb}1 = \dfrac{\log_{\frac{5}{7}} 1}{\log_{\frac{5}{7}} 2} = 0$

h) $\ln \pi = \dfrac{\log_{\sqrt{2}} \pi}{\log_{\sqrt{2}} e}$

i) $\lg 9000 = 2\dfrac{\ln 9}{\ln 10}$

j) $\mathrm{lb}64 = \dfrac{\ln 64}{\ln 2}$

Aufgabe 3:

a) $\ln x^3 = 3 \ln x$

b) $\ln 7x = \ln 7 + \ln x$

c) $\ln \dfrac{4x}{5} = \ln x + \ln \dfrac{4}{5}$

d) $\ln \dfrac{2}{x} = \ln 2 - \ln x$

e) $\ln 4x^4 = \ln 4 + 4 \ln x$

f) $\ln \dfrac{2x^{-1}}{3} = \ln \dfrac{2}{3} - \ln x$

g) $\lg ax = \dfrac{lna + \ln x}{\ln 10}$

h) $\log_3 5x^4 = \dfrac{\ln 5 + 4 \ln x}{\ln 3}$

i) $\log_5 \dfrac{4x^6}{5} = \dfrac{\ln 4 - \ln 5 + 6 \ln x}{\ln 5}$

j) $\log_a \dfrac{bx^c}{d} = \dfrac{\ln b - \ln d + c \ln x}{\ln a}$

k) $\log_7 \left(\dfrac{5}{3x}\right)^3 = 3 \cdot \dfrac{\ln 5 - \ln 3 - \ln x}{\ln 7}$

l) $\log_a \left(\dfrac{b}{dx^c}\right)^r = r \cdot \dfrac{\ln b - \ln d - \ln x}{\ln a}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.10.1).

16.7.11 Lösungen zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1:

$a)\ \Rightarrow x = 2$	$b)\ \Rightarrow x = 1$	$c)\ \Rightarrow x = -3$
$d)\ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	$e)\ \Rightarrow x = -2$	$f)\ \Rightarrow x = \frac{1}{5}$
$g)\ \Rightarrow x = 2$	$h)\ \Rightarrow x = -5$	$i)\ \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$
$j)\ \Rightarrow x = 2$	$k)\ \Rightarrow x = -8$	$l)\ \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$
$m)\ \Rightarrow x = 6$	$n)\ \Rightarrow x = 14$	$o)\ \Rightarrow x = -18$
$p)\ \Rightarrow x = -20$	$q)\ \Rightarrow x = 3$	$r)\ \Rightarrow x = \frac{7}{5}$
$s)\ \Rightarrow x = 8,4$	$t)\ \Rightarrow x = -1,2$	$u)\ \Rightarrow x = 42,5$
$v)\ \Rightarrow x = 8,6$	$w)\ \Rightarrow x = -22,2$	$x)\ \Rightarrow x = 41,4$

Aufgabe 2:

$a)\ \Rightarrow x = \frac{2}{3}$	$b)\ \Rightarrow x = \frac{21}{4}$	$c)\ \Rightarrow x = \frac{54}{7}$
$d)\ \Rightarrow x = -\frac{30}{7} = 5$	$e)\ \Rightarrow x = \frac{8}{9}$	$f)\ \Rightarrow x = -44$
$g)\ \Rightarrow x = \frac{13}{30}$	$h)\ \Rightarrow x = -\frac{2}{35}$	$i)\ \Rightarrow x = -\frac{32}{135}$
$j)\ \Rightarrow x = 2,4$	$k)\ \Rightarrow x = \frac{1}{35}$	$l)\ \Rightarrow x = -20,892 = x\frac{5}{6}$
$m)\ x = -\frac{21}{8}$	$n)\ x = \frac{21}{20}$	$o)\ x = -\frac{16}{63}$
$p)\ x = -\frac{5}{12}$	$q)\ x = \frac{96}{21}$	$r)\ x = -\frac{5}{18}$
$s)\ x = \frac{55}{12}$	$t)\ x = -\frac{3}{80}$	$u)\ x = -\frac{8}{7}$
$v)\ x = \frac{1}{70}$	$w)\ x = \frac{21}{50}$	$x)\ x = \frac{371}{15}$

Aufgabe 3:

$a)\ \Rightarrow x = 2$	$b)\ \Rightarrow x = 9$	$c)\ \Rightarrow x = 1$
$d)\ \Rightarrow x = 2$	$e)\ \Rightarrow x = 22$	$f)\ \Rightarrow x = 9$
$g)\ \Rightarrow x = 4$	$h)\ \Rightarrow x = -4$	$i)\ \Rightarrow x = -5$
$j)\ \Rightarrow x = -15$	$k)\ \Rightarrow x = -7$	$l)\ \Rightarrow x = -42$
$m)\ \Rightarrow x = \frac{2}{3}$	$n)\ \Rightarrow x = \frac{3}{4}$	$o)\ \Rightarrow x = \frac{3}{4}$
$p)\ \Rightarrow x = -\frac{3}{10}$	$q)\ \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	$r)\ \Rightarrow x = \frac{7}{8}$
$s)\ \Rightarrow x = 3,8$	$t)\ \Rightarrow x = -1,7$	$u)\ \Rightarrow x = -5,73$
$v)\ \Rightarrow x = -8,4$	$w)\ \Rightarrow x = 4,28$	$x)\ \Rightarrow x = -6,128$

Aufgabe 4:

$a)\ \Rightarrow x = 2$	$b)\ \Rightarrow x = 5$	$c)\ \Rightarrow x = 6$
$d)\ \Rightarrow x = 7$	$e)\ \Rightarrow x = 11$	$f)\ \Rightarrow x = -1$
$g)\ \Rightarrow x = 1$	$h)\ \Rightarrow x = 6$	$i)\ \Rightarrow x = 28$
$j)\ \Rightarrow x = 6$	$k)\ \Rightarrow x = 26$	$l)\ \Rightarrow x = -122$

Aufgabe 5:

$a)\ \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$	$b)\ \Rightarrow x = \frac{9}{2}$
$c)\ \Rightarrow x = -\frac{55}{9}$	$d)\ \Rightarrow x = 5$
$e)\ \Rightarrow x = -1$	$f)\ \Rightarrow x = 75$
$g)\ \Rightarrow x = \frac{7}{4}$	$h)\ \Rightarrow x = 1$
$i)\ \Rightarrow x = \frac{1}{16}$	$j)\ \Rightarrow x = \frac{47}{22}$
$k)\ \Rightarrow x = -\frac{7}{5}$	$l)\ \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$
$m)\ \Rightarrow x = -\frac{5}{22}$	$n)\ \Rightarrow x = -\frac{57}{192}$
$o)\ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\frac{8}{9} - \sqrt{3}}$	$p)\ \Rightarrow x = -\frac{\pi + \sqrt{e}}{e + \sqrt{2}}$

Aufgabe 6:

$a)\quad \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ $\qquad b)\quad \Rightarrow x = -\frac{53}{12}$

$c)\quad \Rightarrow x = \frac{17a-3}{6}$ $\qquad d)\quad \Rightarrow x = -\frac{39}{38}$

$e)\quad \Rightarrow x = -\frac{87}{26}$ $\qquad f)\quad \Rightarrow x = a$

$g)\quad \Rightarrow x = \frac{a+8}{a+11}$ $\qquad h)\quad \Rightarrow x = \frac{67-15a}{6a+4}$

$i)\quad \Rightarrow x = \frac{2a+2}{29-a}$ $\qquad j)\quad \Rightarrow x = 3 - \frac{13}{(2-4a)(b-4)}$

$k)\quad \Rightarrow x = \frac{17a-53}{16}$ $\qquad l)\quad \Rightarrow x = -\frac{12a-50}{29-4a}$

Aufgabe 7:

$a)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $\qquad b)\quad \Rightarrow x = 9$

$c)\quad \Rightarrow x = \frac{1}{289}$ $\qquad d)\quad \Rightarrow x = \frac{e^2}{5}$

$e)\quad \Rightarrow x = e^{-\sqrt{2}+\ln 13}$ $\qquad f)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}$

$g)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 7$ $\qquad h)\quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}(6+\ln 2) = 3 + \ln\sqrt{2}$

Aufgabe 8:

$a)\quad = -2x^2 + 9x + 4$ $\qquad b)\quad = 6x^2 + 10x + 37$

$c)\quad = -x^2 + 14x + 27$ $\qquad d)\quad = 6x^2 - 33x + 58$

$e)\quad = -3x^2 - 21x + 21$ $\qquad f)\quad = \frac{7}{2}x^2 - 35x - \frac{67}{4}$

$g)\quad = 2x^2 - 7x - 6$ $\qquad h)\quad = 18x^2 + 6x - 14$

$i)\quad = 4x^2 + 39x - 49$ $\qquad j)\quad = -1,75x^2 + \frac{61}{20}x + 2,5$

$k)\quad = \frac{-11x^2 + 43x}{12}$ $\qquad l)\quad = -\frac{19}{15}x^2 + \frac{251}{60}x + \frac{509}{32}$

Aufgabe 9:

$a)\ \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $b)\ \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

$c)\ \Rightarrow x = 2$ $d)\ \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

$e)\ \Rightarrow x = \frac{75}{32}$ $f)\ \Rightarrow x = \sqrt[5]{11}$

$g)\ \Rightarrow x = 2\sqrt[4]{2}$ $h)\ \Rightarrow x_{1,2} = \pm 80\sqrt{10}$

Aufgabe 10:

$a)\ \Rightarrow x \approx 1,3863$ $b)\ \Rightarrow x \approx -0,4014$

$c)\ \Rightarrow x \approx 0,4700$ $d)\ \Rightarrow x \approx 0,5945$

$e)\ \Rightarrow x \approx 1,1133$ $f)\ \Rightarrow x \approx 0,3962$

$g)\ \Rightarrow x \approx 2,7740$ $h)\ \Rightarrow x \approx 2,6021$

$i)\ \Rightarrow x \approx 5,3171$ $j)\ \Rightarrow x \approx 21,8717$

$k)\ \Rightarrow x \approx 0,6486$ $l)\ \Rightarrow x \approx 0,4892$

$m)\ \Rightarrow x \approx 35,1716$ $n)\ \Rightarrow x \approx -1,3785$

$o)\ \Rightarrow x \approx -0,2589$ $p)\ \Rightarrow x \approx 4,2500$

$q)\ \Rightarrow x = 0$ $r)\ \Rightarrow x \approx -0,4901$

Aufgabe 11:

$a)\ \Rightarrow x \approx 0,0498$ $b)\ \Rightarrow x \approx 53,5982$

$c)\ \Rightarrow x \approx 548,317$ $d)\ \Rightarrow x \approx 296,826$

$e)\ \Rightarrow x \approx -3,2680$ $f)\ \Rightarrow x \approx 104164,0000$

$g)\ \Rightarrow x \approx 0,5773$ $h)\ \Rightarrow x \approx 0,1581$

$i)\ \Rightarrow x \approx -3,0000$ $j)\ \Rightarrow x \approx 9,2512 \cdot 10^{-11}$

$k)\ \Rightarrow x \approx 6,5208$ $l)\ \Rightarrow x \approx 0,7012$

$m)\ \Rightarrow x \approx 1,0668$ $n)\ \Rightarrow x \approx 0,2125$

$o)\ \Rightarrow x = -3,2$ $p)\ \Rightarrow x \approx -0,8074$

Aufgabe 12:

$a)\ \Rightarrow x = \ln 2$	$b)\ \Rightarrow x = 0,158975$
$c)\ \Rightarrow x = 2,4365$	$d)\ \Rightarrow x = 0,33985$
$e)\ \Rightarrow x = -1,18015$	$f)\ \Rightarrow x = -0,145703$
$g)\ \Rightarrow x = 1,14473$	$h)\ \Rightarrow x = -0,552241$

Aufgabe 13:

$a)\ x = \frac{11}{2}$	$b)\ x = \frac{1}{5}$	$c)\ x = \frac{16}{13}$	$d)\ x = 2$
$e)\ x = \frac{7}{3}$	$f)\ x = \frac{1}{2}$	$g)\ x = 8$	$h)\ x = \frac{8}{9}$
$i)\ x = \frac{17}{4}$	$j)\ x = -8$	$k)\ x = -\frac{13}{2}$	$l)\ x = 1$
$m)\ x = \frac{47}{32}$	$n)\ x = \frac{57}{23}$	$o)\ x = -\frac{19}{15}$	$p)\ x = \frac{14}{13}$
$q)\ x = \frac{54}{65}$	$r)\ x = \frac{86}{49}$	$s)\ x = -1$	$t)\ x = -\frac{33}{23}$
$u)\ x = \frac{30}{167}$	$v)\ x = \frac{275}{327}$	$w)\ x = \frac{303}{85}$	$x)\ x = -\frac{263}{1175}$
$y)\ x = \frac{2901}{857}$	$z)\ x = \frac{32}{399}$		

Aufgabe 14:

$a)\ x = \frac{32}{3}$	$b)\ x = \frac{56}{5}$	$c)\ x = -\frac{14}{3}$	$d)\ x = -31$
$e)\ x = -\frac{25}{6}$	$f)\ x = -\frac{64}{27}$	$g)\ x = -\frac{5}{18}$	$h)\ x = -\frac{13}{14}$
$i)\ x = \frac{94}{9}$	$j)\ x = \frac{14}{5}$	$k)\ x = \frac{4}{57}$	$l)\ x = -\frac{875}{429}$
$m)\ x = -\frac{29}{22}$	$n)\ x = \frac{159}{134}$	$o)\ x = -\frac{16}{15}$	$p)\ x = \frac{3}{68}$
$q)\ x = \frac{455}{72}$	$r)\ x = \frac{159}{59}$	$s)\ x = \frac{55}{74}$	$t)\ x = 2$

Aufgabe 15:

a) $x = 4$ *b)* $x = 4$ *c)* $x = 1$ *d)* $x = 3$
e) $x = \frac{13}{5}$ *f)* $x = \frac{1}{5}$ *g)* $x = 13$ *h)* $x = \frac{9}{4}$
i) $x = 2$ *j)* $x = \frac{19}{5}$ *k)* $x = -\frac{19}{3}$ *l)* $x = -\frac{200}{7}$
m) $x = \frac{31}{4}$ *n)* $x = 2$

Aufgabe 16:

a) $m = 15$ *b)* $h = 6$ *c)* $T = 4,5$
d) $M = 1500$ *e)* $y = 5,35$ *f)* $a = -\frac{108}{7}$
g) $T = \frac{4}{5}$ *h)* $r = 20$ *i)* $a = \frac{3}{16}$
j) $r = \frac{171}{400}$ *k)* $o = \frac{7}{3}$ *l)* $D = 15$
m) $o = -0,38475$ *n)* $d = \frac{32}{33}$ *o)* $d \in \mathbb{C}$ beliebig

Aufgabe 17:

a) $x = c - a - b$ *b)* $x = \frac{d+c}{a}$
c) $x = \frac{zt - hf}{gl}$ *d)* $x = \frac{d}{a} + b$
e) $x = \frac{ad}{b}$ *f)* $x = \frac{ka}{d}$
g) $x = \frac{p-q}{b-d}$ *h)* $x = a + d - t(z+s)$
i) $x = \frac{z(f+u)}{ar} - \frac{d}{a}$ *j)* $x = \frac{r - g(a+d)}{t}$
k) $x = d + \frac{l(e-d)}{a}$ *l)* $x = \frac{p}{s} - \frac{t+q}{ws}$

Aufgabe 18:

$a)\ a = \frac{bc}{d}\ ;\ b = \frac{ad}{c}\ ;\ c = \frac{ad}{b}\ ;\ d = \frac{bc}{a}$

$b)\ a = \frac{bc}{d}\ ;\ b = \frac{ad}{c}\ ;\ c = \frac{ad}{b}\ ;\ d = \frac{bc}{a}$

$c)\ a = b + c - d\ ;\ b = a + d - c\ ;\ c = a + d - b\ ;\ d = b + c - a$

$d)\ a = b(d - c)\ ;\ b = \frac{a}{d - c}\ ;\ c = d - \frac{a}{b}\ ;\ d = c + \frac{a}{b}$

$e)\ a = \frac{d}{eb} - \frac{c}{b}\ ;\ b = \frac{d}{ea} - \frac{c}{a}\ ;\ c = \frac{d}{e} - ab\ ;\ d = e(ab + c)\ ;\ e = \frac{1}{e(ab + c)}$

$f)\ a = c(d - e) - b\ ;\ b = c(d - e) - a\ ;\ c = \frac{a + b}{d - e}\ ;\ d = \frac{a + b}{c} + e\ ;\ e = d - \frac{a + b}{c}$

$g)\ a = \frac{d}{e(b - c)}\ ;\ b = \frac{d}{ea} + c\ ;\ c = b - \frac{d}{ea}\ ;\ d = ae(b - c)\ ;\ e = \frac{d}{a(b - c)}$

$h)\ a = (b - d)(e - gh - c)\ ;\ b = d + \frac{a}{e - gh - c}\ ;\ c = e - gh - \frac{a}{b - d}\ ;\ d = b - \frac{a}{e - gh - c}\ ;$

$e = c + gh + \frac{a}{b - d}\ ;\ g = \frac{e - c - \frac{a}{b-d}}{h}\ ;\ h = \frac{e - c - \frac{a}{b-d}}{g}$

$i)\ a = \frac{d - e}{f(b + c)}\ ;\ b = \frac{d - e}{fa} - c\ ;\ c = \frac{d - e}{fa} - b\ ;\ d = af(b + c) + e\ ;$

$e = d - af(b + c)\ ;\ f = \frac{d - e}{a(b + c)}$

$j)\ a = \frac{c(e + 1)}{d(b - e)}\ ;\ b = e + \frac{c(e + 1)}{da}\ ;\ c = \frac{(b - e)da}{e + 1}\ ;\ d = \frac{c(e + 1)}{d(b - e)}\ ;\ e = \frac{ab - \frac{c}{d}}{a - \frac{c}{d}}$

Aufgabe 19:

$x = 67,2$

Aufgabe 20:

$a)\ x = -4$	$b)\ x = -8$	$c)\ x = 5$
$d)\ x = -16$	$e)\ x = 8$	$f)\ x = -2$
$g)\ x = 11$	$h)\ x = -\frac{1}{13}$	$i)\ x = \frac{1}{2}$
$j)\ x = -\frac{7}{5}$	$k)\ x = -\frac{33}{7}$	$l)\ x = -\frac{1}{3}$
$m)\ x = -12$	$n)\ x = -18$	$o)\ x = 12$
$p)\ x = -30$	$q)\ x = -\frac{8}{5}$	$r)\ x = -\frac{48}{5}$
$s)\ x = -3,2$	$t)\ x = 1,5$	$u)\ x = -3$
$v)\ x = -7,4$	$w)\ x = -34,8$	$x)\ x = -17$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.11.1).

16.7.12 Lösungen zur quadratischen Ergänzung

Aufgabe 1:

$a)\quad \Rightarrow x_1 = -1$

$b)\quad \Rightarrow x_1 = 4$

$c)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{17}$

$d)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{14}$

$e)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

$f)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{145}}{6}$

$g)\quad \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

$h)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$

$i)\quad \Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = -2$

$j)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{9}{32} \pm \dfrac{\sqrt{521}}{32}$

$k)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{5}{4} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{4}$

$l)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{11}{6} \pm \dfrac{\sqrt{249}}{6}$

$m)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{11}{72} \pm \dfrac{\sqrt{3865}}{72}$

$n)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{3}{19} \pm \dfrac{7\sqrt{6}}{19}$

$o)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4} \pm \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4\sqrt{34}+3}}{4}$

$p)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{\pi}{2e+1} \pm \dfrac{\sqrt{4e\ln 2 + 2\ln 2 + \pi^2}}{2e+1}$

Aufgabe 2:

a) $\Rightarrow x_1 = -2$

b) $\Rightarrow x_1 = 8$

c) $\Rightarrow x_1 = -5$

d) $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

e) $\Rightarrow x_1 = -1$

f) $\Rightarrow x_1 = 3$

g) $\Rightarrow x_{1,2} = 2$

h) $\Rightarrow x_{1,2} = -3$

i) $\Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{14}$

j) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{97}}{2}$

k) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$

l) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{70}}{10}$

m) $\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{22}}{4}$

n) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{73}}{4}$

o) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{161}}{10}$

p) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{25}{112} \pm \frac{\sqrt{2585}}{112}$

q) $\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

r) $\Rightarrow x_{1,2} = x_1 = 1 \wedge x_2 = -5$

s) $\Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \frac{\sqrt{210}}{3}$

t) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{9}{16} \pm \frac{\sqrt{1041}}{16}$

u) $\Rightarrow x_{1,2} = x_1 = 1 \wedge x_2 = -\frac{3}{2}$

v) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{34}}{2}$

w) $\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{37}}{8}$

x) $\Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$

Aufgabe 3:

$a)\ a=\sqrt{d-b^2-c}\ ;\ b=\sqrt{d-a^2-c}\ ;\ c=d-a^2-b^2\ ;\ d=a^2+b^2+c$

$b)\ a=\sqrt{\frac{c}{d^3}}\ ;\ c=a^2d^3\ ;\ d=\sqrt{\frac{c}{da}}$

$c)\ a=\frac{c-br}{r^2}\ ;\ b=\frac{c+ar^2}{r}\ ;\ c=br-ar^2\ ;\ r_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$

$d)\ a_{1,2}=\frac{b}{2r}\left(1\pm\sqrt{5}\right)\ ;\ b_{1,2}=\frac{a}{2r}\left(1\pm\sqrt{5}\right)\ ;\ r_{1,2}=\frac{b}{2a}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$

$e)\ a=ce^{-b}\ ;\ b=\ln\left(\frac{c}{a}\right)\ ;\ c=ae^b$

$f)\ a=\sqrt{\frac{e^b}{s}}\ ;\ b=\ln\left(sa^2\right)\ ;\ s=\frac{e^b}{a^2}$

$g)\ d=\ln\left(\cos(w)-r^3\right)\ ;\ r=\sqrt[3]{\cos(w)-e^d}\ ;\ w=\arccos\left(e^d+r^3\right)$

$h)\ t=\frac{1}{w}\left(\phi+\arccos\left(e^{-yz}\right)\right)\ ;\ w=\frac{1}{t}\left(\phi+\arccos\left(e^{-yz}\right)\right)\ ;\ y=-\frac{1}{z}\ln\left(\sin\left(wt-\phi\right)\right)\ ;$

$z=-\frac{1}{y}\ln\left(\sin\left(wt-\phi\right)\right)\ ;\ \phi=wt-\arccos\left(e^{-yz}\right)$

$i)\ a=\frac{1}{b}\left(c+\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)\right)\ ;\ b=\frac{1}{a}\left(c+\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)\right)\ ;$

$c=ab-\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)\ ;\ r=t+\arcsin\left(\cos\left(e^{ab-c}\right)\right)\ ;$

$t=r-\arcsin\left(\cos\left(e^{ab-c}\right)\right)$

$j)\ a_{1,2}=\pm\sqrt{d-(b^2-b)^4e^{4c}}\ ;\ b=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt[4]{a^2+d}}{e^c}}\ ;\ c=\ln\left(\frac{\sqrt[4]{a^2+d}}{b^2-b}\right)\ ;$

$d=(b^2-b)^4e^{4c}-a^2$

$k)\ a=e^{\frac{\ln(b\arccos(c))}{e^{\sqrt[n]{d}}}}\ ;\ b=\frac{a^{e^{\sqrt[n]{d}}}}{\arccos(c)}\ ;\ c=\cos\left(\frac{a^{e^{\sqrt[n]{d}}}}{b}\right)\ ;\ d=\left(\ln\left(\log_a\left(b\arccos(c)\right)\right)\right)^n\ ;$

$n=\log_{\ln(\log_a(b\arccos(c)))}d$

$l)\ a_{1,2}=\frac{\sin(r)^2}{2e^b}\pm\sqrt{\left(\frac{\sin(r)^2}{2e^b}\right)^2-e^b\sin(r)}\ ;$

$b_{1,2}=\ln\left(\left|-\frac{a^2}{2\sin(r)}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{2\sin(r)}\right)^2+a\sin(r)}\right|\right)\ ;$

$r_{1,2}=\arcsin\left(\frac{e^{2b}}{2a}\pm\sqrt{e^ba+\left(\frac{e^{2b}}{2a}\right)^2}\right)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.12.1).

16.7.13 Lösungen zur Substitution

Aufgabe 1:

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8$ mit: $y=x^2+x+1 \Rightarrow y^3=8$

b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c$ mit: $y^2=4x+a \Rightarrow \sqrt{y^2}=6b-c$

c) $(18x-4ab)^2=c$ mit: $\sqrt{y}=18x-4ab \Rightarrow \sqrt{y}^2=c$

d) $2^{2a-c}=32$ mit: $b=2a-c \Rightarrow 2^b=32$

e) $x=4a$ mit: $y=x+4a \Rightarrow y+4a=4a$

f) $x^2+8x+16=0$ mit: $(y+4)^2=x^2+8x+16 \Rightarrow (y+4)^2=0$

g) $(3a+2x)(2x-3a)=0$ mit: $y=2x+3a \Rightarrow y^2-6ya=0$

h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2$ mit: $y=x^2+4x \Rightarrow \ln y=2$

Aufgabe 2:

a) $x^3+4x^2-x-8=0 \Rightarrow y-8=0$ mit: $y=x^3+4x^2-x$

b) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=0 \Rightarrow y-\frac{1}{y}=0$ mit: $y=\frac{x}{2}$

c) $\frac{x^2}{ab}+\frac{5}{ab}-3=0 \Rightarrow dx^2+5d-3=0$ mit : $d=\frac{1}{ab}$

d) $\frac{ax^2+bx-c}{5}=0 \Rightarrow \frac{y}{5a}=0$ mit: $y=a\left(ax^2+bx-c\right)$

e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0 \Rightarrow gx-f=0$ mit: $g=a+b+c+d+e$

f) $x^2+4x-8=0 \Rightarrow \left(\frac{y}{4}+2\right)^2=0$ mit: $y=4x-8$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.13.1).

16.7.14 Lösungen zu Gleichungssysteme

Aufgabe 1:

$a)$	$a = 31,5$ und	$b = 7,5$
$b)$	$a = \frac{19}{36}$ und	$b = \frac{77}{36}$
$c)$	$a = -4 \vee -6$ und	$b = -6 \vee -4$
$d)$	$a = -\frac{25}{7}$ und	$b = -\frac{1}{7}$
$e)$	$a = \frac{71}{18}$ und	$b = \frac{17}{18}$
$f)$	$a = -\frac{68}{7}$ und	$b = -\frac{17}{7}$
$g)$	$a \approx -1,856$ und	$b \approx -1,392$
$h)$	$a \approx 1,525$ und	$b \approx -0,320$
$i)$	$a = 2 \vee 5$ und	$b = 5 \vee 2$
$j)$	$a = \frac{89}{25}$ und	$b = \frac{948}{25}$
$k)$	$a = 3\sqrt{2} \vee -3\sqrt{2}$ und	$b = \frac{4}{3}\sqrt{2} \vee \frac{4}{3}\sqrt{2}$
$l)$	$a \approx 4,541$ und	$b \approx -0,075$
$m)$	$a = \frac{581}{44}$ und	$b = -\frac{3453}{88}$
$n)$	$a \approx 0,420$ und	$b \approx -0,047$
$o)$	$a = 36$ und	$b = 113,7\overline{8}$
$p)$	$a \approx -0,473 \vee 1,880$ und	$b \approx 1,880 \vee -0,473$

Aufgabe 2:

$a)$ $a = -\frac{23}{7}$; $b = -\frac{132}{91}$; $c = -\frac{131}{13}$

$b)$ $a = -\frac{18}{125}$; $b = \frac{324}{125}$; $c = -\frac{159}{125}$

$c)$ $a = \frac{262}{431}$; $b = \frac{458}{431}$; $c = -\frac{59}{431}$

$d)$ $a = 54,5$; $b = 16,3095$; $c = 20,1786$

$e)$ $a = -4,9014$; $b = 125,513$; $c = -3,17555$

$\vee$ $a = -2,91244$; $b = 0,73895$; $c = 0,004336$

Aufgabe 3:

$a)\ a = \frac{119}{667}\ ;\ b = \frac{709}{667}\ ;\ c = -\frac{127}{667}\ ;\ d = \frac{729}{667}$

$b)\ a = \frac{265}{141}\ ;\ b = \frac{4184}{141}\ ;\ c = \frac{449}{94}\ ;\ d = -\frac{1159}{94}$

$c)\ a = -2,41989\ ;\ b = -2,87754\ ;\ c = 0,437646\ ;\ d = -3,68417$

$\vee\ \ a = 0,46511\ ;\ b = 3,57802\ ;\ c = -3,09291\ ;\ d = 3,73972$

$e)\ a = -0,729483\ ;\ b = 0,036474\ ;\ c = 0,269301\ ;\ d = 0,340426$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.14.1).

16.7.15 Lösungen zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1:

$a)\ 5! = 120$ $\quad b)\ 3! = 6$ $\quad c)\ \frac{7!}{5!} = 120$

$d)\ \frac{3!}{4!} \cdot 0! = \frac{1}{4}$ $\quad e)\ \frac{4!b!}{b!} = 24$ $\quad f)\ 4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$

Aufgabe 2:

$a)\ \binom{2}{1} = 2$ $\quad b)\ \binom{8}{4} = 70$ $\quad c)\ \binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0} = 10$

$d)\ \binom{7}{2} = 21$ $\quad e)\ \binom{3}{1} = 3$ $\quad f)\ \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$

Aufgabe 3: *Drücke die Terme durch Fakultäten aus.*

$a)\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ $\quad b)\ 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{11!}{8!}$

$c)\ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{6! \cdot 19!}{22! \cdot 3!}$ $\quad d)\ 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9! \cdot 3!}{6!}$

$e)\ 11 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 23 = \frac{23! \cdot 11!}{20! \cdot 8!}$ $\quad f)\ \frac{6 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 5 \cdot 65}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10} = \frac{67! \cdot 7! \cdot 9!}{64! \cdot 3! \cdot 13!}$

Aufgabe 4: *Beweise folgende Identitäten.*

$$a)\quad \begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\right) \qquad \text{mit: } n(n-1)! = n! \\ &= \left(\frac{n!}{(k!(n-k)!}\right) \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.15.1).

16.7.16 Lösungen zu den gemischten Algebraaufgaben

Aufgabe 1:

a) $1,41\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ \frac{11}{6}\ ;\ 2\ ;\ 2,13\ ;\ \frac{15}{7}\ ;\ \frac{9}{4}\ ;\ 2,26$.

b) $\frac{3}{8}\ ;\ 0,45\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{9}\ ;\ 0,57\ ;\ \frac{4}{7}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}$.

c) $\sqrt{5}\ ;\ \frac{37}{16}\ ;\ 2,33\ ;\ \frac{7}{3}\ ;\ \sqrt{6}\ ;\ 2,51\ ;\ \frac{14}{5}\ ;\ \frac{17}{6}$.

d) $e\ ;\ \frac{19}{6}\ ;\ \frac{13}{4}\ ;\ \pi\ ;\ 3,141\ ;\ 3,\bar{3}\ ;\ \ln 36\ ;\ \sqrt{13}$.

e) $24,79\ ;\ \sqrt{620}\ ;\ 5^2\ ;\ \lg 10^{25,01}\ ;\ 8\pi\ ;\ \frac{51}{2}\ ;\ 3^3\ ;\ \frac{128}{25}$.

f) $\frac{2}{3}\ ;\ 0,69\ ;\ \ln 2\ ;\ \frac{7}{10}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 0,734\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{e}{3}$.

g) $-\frac{15}{6}\ ;\ (-1,34)^3\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\ ;\ -\frac{7}{3}\ ;\ -\ln \pi^2\ ;\ -2,27\ ;\ -\frac{5e}{6}\ ;\ -\sqrt{6,25}$.

Aufgabe 2:

a) $x_{1,2} = \pm 2$

b) $x_1 = -3 \wedge x_2 = -1$

c) $x_1 = 4 \wedge x_2 = 5$

d) $x_1 = -1 \wedge x_2 = 6$

e) $x_1 = 2,25 \wedge x_2 = -3,3$

f) $x_1 = 1,45 \wedge x_2 = -2,05$

g) $x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = -\frac{3}{4}$

h) $x_1 = -\frac{7}{3} \wedge x_2 = -\frac{2}{9}$

i) $x_1 = \sqrt{3} \wedge x_2 = -\sqrt{2}$

j) $x_1 = \ln 2 \wedge x_2 = \sqrt[3]{e\pi^4}$

Aufgabe 3:

$a)\quad \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{3}{22}$

$b)\quad \Rightarrow c = \frac{V}{ab} = \frac{120}{9}$

$c)\quad \Rightarrow G = \frac{3V}{h} = 15$

$d)\quad \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{128}{27}$

$e)\quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \approx 0,24$

$f)\quad \Rightarrow R_2 = \frac{U}{I} - R_1 \approx -463,33$

$g)\quad \Rightarrow R_1 = \frac{I}{U} - R_2 \approx -999,98$

$h)\quad \Rightarrow c = \frac{O - 2ab}{2a + 2b} = 6,75$

$i)\quad \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx 0,57$

$j)\quad \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$

$k)\quad \Rightarrow a = \frac{2A}{h} - c = -\frac{81}{4}$

$l)\quad \Rightarrow s = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}} \approx 8,83$

$m)\quad \Rightarrow s_1 = \frac{\frac{O}{\pi} - r_1^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} \approx -1,23$

$n)\quad \Rightarrow r = \sqrt{\frac{360}{\pi\alpha}\left(A + \frac{sh}{2}\right)} \approx 3,54$

$o)\quad \Rightarrow r_{2_{1,2}} = -\frac{s_1}{2} \pm \sqrt{\frac{s_1^2}{4} - r_1^2 - s_1 r_1 + \frac{O}{\pi}} \Rightarrow r_{2_1} \approx 0,49 \wedge r_{2_2} \approx -1,90$

$p)\quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} + \frac{f}{a}} \Rightarrow x_1 \approx 0,81 \wedge x_2 \approx -1,64$

$q)\quad \Rightarrow t_{1,2} = -\frac{v}{a} \pm \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - \frac{2s}{a} + \frac{2x}{a}} \Rightarrow t_1 \approx 2,85 \wedge t_2 \approx -3,08$

$r)\quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{N}{A} = 0,0017$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6	7
v	1	2	$1,75$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\sqrt{2}$
t	2	4	$2,25$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
$a = v \cdot t$	2	8	$3,9375$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{8}{5}$	$\sqrt{6}$
$x = \frac{1}{2}at^2 + vt$	6	72	$\approx 13,90$	$\approx 0,48$	$\approx 0,10$	$\approx -3,02$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{9}}}$	$\approx 1,06$	$\approx 1,34$	$\approx 1,23$	$\approx 1,014$	$\approx 1,009$	$\approx 1,09$	$\frac{3}{\sqrt{7}}$
$L = \frac{x}{\gamma}$	$\approx 5,66$	$\approx 53,67$	$\approx 11,29$	$\approx 0,47$	$\approx 0,10$	$\approx -2,77$	$\frac{5}{6}\sqrt{42}$
$m = \frac{4}{3}\pi x^3$	$\approx 904,78$	$\approx 1,56 \cdot 10^6$	$\approx 5,40 \cdot 10^5$	$\approx 0,46$	$\approx 0,0046$	$\approx -115,63$	$\approx 961,91$
$F = m\gamma a$	$\approx 1919,22$	$\approx 1,68 \cdot 10^7$	$\approx 2,62 \cdot 10^6$	$\approx 0,18$	$\approx 0,00046$	$\approx 201,86$	$\approx 2671,67$
$r = \frac{\gamma a}{v^2}$	$2,12$	$\approx 2,68$	$\approx 1,58$	$\approx 1,52$	$\approx 0,126$	$\approx -1,21$	$\frac{3}{14}\sqrt{42}$
$E = \frac{1}{2}mv^2$	$\approx 1809,56$	$\approx 3,13 \cdot 10^6$	$\approx 8,28 \cdot 10^5$	$\approx 0,058$	$\approx 0,00037$	$\approx -83,25$	$\approx 961,91$
$h = \frac{E}{F}$	$\approx 0,94$	$\approx 0,19$	$\approx 0,32$	$\approx 0,33$	$\approx 0,793$	$\approx -0,41$	$\approx 0,36$

Aufgabe 6:

a) $3x = 81$

b) $2x - 4 = 11$

c) $x - 10 = 5x$

d) $2x + 7 = \dfrac{x}{4}$

e) $\dfrac{5}{2x} + 5 = 8$

f) $\dfrac{x}{6} + 3 = x + 3$

g) $4x + 2(x + 3) = 0$

h) $\dfrac{1}{2}(x - 8) = 4 + x$

i) $\dfrac{x}{3} + 4 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{1}{9} + x \cdot x = \dfrac{x}{2}$

k) $(5 + x)(2x - 10) = x - 24$

l) $-x + 11 = 3x + 5x$

m) $(x + 7)(x + 4) = \dfrac{x}{5}$

n) $x^3 + 3x^2 = 11 - \sqrt[4]{x}$

o) $\sqrt{8x} = (x + 6)^2$

p) $\lg x - 12 = 2^x + 7x^2$

Aufgabe 6:

a) $\bullet + 0 = \bullet$

b) $\bullet - 0 = \bullet$

c) $\bullet + \bullet = 2 \cdot \bullet$

d) $\bullet + \bullet + \bullet = 3 \cdot \bullet$

e) $\bullet + (\bullet + \bullet) = 3 \cdot \bullet$

f) $(\bullet + \bullet) + \bullet = 3 \cdot \bullet$

g) $(\bullet \cdot \bullet) \cdot \bullet = \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet$

h) $\bullet \cdot (\bullet \cdot \bullet) = \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet$

i) $\bullet + \bullet - \bullet - \bullet = 0$

j) $\bullet \cdot \bullet - \bullet \cdot \bullet = 0$

Aufgabe 7:

$a)\ \bullet \cdot 1 = \bullet$

$b)\ \frac{\bullet}{1} = \bullet$

$c)\ \frac{\bullet}{\bullet} = 1$

$d)\ \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet} = \frac{\bullet}{\bullet}$

$e)\ \bullet \cdot \frac{\bullet}{\bullet} = \bullet$

$f)\ \frac{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet} = \bullet$

$g)\ \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$h)\ \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}$

$i)\ \frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$j)\ \frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}$

$k)\ \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \frac{\bullet}{\bullet} \cdot \bullet = \frac{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$l)\ \frac{\bullet}{\bullet} : \frac{\bullet}{\bullet} : \bullet = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet \cdot \bullet}$

$m)\ \frac{\bullet}{\bullet} + \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$n)\ \frac{\bullet}{\bullet} - \frac{\bullet}{\bullet} = \frac{\bullet \cdot \bullet - \bullet \cdot \bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$o)\ \frac{\bullet}{\bullet} + \bullet = \frac{\bullet + \bullet \cdot \bullet}{\bullet}$

$p)\ \frac{\bullet}{\bullet} - \bullet = \frac{\bullet - \bullet \cdot \bullet}{\bullet}$

Aufgabe 8:

$a)\ (\bullet + \bullet) \cdot \bullet = \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet$

$b)\ \bullet \cdot (\bullet + \bullet) = \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet$

$c)\ -(\bullet + \bullet) = -\bullet - \bullet$

$d)\ -\bullet \cdot (\bullet - \bullet) = -\bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet$

$e)\ \bullet \cdot (\bullet - \bullet) \cdot \bullet = \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet - \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet$

$f)\ \bullet \cdot (\bullet - \bullet + \bullet) = \bullet \cdot \bullet - \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet$

$g)\ (\bullet + \bullet) \cdot (\bullet + \bullet) = \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet$

$h)\ (\bullet + \bullet) \cdot (\bullet + \bullet) = \bullet^2 + 2 \cdot \bullet \cdot \bullet + \bullet^2$

$i)\ (\bullet - \bullet) \cdot (\bullet - \bullet) = \bullet^2 - 2 \cdot \bullet \cdot \bullet + \bullet^2$

$j)\ (\bullet + \bullet) \cdot (\bullet - \bullet) = \bullet^2 - \bullet^2$

$k)\ \bullet \cdot \bullet = \bullet^2$

$l)\ \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet \cdot \bullet = \bullet^3 \cdot \bullet^2$

$m)\ \bullet^{\bullet} \cdot \bullet^{\bullet} = \bullet^{\bullet + \bullet}$

$n)\ (\bullet^{\bullet})^{\bullet} = \bullet^{\bullet \cdot \bullet}$

$o)\ \frac{\bullet^{\bullet}}{\bullet^{\bullet}} = \bullet^{\bullet - \bullet}$

$p)\ (\bullet^{\bullet})^{\frac{\bullet}{\bullet}} = \bullet^{\bullet}$

Aufgabe 9:

$a)\ b = 2m$ und $g = 1m \Rightarrow f = 0,\bar{6}m$

$b)\ f = 25cm$ und $g = 1,5m \Rightarrow b = 0,3m$

$c)\ b = 20cm$ und $f = 10cm \Rightarrow g = 0,2m$

$d)\ b = 40cm$ und $g = 60cm \Rightarrow f = 0,24m$

$e)\ f = 12,5cm$ und $g = 2m \Rightarrow b = 0,1\bar{3}m$

$f)\ b = 30cm$ und $f = 5cm \Rightarrow g = 0,06m$

Aufgabe 10:

$a)\ m_1 = 5kg\ ;\ m_2 = 5kg\ ;\ v_1 = 4\frac{m}{s}\ ;\ v_2 = 2\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 2\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2' = 4\frac{m}{s}$

$b)\ m_1 = 5kg\ ;\ m_2 = 2kg\ ;\ v_1 = 4\frac{m}{s}\ ;\ v_2 = 2\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 1\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2' = \frac{19}{2}\frac{m}{s}$

$c)\ m_1 = 4kg\ ;\ m_2 = 6kg\ ;\ v_1 = 4\frac{m}{s}\ ;\ v_2' = 6\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 8\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2 = \frac{14}{3}\frac{m}{s}$

$d)\ m_1 = 1kg\ ;\ m_2 = 8kg\ ;\ v_1 = 10\frac{m}{s}\ ;\ v_2 = 10\frac{m}{s}\ ;\ v_2' = 5\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_1' = 50\frac{m}{s}$

$e)\ m_1 = 500g\ ;\ m_2 = 2kg\ ;\ v_1 = 0,08\frac{km}{s}\ ;\ v_2 = 0,04\frac{km}{s}\ ;\ v_1' = 35\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2' = 51,25\frac{m}{s}$

$f)\ m_1 = 0,01Mg\ ;\ m_2 = 4kg\ ;\ v_1 = 5\frac{km}{h}\ ;\ v_2 = 20\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 15\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2' = 27,5\frac{m}{s}$

$g)\ m_1 = \frac{1}{250}t\ ;\ m_2 = 50kg\ ;\ v_1 = \frac{1}{2}\frac{m}{s}\ ;\ v_2' = \frac{3}{4}\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = \frac{5}{8}\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_2 = 0,74\frac{m}{s}$

$h)\ m_1 = 250hg\ ;\ m_2 = \frac{1}{5}t\ ;\ v_1' = 20\frac{km}{h}\ ;\ v_2 = 4200\frac{m}{min}\ ;\ v_2' = 36\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow v_1 = 344\frac{m}{s}$

$i)\ m_1 = 5kg\ ;\ v_2' = 5\frac{m}{s}\ ;\ v_1 = 7\frac{m}{s}\ ;\ v_2 = 4\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 2\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow m_2 = 25kg$

$j)\ m_2 = 5kg\ ;\ v_2' = 2\frac{m}{s}\ ;\ v_1 = 9\frac{m}{s}\ ;\ v_2 = 3\frac{m}{s}\ ;\ v_1' = 4\frac{m}{s}\ ;\ \Rightarrow m_1 = 1kg$

Aufgabe 11:

$a)\ \bullet = \frac{\bullet}{\bullet}$

$b)\ \bullet = \frac{\bullet}{\bullet}$

$c)\ \bullet = -\frac{\bullet}{\bullet}$

$d)\ \bullet = \frac{\bullet + \bullet}{\bullet}$

$e)\ \bullet = \bullet + \bullet$

$f)\ \bullet = -\frac{\bullet + \bullet}{\bullet}$

$g)\ \bullet = -\frac{\bullet}{\bullet \cdot \bullet}$

$h)\ \bullet = \frac{\bullet \cdot (\bullet + \bullet)}{\bullet}$

$i)\ \bullet = \frac{\bullet}{\bullet\,(\bullet + \bullet)}$

$j)\ \bullet = \frac{\bullet \cdot \bullet \cdot (\bullet + \bullet)}{\bullet}$

$k)\ \bullet = \frac{\bullet}{\bullet + \bullet}$

$l)\ \bullet = \bullet + \bullet$

$m)\ \bullet = \frac{\bullet}{1 - \bullet}$

$n)\ \bullet = \sqrt{\bullet^2 - \bullet^2}$

$o)\ \bullet = (\bullet - \bullet)^2$

$p)\ \bullet = \frac{(\bullet - \bullet)^2}{\bullet}$

$q)\ \bullet = -\bullet \pm \sqrt{\bullet^2 + \bullet}$

$r)\ \bullet = -\frac{\bullet}{\bullet} \pm \sqrt{\frac{\bullet^2}{\bullet^2} + \bullet}$

$s)\ \bullet = \frac{\bullet}{2\bullet} \pm \sqrt{\frac{\bullet^2}{4\bullet^2} - \bullet + \bullet}$

$t)\ \bullet = \frac{\bullet\bullet}{2\bullet} \pm \sqrt{\frac{\bullet^2\bullet^2}{4\bullet^2} + \bullet + \bullet}$

Aufgabe 12:

$a)\ \bullet = \sqrt{\frac{\bullet}{\bullet}}$

$b)\ \bullet = \frac{\bullet^2}{\bullet^2}$

$c)\ \bullet = \arcsin\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$

$d)\ \bullet = \arccos\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$

$e)\ \bullet = \arctan\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$

$f)\ \bullet = \operatorname{arccot}\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$

$g)\ \bullet = e^{\frac{\bullet}{\bullet}}$

$h)\ \bullet = 10^{\frac{\bullet}{\bullet}}$

$i)\ \bullet = \bullet^{\frac{\bullet}{\bullet}}$

$j)\ \bullet = \ln\frac{\bullet}{\bullet}$

$k)\ \bullet = \ln\frac{\bullet}{\bullet}$

$l)\ \bullet = \frac{\ln\left(\frac{\bullet+\bullet}{\bullet}\right) - \bullet}{\bullet}$

$m)\ \bullet = \frac{\arcsin(\bullet - \bullet)}{\bullet}$

$n)\ \bullet = \frac{\bullet - \ln\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)}{\bullet}$

$o)\ \bullet = \frac{\bullet - \arcsin\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)}{\bullet}$

$p)\ \bullet = -\bullet\cos(\bullet) \pm \sqrt{\bullet^2\cos^2(\bullet) + \bullet^2 - \bullet^2}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.16).

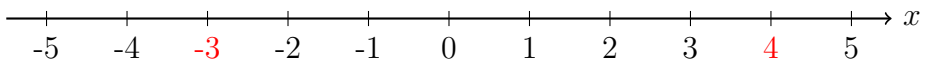
Aufgabe 13:

Behauptung	wahr	falsch
$1m^2$ entspricht $100cm^2$.		x
1% von 2500€ sind 25€.	x	
23 ist eine Primzahl.	x	
$0,43$ ist eine irrationale Zahl.		x
$750ml$ sind $\frac{3}{4}l$.	x	
$\sqrt{81}$ ist eine natürliche Zahl.	x	
$0,9^6 > 1$.		x
Der Logarithmus von Null existiert nicht.	x	
Man darf nicht durch e^x dividieren.		x
$\frac{10}{0,2} > 20$.	x	
$0,\overline{9}$ ist eine natürliche Zahl.	x	
$0,37284 \approx 0,372$		x

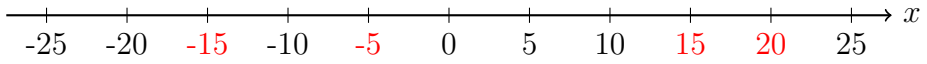
16.7.17 Lösungen zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1:

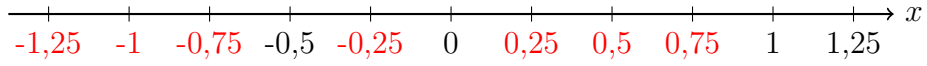
$a)$



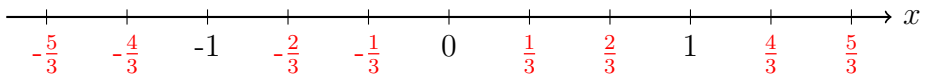
b)



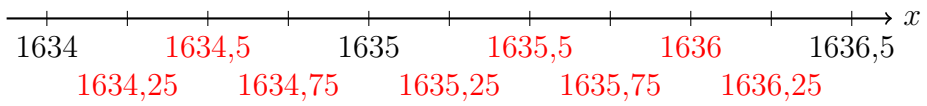
c)



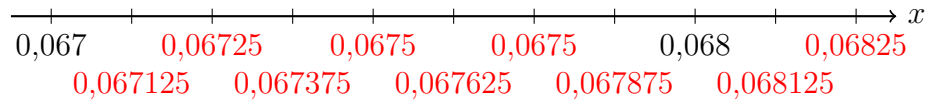
d)



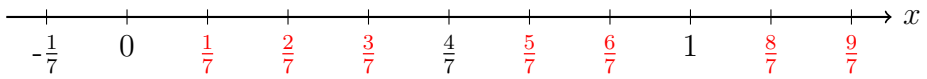
e)



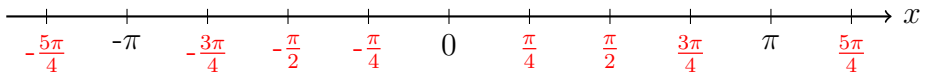
f)



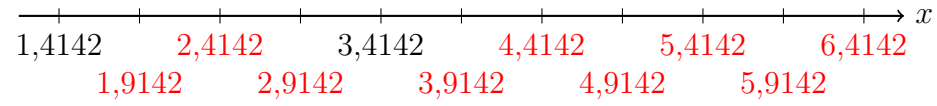
g)



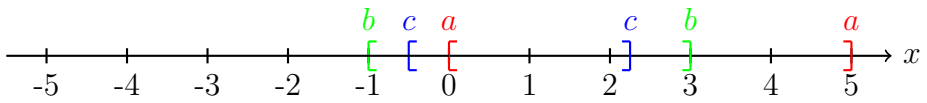
h)

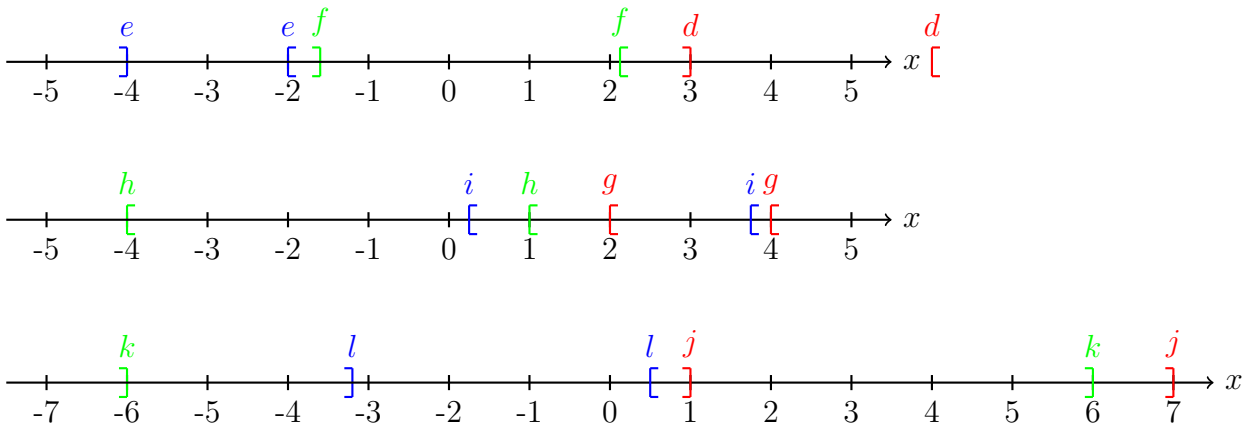


i)



Aufgabe 2:





Aufgabe 3:

a) rot: $[0,4]$	grün: $]-4,2\,]$	blau: $\left]-\frac{7}{2},\frac{19}{4}\right]$
b) rot: $]\,1,2\,[$	grün: $[-5,-3]$	blau: $\left[-\frac{3}{2},\frac{13}{4}\right[$
c) rot: $]\,3,4\,]$	grün: $[-4,1]$	blau: $\left[-\frac{9}{4},\frac{17}{4}\right]$
d) rot: $[\,0,4\,[$	grün: $]-2,5\,[$	blau: $\left]-\frac{9}{2},\frac{7}{4}\right[$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.1.2).

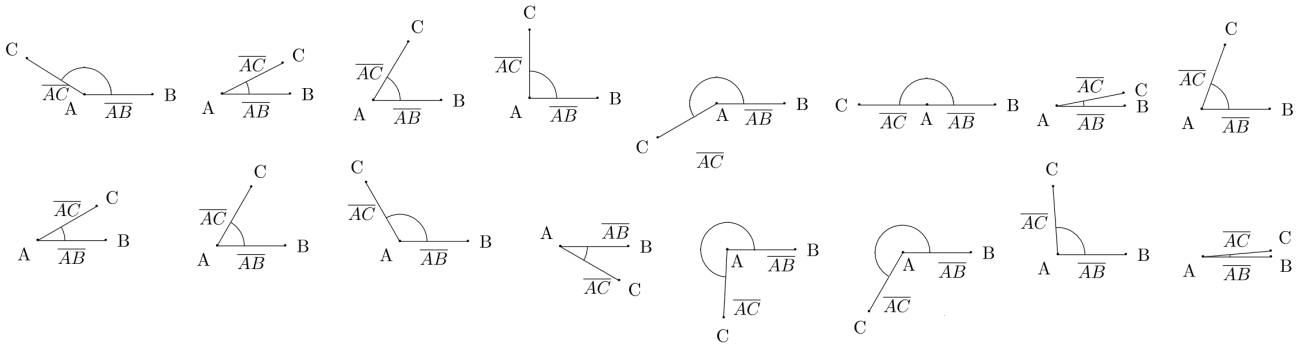
16.7.18 Lösungen zu Winkeln

Aufgabe 1:

$\measuredangle\left(\overline{AB},\overline{AC}\right) =$

57°: spitzer Winkel	133°: stumpfer Winkel	14°: überspitzer Winkel
214°: überstumpfer Winkel	75°: spitzer Winkel	300°: überstumpfer Winkel
117°: stumpfer Winkel	91°: stumpfer Winkel	270°: überstumpfer Winkel
179°: stumpfer Winkel	8°: überspitzer Winkel	45°: spitzer Winkel

Aufgabe 2:



Aufgabe 3:

$a \parallel b$,	$c \nparallel, d$	$e \parallel, f$
$g \nparallel h$,	$i \parallel, j$	$k \parallel, l$
Zusätzliche Parallelitäten:	$a \parallel c$,	$b \parallel c$

Aufgabe 4:

$a \not\perp b$, $c \not\perp d$, $e \perp f$, $g \not\perp h$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.2.1).

16.7.19 Lösungen zum Strahlensatz

Aufgabe 1:

$a)$ $\overline{ZA} = 5$; $\overline{ZB} = 9$; $\overline{AB} = 4$; $\overline{DB} = 4$; $\overline{AC} = \frac{36}{5}$

$b)$ $\overline{ZD} = 12$; $\overline{ZC} = 8$; $\overline{DC} = 4$; $\overline{DB} = \frac{9}{2}$; $\overline{AC} = 3$

$c)$ $\overline{ZA} = \frac{14}{11}$; $\overline{ZB} = 2$; $\overline{AB} = \frac{8}{11}$; $\overline{DB} = 7$; $\overline{AC} = 11$

$d)$ $\overline{ZA} = 5$; $\overline{ZB} = 8$; $\overline{AB} = 3$; $\overline{ZD} = \frac{32}{5}$; $\overline{ZC} = 4$; $\overline{DC} = \frac{12}{5}$

$e)$ $\overline{ZA} = \frac{15}{84}$; $\overline{ZB} = \frac{3}{4}$; $\overline{AB} = \frac{12}{21}$ $\overline{DB} = \frac{1}{3}$; $\overline{AC} = \frac{7}{5}$

$f)$ $\overline{ZD} = \pi$; $\overline{ZC} = \sqrt{2}$; $\overline{DC} = \pi - \sqrt{2}$; $\overline{DB} = e$; $\overline{AC} = e\frac{\sqrt{2}}{\pi}$;

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.3.1).

16.7.20 Lösungen zu Rechtecken

Aufgabe 1:

a) $A = 18cm^2$ und $U = 18cm$

b) $A = 14cm^2$ und $U = 18cm$

c) $A = 108cm^2$ und $U = 42cm$

d) $A = 68cm^2$ und $U = 42cm$

e) $A = 81cm^2$ und $U = 60cm$

f) $A = 90cm^2$ und $U = 123cm$

g) $A = 1cm^2$ und $U = 5cm$

h) $A = \frac{9}{10}cm^2$ und $U = \frac{39}{10}cm$

i) $A = \frac{25}{21}cm^2$ und $U = \frac{95}{21}cm$

j) $A = \frac{11}{40}cm^2$ und $U = \frac{73}{30}cm$

k) $A = \sqrt{6}cm^2 \approx 2,45cm^2$ und $U \approx 6,29cm$

l) $A \approx 1,74cm^2$ und $U \approx 5,38cm$

m) $A = 2cm^2$ und $U = 16,5cm$

n) $A \approx 8,54cm^2$ und $U \approx 11,72cm$

Aufgabe 2:

a) $A = 1,8dm^2$ und $U = 7,2dm$

b) $A = 4500mm^2$ und $U = 280mm$

c) $A = 180600cm^2$ und $U = 1700cm$

d) $A = 0,4cm^2$ und $U = 4,4cm$

e) $A = 0,3dm^2$ und $U = \frac{2431}{45}dm \approx 54,022dm$

f) $A = 9000m^2$ und $U = 18250m$

g) $A \approx 0,005dm^2$ und $U \approx 1,444dm$

h) $A = 0,44m^2$ und $U = 2,7m$

i) $A = 1200\sqrt{111}cm^2 \approx 12642,785cm^2$ und $U = 20\sqrt{111}cm + 240cm \approx 450,713cm$

j) $A \approx 77,088mm^2$ und $U \approx 35,144m$

Aufgabe 3:

a) $a = 4cm$ und $U = 14cm$
b) $A = 72cm^2$ und $b = 12cm$
c) $A = 550cm^2$ und $U = 122cm$
d) $a = 12cm$ und $U = 50cm$
e) $A \approx 4,297dm^2$ und $a = 6,875dm$
f) $b = \frac{9}{5}m$ und $U = 5,3\bar{7}m$
g) $a \approx 0,137m$ und $b \approx 5,463m$ oder $a \approx 5,463m$ und $b \approx 0,137m$
h) $a \approx 0,031mm$ und $b \approx 7,514mm$ oder $a \approx 7,514mm$ und $b \approx 0,031mm$

Aufgabe 4:
Variante I: 6 Schnitte in a-Richtung und 8 Schnitte in b-Richtung.
Variante II: 8 Schnitte in a-Richtung und 6 Schnitte in b-Richtung.
Variante III: 12 Schnitte in a-Richtung und 5 Schnitte in b-Richtung.
Variante IV: 5 Schnitte in a-Richtung und 12 Schnitte in b-Richtung.

Aufgabe 5:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4	7	5	7	$0,5$	$\frac{5}{4}$
Seite b	5	6	11	2	26	$\frac{1}{4}$
Flächeninhalt A	20	42	55	14	13	$\frac{5}{16}$
Umfang U	18	26	32	18	53	3

Aufgabe 6: $A = 32m$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.4.1).

16.7.21 Lösungen zu Dreiecken

Aufgabe 1:

$a)$ $b \approx 8,06cm \Rightarrow A \approx 16,12cm^2, U \approx 21,06cm$
$b)$ $b \approx 9,80cm \Rightarrow A \approx 24,49cm^2, U \approx 25,80cm$
$c)$ $c \approx 7,21cm \Rightarrow A = 12cm^2, U \approx 17,21cm$
$d)$ $a \approx 3,61cm \Rightarrow A \approx 10,82cm^2, U \approx 21,06cm$
$e)$ $h \approx 2,24cm$; $a = 3cm$; $b \approx 3,35cm$; $c = 4,5cm \Rightarrow A \approx 5,03cm^2, U \approx 10,85cm$
$f)$ $p = 9cm$; $h \approx 5,20cm$; $a = 6cm$; $b = 10,39cm \approx 5,20cm \Rightarrow A \approx 31,18cm^2, U \approx 28,39cm$
$g)$ $c \approx 0,60cm \Rightarrow A \approx 0,083cm^2, U \approx 1,43cm$
$h)$ $p = \frac{19}{12}cm$; $h \approx 1,09cm$; $a \approx 1,32cm$; $b \approx 1,92cm \Rightarrow A \approx 16,2cm^2, U \approx 21,06cm$
$i)$ $c = \frac{51}{20}$; $h \approx 1,18cm$; $a \approx 2,11cm$; $b \approx 1,43cm \Rightarrow A \approx 1,50cm^2, U \approx 6,09cm$
$j)$ $q = 3,63cm$; $c \approx 4,96cm$; $a \approx 4,24cm$; $b \approx 2,57cm \Rightarrow A \approx 5,46cm^2, U \approx 11,78cm$
$k)$ $p \approx 1,54cm$; $c \approx 3,34cm$; $a \approx 2,45cm$; $b \approx 2,27cm \Rightarrow A \approx 2,79cm^2, U \approx 8,07cm$
$l)$ $q \approx 4,05cm$; $a \approx 4,78cm$; $b \approx 3,02cm \Rightarrow A \approx 7,22cm^2, U \approx 13,46cm$
$m)$ $c \approx 4,45cm$; $a \approx 2,78cm$; $b \approx 3,48cm \Rightarrow A \approx 4,83cm^2, U \approx 8,97cm$
$n)$ $p \approx 2,16cm$; $a \approx 5,09cm$; $b \approx 3,68cm \Rightarrow A \approx 9,38cm^2, U \approx 15,06cm$

Aufgabe 2:
Da das Geodreieck mit einem 45° Winkel zum Boden gehalten wird, ist der Abstand zum Turm gleich die Resthöhe des Turms, da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt. Die Höhe, in der das Geodreieck gehalten wird, muss anschließend noch dazu addiert werden: $h = 21,5m$

Aufgabe 3:

$a)$ $\alpha = 53°$; $\beta = 37°$ und $\gamma = 90°$
$b)$ $\alpha = 45°$; $\beta = 45°$ und $\gamma = 90°$
$c)$ $\alpha = 46°$; $\beta = 29°$ und $\gamma = 105°$
$d)$ $\alpha = 25°$; $\beta = 48°$ und $\gamma = 107°$
$e)$ $\alpha = 53°$; $\beta = 49°$ und $\gamma = 97°$
$f)$ $\alpha = 26°$; $\beta = 33,5°$ und $\gamma = 119,5°$

Aufgabe 4:

$a)\ a \approx 3cm \quad b)\ b \approx 5cm \quad c)\ b \approx 5,4cm$
$d)\ b \approx 8cm \quad e)\ c \approx 8,1cm \quad f)\ c \approx 6,75cm$

Aufgabe 5:

$a)\ c \approx 7,04cm\ ;\ b)\ b \approx 3,20cm\ ;\ c)\ a \approx 8,17cm\ ;\ d)\ c \approx 6,78cm$

Aufgabe 6:

$a)\ c \approx 6,5cm \quad b)\ c \approx 8,7cm \quad c)\ c \approx 6,3cm \quad d)\ c \approx 8,1cm$

Aufgabe 7:

$a)\ b \approx 7cm\ ;\ c \approx 3,1cm$ $\quad b)\ b \approx 5,4cm\ ;\ a \approx 3,3cm$
$c)\ a \approx 6,9cm\ ;\ c \approx 8,1cm$ $\quad d)\ b \approx 1,7cm\ ;\ c \approx 3,9cm$

Aufgabe 8:

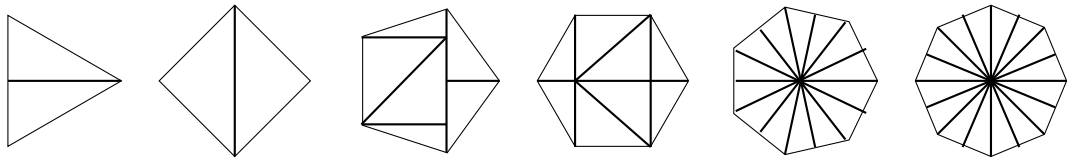
$a)\ b \approx 10,6cm\ ;\ a \approx 9,9cm$ $\quad b)\ b \approx 7,4cm\ ;\ a \approx 6,8cm$
$c)\ a \approx 5,5cm\ ;\ c \approx 3,9cm$ $\quad d)\ b \approx 2,25cm\ ;\ c \approx 3,8cm$

Aufgabe 9:

$a)\ c \approx 9cm \quad \beta \approx 43^\circ \quad \gamma \approx 104^\circ$
$b)\ \alpha \approx 40^\circ \quad \beta \approx 57^\circ \quad \gamma \approx 83^\circ$
$c)\ c \approx 7,8cm \quad \beta \approx 42^\circ \quad \alpha \approx 58^\circ$
$d)\ a \approx 9cm \quad \beta \approx 45^\circ \quad \gamma \approx 59^\circ$
$e)\ \alpha \approx 41^\circ \quad \beta \approx 56^\circ \quad \gamma \approx 82^\circ$
$f)\ \alpha \approx 45^\circ \quad \beta \approx 56^\circ \quad \gamma \approx 79^\circ$

Aufgabe 10: *Hier ist nur eine von vielen Lösungen vorgestellt.*

$n = 2(2)$ $n = 2(2)$ $n = 10(6)$ $n = 12(8)$ $n = 14(14)$ $n = 16(16)$



Aufgabe 11:

a) $\alpha = 90°$; $\beta = 45°$ und $\gamma = 45°$.
b) $\alpha \approx 102,86°$; $\beta \approx 51,43°$ und $\gamma \approx 25,71°$.
c) $\alpha \approx 51,43°$; $\beta \approx 102,86°$ und $\gamma \approx 25,71°$.
d) $\alpha \approx 77,14°$; $\beta \approx 77,14°$ und $\gamma \approx 25,71°$.
e) $\alpha \approx 77,14°$; $\beta \approx 12,86°$ und $\gamma = 90°$.
f) $\alpha = 11,25°$; $\beta \approx 33,75°$ und $\gamma \approx 135°$.
g) $\alpha = 108°$; $\beta \approx 30,86°$ und $\gamma \approx 41,14°$.
h) $\alpha \approx 28,29°$; $\beta \approx 88,87°$ und $\gamma \approx 62,84°$.

Aufgabe 12:

	1	2	3	4	5	6
a	5	4	1	$\frac{56}{6}$	$\frac{398}{105}$	$\frac{11}{2}$
b	7	6	5	$\frac{56}{5}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{128}{51}$
c	6	9	12	7	$\frac{22}{5}$	$\frac{2239}{510}$
h_a	$\frac{18}{5}$	8	84	6	$\frac{539}{199}$	$\frac{66}{33}$
h_b	$\frac{18}{7}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{84}{5}$	5	$\frac{14}{5}$	$\frac{17}{4}$
h_c	3	$\frac{32}{9}$	7	8	$\frac{7}{3}$	$\frac{8160}{2239}$
A	9	16	42	28	$\frac{77}{15}$	$\frac{16}{3}$
U	18	19	18	$\frac{413}{15}$	$\frac{83}{7}$	$\frac{62}{5}$

Aufgabe 14: $c = 12,8cm$

Aufgabe 15:

	1	2	3	4	5	6
Grundseite g	7	23	14	$\frac{86}{5}$	$8,5$	$\frac{45}{8}$
Höhe h	3	8	$\frac{127}{7}$	5	$\frac{98}{17}$	$\frac{4}{5}$
Flächeninhalt A	$\frac{21}{2}$	92	18	43	$24,5$	$\frac{9}{4}$

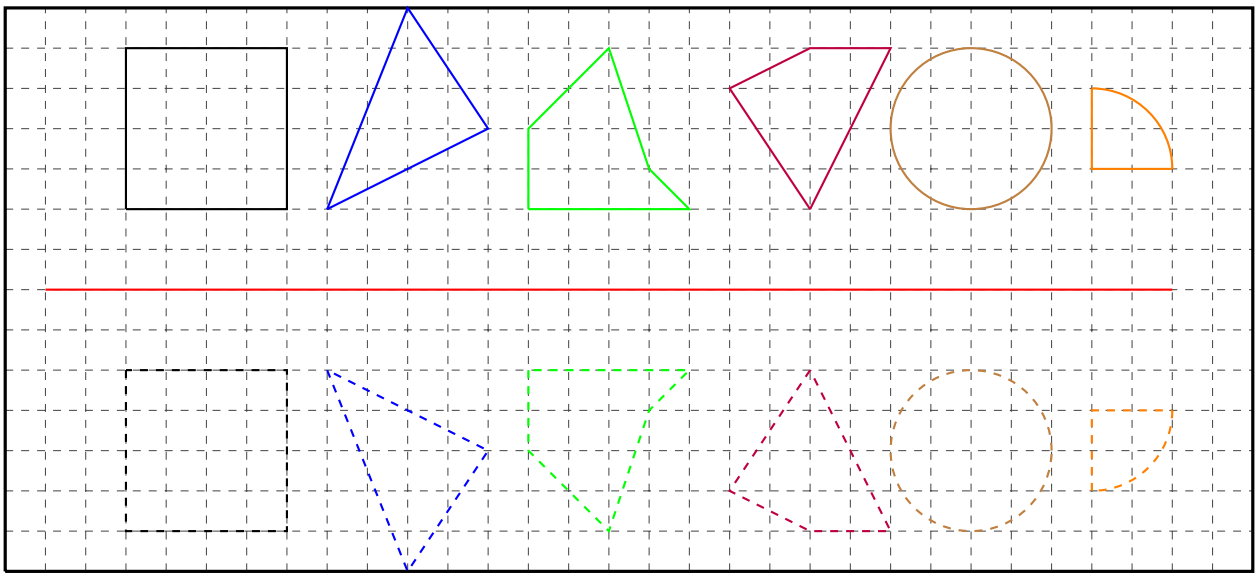
Aufgabe 16: $b = 38cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.5.1).

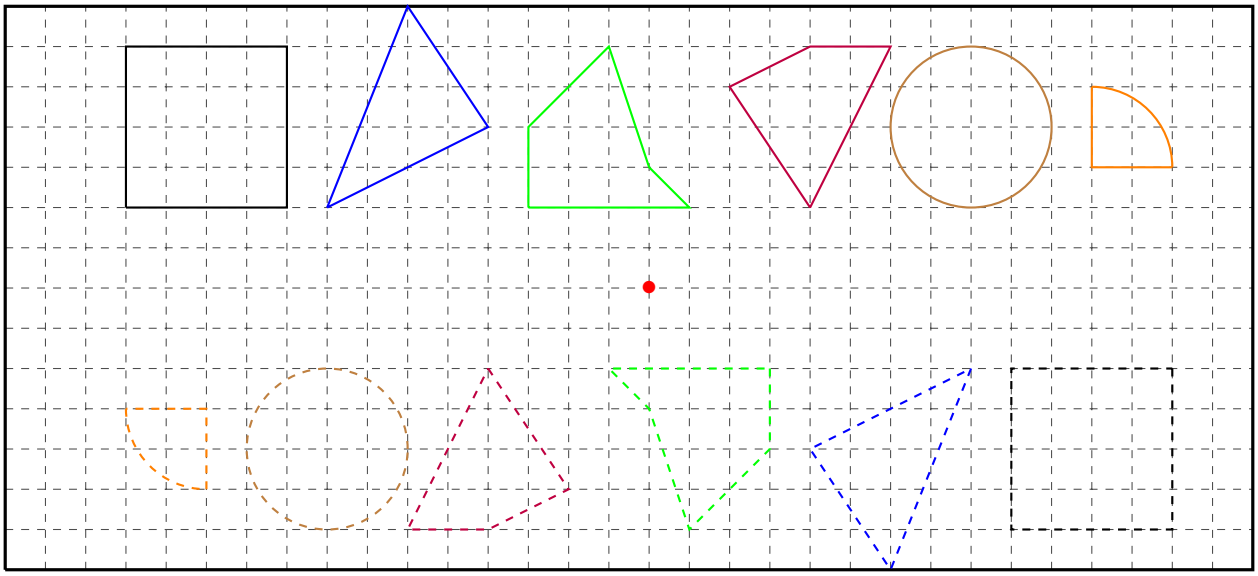
16.7.22 Lösungen zu Symmetrien

Aufgabe 1:

a)

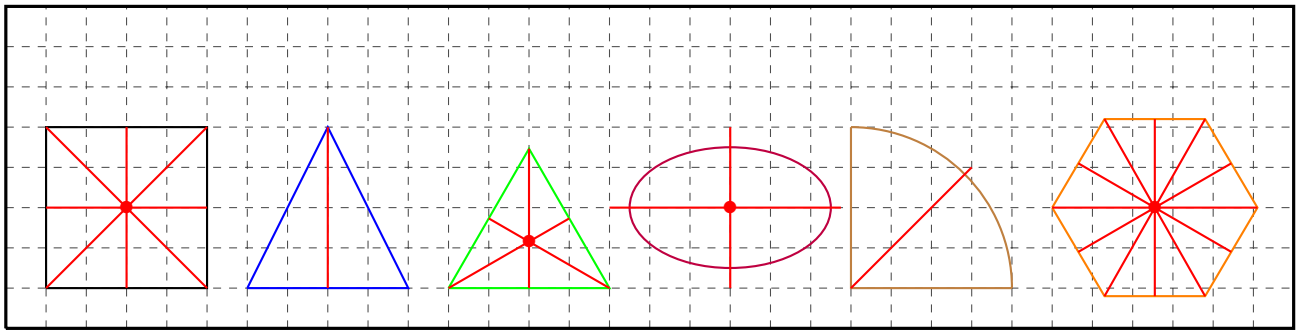


b)

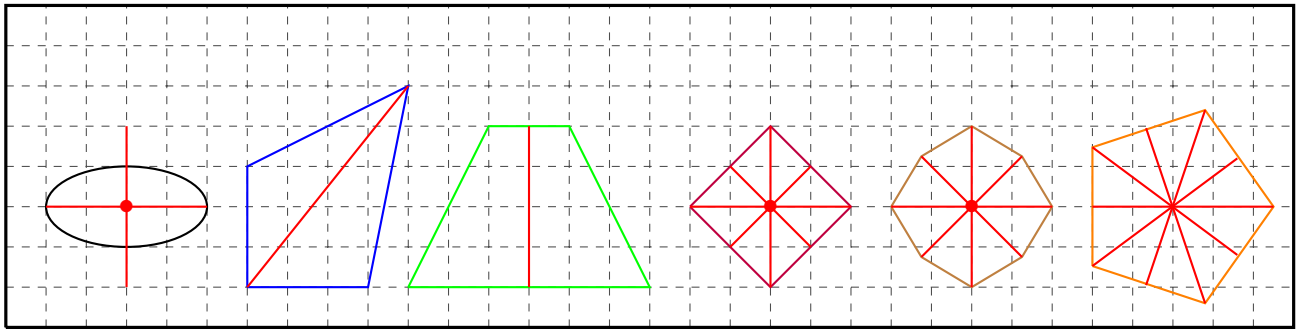


Aufgabe 2:

a)



b)



Aufgabe 3: *Wie viele Symmetrieachsen und Symmetriepunkte besitzen die Körper?*

Figur	schwarz	blau	grün	lila	braun	orange
Achsen	∞	4	4	2	0	1
Punkte	1	1	1	1	0	0

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.6.1).

16.7.23 Lösungen zu Vierecken

Aufgabe 1:

a) Quadrat: $a = 2cm :\Rightarrow A = 4cm^2, U = 8cm$
b) Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm :\Rightarrow A = 20cm^2, U = 20cm$
c) Parallelogramm: $a = 6cm, b = 3cm$ und $h_a = 2cm :\Rightarrow A = 12cm^2, U = 18cm$
d) Trapez: $a = 4cm, c = 11cm, d = b$ und $h = 4cm : b \approx 5,32, \Rightarrow A = 30cm^2, U \approx 25,64cm$
e) Drachen: $a = 4cm, b = 6cm$ und $e = 6cm : d \approx 7,84cm \Rightarrow A \approx 47,04cm^2, U = 20cm$

Aufgabe 2:

$a)\ A = 16cm^2\ ;\ U = 16cm$ $\quad b)\ A = 131cm^2\ ;\ U = 44cm$

$c)\ A = 225dm^2\ ;\ U = 60dm$ $\quad d)\ A = \frac{25}{36}cm^2\ ;\ U = \frac{10}{3}cm$

$e)\ A = \frac{9}{16}km^2\ ;\ U = 3km$ $\quad f)\ A = \frac{25}{144}m^2\ ;\ U = \frac{5}{3}m$

$e)\ A = 5mm^2\ ;\ U = 4\sqrt{5}mm$ $\quad g)\ A = 149m^2\ ;\ U = 4\sqrt{149}m$

$h)\ A = 88mm^2\ ;\ U = 4\sqrt{88}mm$ $\quad i)\ A = e^2mm^2\ ;\ U = 4emm$

$j)\ A = \pi^2m^2\ ;\ U = 4\pi m$ $\quad k)\ A = \ln^2 2dm^2\ ;\ U = 4\ln 2dm$

Aufgabe 3:

$a)\ a = 4cm$ und $h = 6cm \Rightarrow U = 16cm\ ;\ A = 24cm^2$

$b)\ a = 9dm$ und $h = 11dm \Rightarrow U = 36dm\ ;\ A = 99dm^2$

$c)\ a = 2m$ und $h = 50cm \Rightarrow U = 8m\ ;\ A = 1m^2$

$d)\ a = 3km$ und $h = 100m \Rightarrow U = 12km\ ;\ A = 0,3km^2$

$e)\ a = \frac{1}{2}\mu m$ und $h = \frac{1}{3}\mu m \Rightarrow U = 2\mu m\ ;\ A = \frac{1}{6}\mu m^2$

$f)\ a = \frac{7}{8}cm$ und $h = \frac{3}{4}cm \Rightarrow U = \frac{7}{2}cm\ ;\ A = \frac{21}{32}cm^2$

$g)\ a = \frac{11}{3}mm$ und $h = \frac{6}{7}mm \Rightarrow U = \frac{44}{3}mm\ ;\ A = \frac{66}{21}mm^2$

$h)\ a = \frac{14}{5}km$ und $h = \frac{5}{9}km \Rightarrow U = \frac{66}{5}km\ ;\ A = \frac{14}{9}km^2$

$i)\ a = \frac{7}{4}dm$ und $h = \frac{7}{5}cm \Rightarrow U = 7dm\ ;\ A = \frac{49}{2}cm^2$

$j)\ a = \frac{17}{9}cm$ und $h = \frac{11}{8}mm \Rightarrow U = \frac{68}{9}cm\ ;\ A = \frac{935}{36}mm^2$

$k)\ a = \sqrt{5}Mm$ und $h = \sqrt{3}Mm \Rightarrow U = 4\sqrt{5}Mm\ ;\ A = \sqrt{15}Mm$

$l)\ a = \sqrt{17}nm$ und $h = \sqrt{2}nm \Rightarrow U = 4\sqrt{17}nm\ ;\ A = \sqrt{34}nm$

$m)\ a = emm$ und $h = \pi dm \Rightarrow U = 4emm\ ;\ A = 100e\pi mm^2$

$n)\ a = \ln 9m$ und $h = \ln 2m \Rightarrow U = 4\ln 9\ ;\ A \approx 1,523m^2$

Aufgabe 4:

$a)\ a = 3cm,\ b = 7cm$ und $h_a = 4cm \quad \Rightarrow U = 20cm\ ;\ A = 12cm^2$

$b)\ a = 7dm,\ b = 6dm$ und $h_a = 5dm \quad \Rightarrow U = 26dm\ ;\ A = 35dm^2$

$c)\ a = 9m,\ b = 8m$ und $h_a = 6m \quad \Rightarrow U = 34m\ ;\ A = 54m^2$

$d)\ a = 4km,\ b = 44km$ und $h_a = 2km \quad \Rightarrow U = 96km\ ;\ A = 8km^2$

$e)\ a = 2cm,\ b = 5dm$ und $h_a = 5mm \quad \Rightarrow U = 104cm\ ;\ A = 1cm^2$

$f)\ a = 4m,\ b = 9cm$ und $h_a = 25dm \quad \Rightarrow U = 818cm\ ;\ A = 10m^2$

$g)\ a = 90dm,\ b = 60mm$ und $h_a = 4m \quad \Rightarrow U = 1812cm\ ;\ A = 36m^2$

$h)\ a = 46km,\ b = 1dm$ und $h_a = 1dm \quad \Rightarrow U = 920002dm\ ;\ A = 4,6m^2$

$i)\ a = \frac{1}{4}cm,\ b = \frac{1}{2}cm$ und $h_a = \frac{1}{6}cm \quad \Rightarrow U = \frac{3}{2}cm\ ;\ A = \frac{1}{24}cm^2$

$j)\ a = \frac{11}{3}dm,\ b = \frac{6}{7}dm$ und $h_a = \frac{7}{8}dm \quad \Rightarrow U = \frac{190}{21}dm\ ;\ A = \frac{77}{24}dm^2$

$k)\ a = \frac{13}{8}dm,\ b = \frac{1}{10}mm$ und $h_a = \frac{144}{10}cm \quad \Rightarrow U = \frac{1626}{5}mm\ ;\ A = 234cm^2$

$l)\ a = \sqrt{7}dm,\ b = \sqrt{2}dm$ und $\sqrt{3}dm \quad \Rightarrow U = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}dm \approx 8,12dm\ ;\ A = \sqrt{21}dm^2$

$m)\ a = \lg 125cm,\ b = \ln 6cm$ und $h_a = \mathrm{lb}5cm \quad \Rightarrow U \approx 7,777cm\ ;\ A \approx 4,869cm^2$

$n)\ a = edm,\ b = \pi dm$ und $h_a = \sqrt{5}dm \quad \Rightarrow U = 2e + 2\pi dm \approx 11,72dm\ ;\ A = \sqrt{5}edm^2$

Aufgabe 5:

$a)$	$a = 4cm, c = 3cm, d = b$	und $h_a = 5cm$	$\Rightarrow\ A \approx 17,5cm^2\ ;\ U \approx 17,050cm$
$b)$	$a = 7cm, c = 5cm, d = b$	und $h_a = 3cm$	$\Rightarrow\ A \approx 18cm^2\ ;\ U \approx 18,325cm$
$c)$	$a = 120mm, c = 6cm, d = b$	und $h_a = 2,4cm$	$\Rightarrow\ A \approx 21,6cm^2\ ;\ U \approx 25,634cm$
$d)$	$a = 5dm, c = 11cm, d = b$	und $h_a = 9cm$	$\Rightarrow\ A \approx 274,5cm^2\ ;\ U \approx 245,177cm$
$e)$	$a = 11cm, c = 4mm, d = b$	und $h_a = \frac{7}{5}cm$	$\Rightarrow\ A \approx 7,98cm^2\ ;\ U \approx 22,364cm$
$f)$	$a = 3km, c = 1,5km, d = b$	und $h_a = 1,65km$	$\Rightarrow\ A \approx 3,7125km^2\ ;\ U \approx 8,125km$
$g)$	$a = 9cm, c = \frac{1}{5}dm, d = b$	und $h_a = 5,53cm$	$\Rightarrow\ A \approx 30,415cm^2\ ;\ U \approx 24,089cm$
$h)$	$a = \frac{3}{4}cm, c = \frac{5}{4}cm, d = b$	und $h_a = \frac{4}{7}cm$	$\Rightarrow\ A \approx \frac{4}{7}cm^2\ ;\ U \approx 4,304cm$
$i)$	$a = \frac{15}{8}mm, c = \frac{7}{10}mm, d = b$	und $h_a = \frac{5}{4}cm$	$\Rightarrow\ A \approx 0,161cm^2\ ;\ U \approx 2,760cm$
$j)$	$a = \frac{11}{5}dm, c = \frac{38}{9}cm, d = b$	und $h_a = \frac{1}{8}dm$	$\Rightarrow\ A \approx 0,164dm^2\ ;\ U \approx 4,417dm$
$k)$	$a = \frac{7}{6}m, c = \frac{11}{4}dm, d = b$	und $h_a = \frac{3}{4}m$	$\Rightarrow\ A \approx 54,0625dm^2\ ;\ U \approx 31,867dm$
$l)$	$a = \frac{9}{4}m, c = \frac{6}{5}m, d = b$	und $h_a = \frac{8}{3}dm$	$\Rightarrow\ A \approx 0,46m^2\ ;\ U \approx 4,628m$
$m)$	$a = \sqrt{17}cm, c = \sqrt{3}cm, d = b$	und $h_a = \sqrt{7}cm$	$\Rightarrow\ A \approx 7,746cm^2\ ;\ U \approx 11,662cm$
$n)$	$a = \ln 2cm, c = \pi mm, d = b$	und $h_a = emm$	$\Rightarrow\ A \approx 13,691mm^2\ ;\ U \approx 16,700mm$

Aufgabe 6:

$a)$	$a = 4cm, b = 9cm,$	und $e = 6cm$	$\Rightarrow\ A \approx 33,393cm^2\ ;\ U \approx 26cm$
$b)$	$a = 5cm, b = 6cm,$	und $e = 5,5cm$	$\Rightarrow\ A \approx 26,148cm^2\ ;\ U \approx 22cm$
$c)$	$a = 4,2cm, b = 114mm,$	und $e = 7,2cm$	$\Rightarrow\ A \approx 46,728cm^2\ ;\ U \approx 31,2cm$
$d)$	$a = 14dm, b = 1,7m,$	und $e = 2,25m$	$\Rightarrow\ A \approx 237,128cm^2\ ;\ U \approx 62cm$
$e)$	$a = \frac{1}{2}cm, b = \frac{4}{5}cm,$	und $e = \frac{5}{8}cm$	$\Rightarrow\ A \approx 0,352cm^2\ ;\ U \approx 2,6cm$
$f)$	$a = \frac{6}{7}mm, b = \frac{1}{6}cm,$	und $e = \frac{5}{4}mm$	$\Rightarrow\ A \approx 0,013cm^2\ ;\ U \approx 0,505cm$
$g)$	$a = \frac{2}{30}dm, b = \frac{7}{3}cm,$	und $e = \frac{1}{100}m$	$\Rightarrow\ A \approx 1,360cm^2\ ;\ U \approx 6cm$
$h)$	$a = \sqrt{10}cm, b = \pi cm,$	und $e = ecm$	$\Rightarrow\ A \approx 7,730cm^2\ ;\ U \approx 12,608cm$

Aufgabe 7:

a) $A = 8cm^2 + 18cm^2 + 20cm^2 = 46cm^2, U = 2 \cdot 2cm + 4cm + 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{45} \approx 28,63cm$
b) $A = 2 \cdot 9cm^2 + 2 \cdot 10cm^2 + 36cm^2 = 74cm^2, U = 2 \cdot 4cm + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{18} \approx 33,92cm$
c) $A = 28cm^2, U \approx 24,944cm$
d) $A = 66cm^2, U \approx 22,708cm$
e) $A = 28cm^2, U = 32cm$
f) $A = 66cm^2, U \approx 29,134cm$

Aufgabe 8:

a) $\alpha \approx 31,304°; \beta \approx 15,652°; \gamma \approx 62,609°; \delta \approx 250,435°$
b) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 60°; \gamma \approx 120°; \delta \approx 60°$
c) $\alpha \approx 135°; \beta \approx 45°$
d) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 72°; \gamma \approx 48°$
e) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 120°; \gamma \approx 60°; \delta \approx 60°$
f) $\alpha \approx 55°; \beta \approx 55°; \gamma \approx 125°; \delta \approx 125°$
g) $\alpha \approx 10,909°; \beta \approx 21,818°; \gamma \approx 65,455°; \delta \approx 261,818°$
h) $\alpha \approx 115°; \beta \approx 86,667°; \gamma \approx 43,333°$

Aufgabe 9:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4	4	5	$35,5$	$0,5$	$\frac{4}{5}$
Seite c	6	8	11	$4,5$	$8,5$	$\frac{37}{10}$
Hilfsgröße $m = \frac{a+c}{2}$	5	6	8	20	$4,5$	$\frac{9}{4}$
Höhe h	3	7	$\frac{25}{8}$	$2,1$	4	$\frac{26}{9}$
Flächeninhalt A	15	42	25	42	18	$\frac{13}{2}$

Aufgabe 10:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.7.1).

Behauptung	wahr	falsch
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.	x	
Bei einem Drachen sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.		x
Ein Rechteck ist gleichzeitig ein Trapez.	x	
Ein Kreis hat 180°.		x
Ein Drachen besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.	x	
Jedes Rechteck ist ein Trapez.	x	
Ein Quadrat ist eine Raute.	x	
Die Seiten einer Raute sind alle gleichlang.	x	
Ein Parallelogramm hat eine Winkelsumme von 180°.		x
Die Winkelsumme eines Sechsecks beträgt immer 720°.	x	
Ein Trapez, dass ein Parallelogramm ist und einen rechten Winkel hat, nennt man immer Rechteck.	x	
Die längste Seite eines Dreiecks wird Hypotenuse genannt.		x
Jede Raute ist ein Parallelogramm.	x	
Die gegenüberliegenden Winkel einer Raute sind gleichgroß.	x	
Ein gleichmäßiges Sechseck besteht aus gleichseitigen Dreiecken.	x	

16.7.24 Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1:

a) $V = 80cm^3$, $O = 112cm^2$
b) $V = 72cm^3$, $O = 108cm^2$
c) $V = 27cm^3$, $O = 78cm^2$
d) $V = 49cm^3$, $O = 126cm^2$
e) $V = 42cm^3$, $O = 92cm^2$
f) $V = 144cm^3$, $O = 176cm^2$
g) $V = 176cm^3$, $O = 252cm^2$
h) $V = 378cm^3$, $O = 318cm^2$
i) $V = 56cm^3$, $O = 100cm^2$
j) $V = 50km^3$, $O = 90km^2$
k) $V = 99dm^3$, $O = 238cm^2$
l) $V = 72m^3$, $O = 132m^2$
m) $V = 48m^3$, $O = 104cm^2$
n) $V = 0mm^3$, $O = 288mm^2$

Aufgabe 2:

a) $V = \frac{1}{15}cm^3$, $O = 1cm^2$
b) $V = \frac{9}{80}cm^3$, $O = \frac{63}{40}cm^2$
c) $V = \frac{40}{63}cm^3$, $O = \frac{68}{9}cm^2$
d) $V = \frac{5}{24}cm^3$, $O = \frac{119}{24}cm^2$
e) $V = \frac{35}{4}cm^3$, $O = 33cm^2$
f) $V = \frac{36}{1925}cm^3$, $O = \frac{1044}{275}cm^2$
g) $V = 3cm^3$, $O = \frac{83}{4}cm^2$
h) $V = \frac{10000}{3}mm^3$, $O = \frac{9950}{7}mm^2$
i) $V = 116550mm^3$, $O = \frac{50809}{2}mm^2$
j) $V = 2500cm^3$, $O = \frac{5425}{3}cm^2$

Aufgabe 3:

$a)\ V = 36cm^3$ $b)\ V = 30cm^3$ $c)\ V = 99cm^3$ $d)\ V = 33cm^3$
$e)\ V = 49km^3$ $f)\ V = 289dm^3$ $g)\ V = 20m^3$

Aufgabe 4:

$a)\ V = 64l$ $b)\ V = 30l$ $c)\ V = 72l$
$d)\ V = 40l$ $b)\ V = 33l$ $c)\ V = 204l$

Aufgabe 5:

$V_{\text{Würfel}} = 3 \cdot V_{\text{Pyramide}} \Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = 20l$

Aufgabe 6:

$V = 250dm \cdot 100dm \cdot 20dm = 500000dm^3 = 500000l$

Aufgabe 7:

$O = 2 \cdot 12cm \cdot 6cm + 2 \cdot 12cm \cdot 4cm + 2 \cdot 6cm \cdot 4cm = 144cm^2 + 96cm^2 + 42cm^2 = 282cm^2$

Aufgabe 8:

$$V_{\text{Karton}} = 10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000cm^3, V_{\text{Würfel}} = 1cm \cdot 1cm \cdot 1cm = 1cm^3,$$
$$\Rightarrow \frac{V_{\text{Karton}}}{V_{\text{Würfel}}} = 1000$$

Aufgabe 9:

$$V = G \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{G} = \frac{81dm^3}{9dm^2} = 9dm$$

Aufgabe 10:

$$V = G \cdot h = 1dm^2 \cdot 2dm = 2dm^3 = 2l$$

Aufgabe 11:

$a)\ a = 4cm \Rightarrow V = 64cm^3\ ;\ O = 96cm^2$
$b)\ a = 7dm \Rightarrow V = 343dm^3\ ;\ O = 294dm^2$
$c)\ a = 11m \Rightarrow V = 1331m^3\ ;\ O = 726m^2$
$d)\ a = 12km \Rightarrow V = 1728km^3\ ;\ O = 864km^2$
$e)\ a = \frac{3}{5}cm \Rightarrow V = \frac{27}{125}cm^3\ ;\ O = \frac{54}{25}cm^2$
$f)\ a = \frac{6}{7}dm \Rightarrow V = \frac{216}{343}dm^3\ ;\ O = \frac{219}{49}dm^2$
$g)\ a = \frac{11}{9}m \Rightarrow V = \frac{1331}{729}m^3\ ;\ O = \frac{242}{27}m^2$
$h)\ a = \frac{17}{3}km \Rightarrow V = \frac{4913}{27}km^3\ ;\ O = \frac{578}{3}km^2$
$i)\ a = 3,6cm \Rightarrow V = 46,656cm^3\ ;\ O = 77,76cm^2$
$j)\ a = 2,8dm \Rightarrow V = 21,952dm^3\ ;\ O = 47,04dm^2$
$k)\ a = 8,2m \Rightarrow V = 551,368m^3\ ;\ O = 403,44m^2$
$l)\ a = 14,24km \Rightarrow V = 2887,553024km^3\ ;\ O = 1216,6656km^2$
$m)\ a = \sqrt{7}cm \Rightarrow V \approx 18,52cm^3\ ;\ O = 42cm^2$
$n)\ a = \sqrt{15}dm \Rightarrow V \approx 58,09dm^3\ ;\ O = 90dm^2$
$o)\ a = \sqrt{467}m \Rightarrow V \approx 10092,96m^3\ ;\ O = 2802m^2$
$p)\ a = \sqrt{214,346}km \Rightarrow V \approx 3138,15km^3\ ;\ O \approx 1286,08km^2$
$q)\ a = \ln 5cm \Rightarrow V \approx 4,17cm^3\ ;\ O \approx 15,54cm^2$
$r)\ a = \ln 2dm \Rightarrow V \approx 0,33dm^3\ ;\ O \approx 2,88dm^2$
$s)\ a = em \Rightarrow V = e^3m^3\ ;\ O = 6e^2m^2$
$t)\ a = \pi km \Rightarrow V = \pi^3km^3\ ;\ O = 6\pi^2km^2$

Aufgabe 12:

$a)$ Dreiecksprisma: $G = 4cm^2$ und $h = 3cm \Rightarrow V = 12cm^3$
$b)$ Vierecksprisma: $G = 6cm^2$ und $h = 8cm \Rightarrow V = 42cm^3$
$c)$ Sechseckprisma: $G = 7,4cm^2$ und $h = 3,2cm \Rightarrow V = 23,68cm^3$
$d)$ Zehnecksprisma: $G = \frac{1}{3}cm^2$ und $h = \frac{5}{6}cm \Rightarrow V = \frac{5}{18}cm^3$
$e)$ Dreiecksprisma: $G = \frac{13}{4}cm^2$ und $h = \frac{9}{2}cm \Rightarrow V = \frac{39}{2}cm^3$
$f)$ Fünfecksprisma: $G = \frac{6}{7}cm^2$ und $h = \frac{7}{9}cm \Rightarrow V = \frac{2}{3}cm^3$
$g)$ Neunecksprisma: $G = \sqrt{2}cm^2$ und $h = \sqrt{3}cm \Rightarrow V = \sqrt{6}cm^3$
$h)$ Vierecksprisma: $G = ecm^2$ und $h = \pi cm \Rightarrow V = e\pi cm^3$

Aufgabe 13:

$a)\ V = 32cm^3 \qquad O \approx 66,596cm^2$
$b)\ V = 18cm^3 \qquad O \approx 45,747cm^2$
$c)\ V \approx 11,345cm^3 \qquad O \approx 33,872cm^2$
$d)\ V \approx 4,272cm^3 \qquad O \approx 21,891cm^2$
$e)\ V = \frac{11}{27}cm^3 \qquad O \approx 4,583cm^2$
$f)\ V = \frac{\sqrt{30}}{3}cm^3 \qquad O \approx 9,903cm^2$
$g)\ V \approx 0,409cm^3 \qquad O \approx 3,749cm^2$
$h)\ V \approx 10,852cm^3 \qquad O \approx 32,462cm^2$

Aufgabe 14:

$a)\ V = 98cm^3 \qquad O \approx 129,074cm^2$
$b)\ V = \frac{108}{5}cm^3 \qquad O \approx 56,451cm^2$
$c)\ V \approx 33,152cm^3 \qquad O \approx 53,745cm^2$
$d)\ V \approx 4,605cm^3 \qquad O \approx 43,201cm^2$
$e)\ V = \frac{1870}{567}cm^3 \qquad O \approx 24,187cm^2$
$f)\ V \approx 3,298cm^3 \qquad O \approx 31,965cm^2$
$g)\ V \approx 4,808cm^3 \qquad O \approx 16,975cm^2$
$h)\ V \approx 9,060cm^3 \qquad O \approx 25,306cm^2$

Aufgabe 15:

a) $V \approx 7,542cm^3 \qquad O \approx 27,713cm^2$
b) $V \approx 85,913cm^3 \qquad O \approx 140,296cm^2$
c) $V \approx 0,050cm^3 \qquad O \approx 0,974cm^2$
d) $V \approx 0,323cm^3 \qquad O \approx 3,395cm^2$
e) $V \approx 9,590cm^3 \qquad O \approx 32,524cm^2$
f) $V \approx \frac{1}{3}cm^3 \qquad O \approx 3,464cm^2$
g) $V \approx 0,156cm^3 \qquad O \approx 2,090cm^2$
h) $V \approx 3,654cm^3 \qquad O \approx 17,095cm^2$
i) $V \approx 2,367dm^3 \qquad O \approx 12,798dm^2$

Aufgabe 16:

a) $\Rightarrow V = 27cm^3, O = 54cm^2$
b) $\Rightarrow V = 72cm^3, O = 122cm^2$
c) $\Rightarrow V = 32cm^3, O = 2\sqrt{52} \cdot 6cm^2 + 16cm^2 \approx 102,53cm^2$
d) $\Rightarrow V = 20cm^3, O = 5\sqrt{41}cm^2 + 5\sqrt{34}cm^2 + 12cm^2 \approx 73,17cm^2$
e) $\Rightarrow V = 80cm^3, O = 6 \cdot 5cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5cm^2 + 4 \cdot \sqrt{41}cm^2 + 4 \cdot \sqrt{52}cm^2 \approx 172,46cm^2$
f) $\Rightarrow V \approx 41,67cm^3, O \approx 72,81cm^2$

Aufgabe 17:

a) $V \approx \qquad O \approx$
b) $V = \qquad O =$
c) $V \approx \qquad O \approx$
d) $V \approx \qquad O \approx$
e) $V \approx \qquad O \approx$
f) $V \approx \qquad O \approx$
g) $V \approx \qquad O \approx$
h) $V = \qquad O =$
i) $V \approx \qquad O \approx$
j) $V \approx \qquad O \approx$
k) $V \approx \qquad O \approx$
l) $V \approx \qquad O \approx$

Aufgabe 18:

$a)\ V \approx \qquad O \approx$
$b)\ V \approx \qquad O \approx$
$c)\ V \approx \qquad O \approx$
$d)\ V \approx \qquad O \approx$
$e)\ V \approx \qquad O \approx$
$f)\ V \approx \qquad O \approx$
$g)\ V \approx \qquad O \approx$
$h)\ V \approx \qquad O \approx$

Aufgabe 19:

$a)\ V \approx \qquad O \approx$
$b)\ V \approx \qquad O \approx$
$c)\ V \approx \qquad O \approx$
$d)\ V \approx \qquad O \approx$
$e)\ V \approx \qquad O \approx$
$f)\ V \approx \qquad O \approx$

Aufgabe 20:

$a)\ ; h = \frac{42}{55} cm$ $\qquad b)\ ; h = \frac{12}{5} cm$

$c)\ ; h = 5cm$ $\qquad d)\ ; h = \frac{4}{7} cm$

$e)\ ; h \approx 0,10062cm$ $\qquad f)\ ; h = \frac{\pi}{e} cm$

Aufgabe 21:

Aufgabe 22:

	1	2	3	4	5	6
a	6	3	$\approx 3{,}538$	3,3	$\approx 8{,}553$	5,5
b	2	$\approx 2{,}762$	9	$\approx 3{,}718$	5,7	$15{,}745 \vee 1{,}4781$
c	8	7	4	5,6	3,2	$1{,}4781 \vee 15{,}745$
V	96	58	$\approx 127{,}385$	68,7	156	128
O	160	$\approx 97{,}238$	164	$\approx 103{,}132$	$\approx 188{,}717$	236

	1	2	3	4	5	6
s	7	$\approx 9{,}947$	$\approx 3{,}644$	3,45	$\approx 4{,}651$	$\approx 3{,}022$
V	$\approx 40{,}423$	116	$\approx 5{,}703$	$\approx 4{,}839$	$\frac{83}{7}$	$\approx 3{,}253$
O	$\approx 84{,}871$	$\approx 171{,}387$	23	$\approx 20{,}616$	$\approx 37{,}468$	$\frac{174}{11}$

Aufgabe 23:

	1	2	3	4	5	6
G	13	27	$\approx 5{,}676$	3,95	$\frac{67}{33}$	$\approx 0{,}882 \vee 13{,}310$
h	7	$\approx 3{,}185$	5	$\approx 1{,}832$	$\frac{11}{2}$	$\approx 13{,}310 \vee 0{,}882$
V	91	86	$\approx 28{,}379$	$\approx 7{,}237$	$\frac{67}{6}$	$\frac{55}{7}$
O	$\approx 126{,}955$	$\approx 120{,}203$	59	24,5	$\approx 33{,}233$	$\frac{599}{17}$
Ecken	4	4	4	3	6	4

Aufgabe 24:

	1	2	3	4	5	6
a	8	5	6,5			4,8
b	8	4			7,4	
h	11		8,8	6,9		
h_{Δ_a}				7,75		
h_{Δ_b}						
s		9	9,7	8,2	9,1	
V					65,7	54,3
O						92,3

Aufgabe 25: $c = \frac{16}{3}$

Aufgabe 26:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	2	9	5	2	3	$\frac{10}{3}$
Seite b	3	4	7	11	8	$\frac{4}{5}$
Seite c	4	7	6	$3,5$	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{4}$
Volumen V	24	252	210	77	45	2
Oberfläche O	52	254	214	135	$\frac{357}{4}$	$\frac{178}{15}$

Aufgabe 27:

$V = Gh$	$V = \frac{1}{3}Gh$	$V = \frac{4}{3}Gh$
Quader	Kegel	Kugel
Prisma	Oktaeder	
Zylinder	Tetraeder	
schiefes Prisma		
Würfel		

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.8.1).

16.7.25 Lösungen zu Kreisen

Aufgabe 1:

a) $A \approx 28,27cm^2, U \approx 18,85cm$
b) $A \approx 113,097cm^2, U \approx 37,699cm$
c) $A \approx 95,033cm^2, U \approx 34,558cm$
d) $A \approx 2,181mm^2, U \approx 4,189mm$
e) $A \approx 1,396dm^2, U \approx 5,236dm$
f) $A \approx 2,405m^2, U \approx 5,498m$
g) $A \approx 0,256cm^2, U \approx 1,795cm$
h) $A \approx 10,179cm^2, U \approx 11,310cm$
i) $A \approx 10,559cm^2, U \approx 11,519cm$
j) $A \approx 15,708cm^2, U \approx 14,050cm$
k) $A \approx 31,01cm^2, U \approx 19,74cm$
l) $A \approx 5,629cm^2, U \approx 11,258cm$
m) $A \approx 0,20cm^2, U \approx 1,57cm$
n) $A \approx 23,21cm^2, U \approx 17,08cm,$
o) $A \approx 2,31cm^2, U \approx 5,39cm$

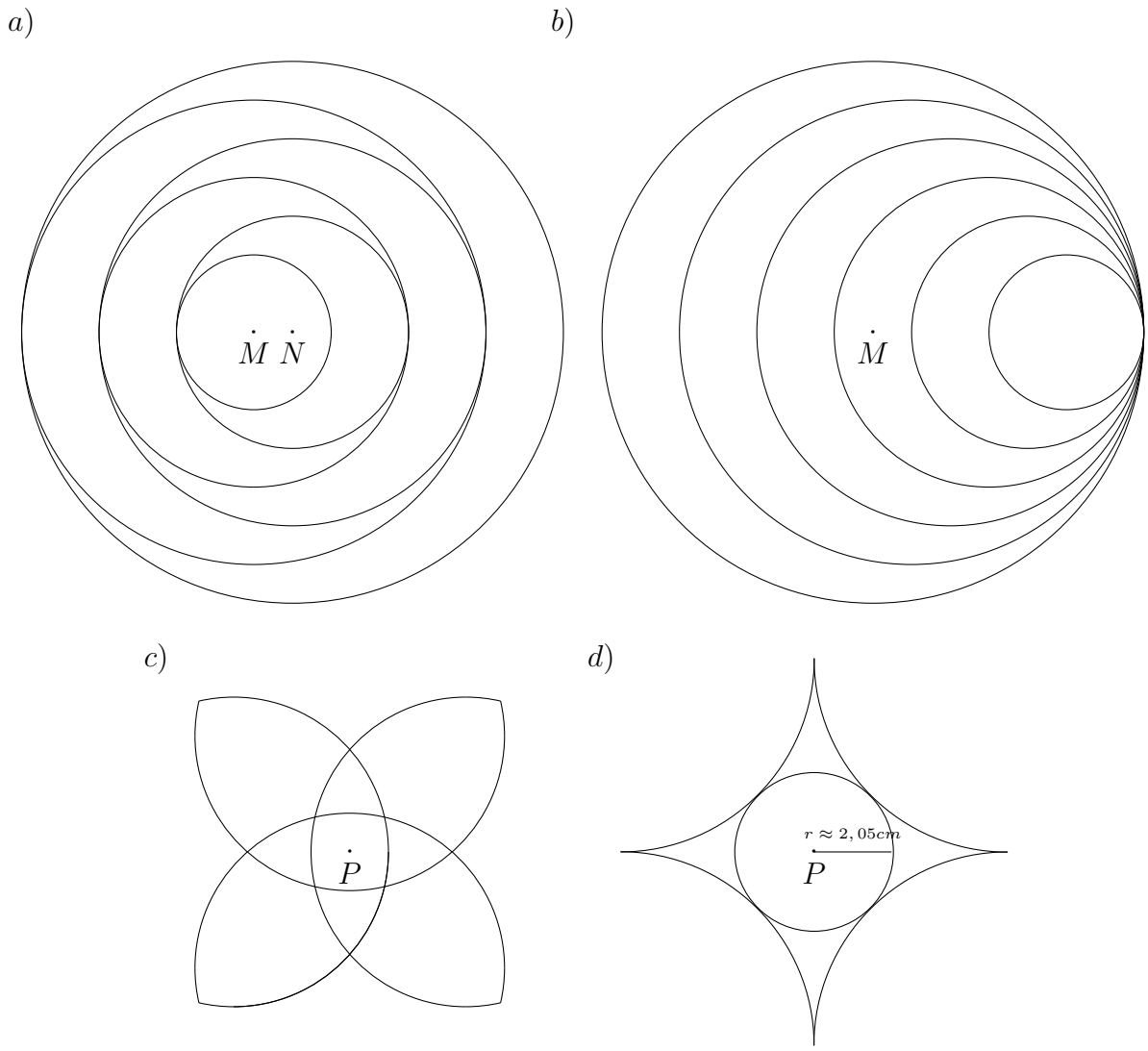
Aufgabe 2:

a) $A \approx 13,09cm^2, U \approx 15,24cm$ *b)* $A \approx 8,03cm^2, U \approx 12,03cm$
c) $A \approx 26,26cm^2, U \approx 20,98cm$ *d)* $A \approx 4,32cm^2, U \approx 8,88cm$
e) $A \approx 62,00cm^2, U \approx 31,72cm$ *f)* $A \approx 16,91cm^2, U \approx 18,53cm$
g) $A \approx 0,640cm^2, U \approx 3,207cm$ *h)* $A \approx 2,583cm^2, U \approx 8,476cm$
i) $A \approx 0,480cm^2, U \approx 3,909cm$ *j)* $A \approx 0,389cm^2, U \approx 3,177cm$
k) $A \approx 0,00587cm^2, U \approx 1,846cm$ *l)* $A \approx 53,276cm^2, U \approx 31,185cm$

Aufgabe 3:

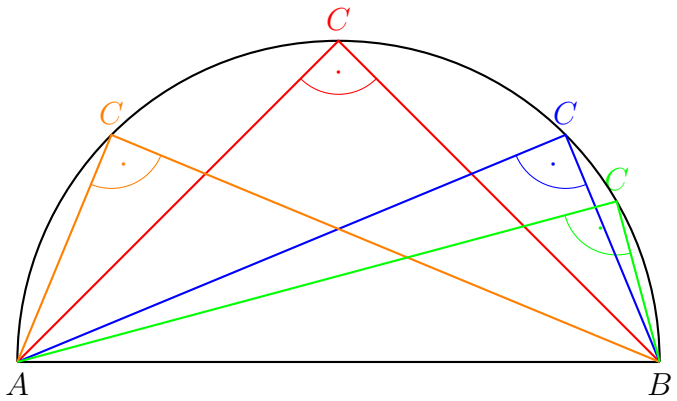
a) $180° = \pi\text{rad}$ *b)* $360° = 2\pi\text{rad}$ *c)* $90° = \frac{1}{2}\pi\text{rad}$
d) $45° = \frac{1}{4}\pi\text{rad}$ *e)* $30° = \frac{1}{6}\pi\text{rad}$ *f)* $120° = \frac{2}{3}\pi\text{rad}$
g) $36° = \frac{1}{5}\pi\text{rad}$ *h)* $55° \approx 0,960\text{rad}$ *i)* $193°\text{rad} \approx 3,368\text{rad}$
j) $11° \approx 0,192\text{rad}$ *k)* $466° \approx 8,133\text{rad}$ *l)* $1643° \approx 28,676\text{rad}$
m) $\frac{3\pi}{4}\text{rad} = 135°$ *n)* $\frac{3\pi}{2}\text{rad} = 270°$ *o)* $\frac{5\pi}{4}\text{rad} = 225°$
p) $1,2\pi\text{rad} = 216°$ *q)* $1,75\text{rad} = 315°$ *r)* $0,\bar{3}\text{rad} = 60°$
s) $\frac{4\pi}{5}\text{rad} = 144°$ *t)* $\frac{\pi}{9}\text{rad} = 20$ *u)* $\frac{9\pi}{7}\text{rad} \approx 231,429°$
v) $\frac{\pi}{12}\text{rad} = 15°$ *w)* $\frac{7\pi}{3}\text{rad} = 420°$ *x)* $\frac{11\pi}{9}\text{rad} = 220°$

Aufgabe 4:
(Alle Größen wurden mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.)



Aufgabe 5:
Der Abstand der Mittelpunkte nimmt nach rechts immer weiter um $0,5cm$ zu, während die Radien der Kreise um $0,5cm$ abnehmen.

Aufgabe 6:



Aufgabe 7:

$a)$ $s \approx 7,071cm$; $h \approx 3,536cm \Rightarrow A \approx 7,13cm^2$; $U \approx 14,925cm$
$b)$ $s \approx 4,870cm$; $h \approx 3,845cm \Rightarrow A \approx 1,11cm^2$; $U \approx 10,016cm$
$c)$ $s \approx 13,032cm$; $h \approx 3,612cm \Rightarrow A \approx 35,56cm^2$; $U \approx 28,895cm$
$d)$ $s \approx 0,897cm$; $h \approx 2,205cm \Rightarrow A \approx 0,027cm^2$; $U \approx 1,800cm$
$e)$ $s \approx 0,794cm$; $h \approx 0,364cm \Rightarrow A \approx 0,096cm^2$; $U \approx 1,686cm$
$f)$ $s \approx 5,060cm$; $h \approx 0,774cm \Rightarrow A \approx 6,96cm^2$; $U \approx 11,802cm$
$g)$ $s \approx 2,562cm$; $h \approx 0,531cm \Rightarrow A \approx 1,58cm^2$; $U \approx 5,828cm$
$h)$ $s \approx 2,718cm$; $h \approx 2,354cm \Rightarrow A \approx 0,67cm^2$; $U \approx 5,565cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.9.3).

16.7.26 Lösungen zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1:

$a)$ $r = 5cm$ und $h = 11cm \Rightarrow V \approx 863,94cm^3, O \approx 329,87cm^2$
$b)$ $r = 47cm$ und $h = 85cm \Rightarrow V \approx 589551,15cm^3, O \approx 26430,22cm^2$
$c)$ $r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm \Rightarrow V \approx 0,59cm^3, O \approx 2,75cm^2$
$d)$ $r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm \Rightarrow V \approx 43,98cm^3, O \approx 60,61cm^2$
$e)$ $r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm \Rightarrow V \approx 38,25cm^3, O \approx 50,60cm^2$
$f)$ $r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm \Rightarrow V \approx 68,02cm^3, O \approx 323,78cm^2$

Aufgabe 2:

a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm \Rightarrow V \approx 45,24cm^3, s \approx 4,83cm, O \approx 110,91cm^2$

b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \frac{2}{5}cm \Rightarrow V \approx 0,84cm^3, s \approx 1,47cm, O \approx 12,81cm^2$

c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm \Rightarrow V \approx 220,65cm^3, s \approx 8,22cm, O \approx 334,60cm^2$

d) $r = \frac{10}{7}cm$ und $h = 4cm \Rightarrow V \approx 8,55cm^3, s \approx 4,25cm, O \approx 25,47cm^2$

e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm \Rightarrow V \approx 36,65cm^3, s \approx 5,19cm, O \approx 160,10cm^2$

f) $r = \frac{1}{8}cm$ und $h = 9cm \Rightarrow V \approx 0,15cm^3, s \approx 9,00cm, O \approx 3,58cm^2$

Aufgabe 3:

a) $r_1 = 4cm, r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm \Rightarrow V \approx 146,61cm^3, s_1 \approx 5,39cm, O \approx 164,34cm^2$

b) $r_1 = 3,5cm, r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm \Rightarrow V \approx 144,78cm^3, s_1 \approx 7,28cm, O \approx 159,91cm^2$

c) $r_1 = 6cm, r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm, \Rightarrow V \approx 490,09cm^3, s_1 \approx 9,85cm, O \approx 373,19cm^2$

d) $r_1 = \frac{1}{3}cm, r_2 = \frac{9}{4}cm$ und $h_1 = \frac{13}{2}cm \Rightarrow V \approx 40,32cm^3, s_1 \approx 6,78cm, O \approx 38,55cm^2$

e) $r_1 = 1cm, r_2 = 5cm$ und $h_1 = \frac{7}{4}cm \Rightarrow V \approx 56,81cm^3, s_1 \approx 4,37cm, O \approx 163,98cm^2$

f) $r_1 = \pi cm, r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm \Rightarrow V \approx 38,20cm^3, s_1 \approx 1,48cm, O \approx 81,39cm^2$

Aufgabe 4:
Beide Körper haben das gleiche Volumen und die gleiche Oberfläche. $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(h_1 + h_2)r_1^2 - 2\frac{1}{3}\pi h_2 r_2^2 \approx 100,53cm^3, O = \pi r_1^2 + \pi(s_1 + s_2)r_1 \approx 499,85cm^2$. Dabei ist das Volumen des kleines Kegels zweimal vom großen Kegel zu subtrahieren. Die Oberfläche ist dabei identisch zur Oberfläche eines großen Kegels.

Aufgabe 5:

	1	2	3	4	5	6
r	5	4	0,874	4	0,775	$\frac{17}{4}$
h	7	0,179	5	0,477	$\frac{7}{3}$	5,482
V	549,779	9	12	24	$\frac{22}{5}$	311,085
O	267,035	102,781	18,529	106,531	9,451	$\frac{999}{10}$

Aufgabe 6:

	1	2	3	4	5	6
r	5	4	7,483	0,752	1,342	2
h	7	5,745	5	5,549	$\frac{7}{3}$	2,103
s	8,602	7	9	5,6	2,692	2,902
V	183,260	96,251	293,215	3,284	$\frac{22}{5}$	8,808
O	213,665	138,230	387,515	15	17,005	$\frac{1544}{5}$

Aufgabe 7: Benutze den Strahlensatz und setze ein!

$$\begin{aligned}
\frac{r_2}{r_1} &= \frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \\
\Rightarrow h_2 &= \frac{h_1}{r_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} = \frac{h_1}{r_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1}} = \frac{h_1 r_2 \cancel{r_1}}{\cancel{r_1}\left(r_1 - r_2\right)} \\
\Rightarrow V &= \frac{1}{3} G_1 h - \frac{1}{3} G_2 h_2 \\
&= \frac{\pi}{3}\left(r_1^2(h_1 + h_2) - r_2^2 h_2\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(r_1^2 h_1 + r_1^2 \frac{h_1 r_2}{r_1 - r_2} - r_2^2 \frac{h_1 r_2}{r_1 - r_2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 \frac{\left(r_1 - r_2\right)\left(r_1 + r_2\right)}{r_1 - r_2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2\left(r_1 + r_2\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 r_1 + r_2^2\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.10.1).

16.7.27 Lösungen zu Kugeln

Aufgabe 1:

$a)\ r = 3cm \Rightarrow V \approx 113,10cm^3, O \approx 113,10cm^2$
$b)\ r = \pi cm \Rightarrow V \approx 129,88cm^3, O \approx 124,03cm^2$
$c)\ d = 4cm \Rightarrow V \approx 33,51cm^3, O \approx 50,27cm^2$
$d)\ d = 0,5cm \Rightarrow V \approx 0,066cm^3, O \approx 0,785cm^2$
$e)\ r = 2,718cm \Rightarrow V \approx 84,11cm^3, O \approx 92,83cm^2$
$f)\ d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow V \approx 2,64cm^3, O \approx 9,23cm^2$

Aufgabe 2:

$a)\ h \approx 1,172cm \ \Rightarrow\ V \approx 39,260cm^3$ und $O \approx 259,951cm^2$
$b)\ h \approx 0,533cm \ \Rightarrow\ V \approx 54,683cm^3$ und $O \approx 576,416cm^2$
$c)\ h \approx 1,190cm \ \Rightarrow\ V \approx 27,626cm^3$ und $O \approx 171,744cm^2$
$d)\ h \approx 0,025cm \ \Rightarrow\ V \approx 1,096cm^3$ und $O \approx 34,660cm^2$
$e)\ h \approx 0,196cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,182cm^3$ und $O \approx 1,205cm^2$
$f)\ h \approx 2,754cm \ \Rightarrow\ V \approx 46,150cm^3$ und $O \approx 209,513cm^2$
$g)\ h \approx 1,328cm \ \Rightarrow\ V \approx 8,929cm^3$ und $O \approx 44,244cm^2$
$h)\ h \approx 0,068cm \ \Rightarrow\ V \approx 1,055cm^3$ und $O \approx 17,205cm^2$

Aufgabe 3:

$a)\ h \approx 2,343cm \ \Rightarrow\ V \approx 124,501cm^3$ und $O \approx 218,298cm^2$
$b)\ h \approx 0,124cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,143cm^3$ und $O \approx 4,626cm^2$
$c)\ h \approx 3,729cm \ \Rightarrow\ V \approx 213,053cm^3$ und $O \approx 243,098cm^2$
$d)\ h \approx 0,005cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,00041cm^3$ und $O \approx 0,330cm^2$
$e)\ h \approx 0,148cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,034cm^3$ und $O \approx 0,933cm^2$
$f)\ h \approx 0,0006cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,00042cm^3$ und $O \approx 0,282cm^2$
$g)\ h \approx 0,145cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,103cm^3$ und $O \approx 2,867cm^2$
$h)\ h \approx 0,413cm \ \Rightarrow\ V \approx 1,383cm^3$ und $O \approx 13,572cm^2$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6
r	11	2,17	6,56	8,62	2,22	2,14
V	5575,28	43	1183,23	2682,94	$\frac{137}{3}$	40,89
O	760,27	29,68	541	466,87	30,89	$\frac{287}{5}$

Aufgabe 5:

$a)$ $h \approx 0,675445cm \Rightarrow V \approx 9,710cm^3$ und $O \approx 57,982cm^2$
$b)$ $h \approx 0,182858cm \Rightarrow V \approx 0,351cm^3$ und $O \approx 7,708cm^2$
$c)$ $h \approx 0,472301cm \Rightarrow V \approx 4,879cm^3$ und $O \approx 41,557cm^2$
$d)$ $h \approx 0,494712cm \Rightarrow V \approx 4,294cm^3$ und $O \approx 34,977cm^2$
$e)$ $h \approx 0,121225cm \Rightarrow V \approx 0,069cm^3$ und $O \approx 2,308cm^2$
$f)$ $h \approx 0,168502cm \Rightarrow V \approx 0,363cm^3$ und $O \approx 8,641cm^2$
$g)$ $h \approx 0,561050cm \Rightarrow V \approx 2,922cm^3$ und $O \approx 21,160cm^2$
$h)$ $h \approx 0,396848cm \Rightarrow V \approx 1,279cm^3$ und $O \approx 13,061cm^2$

Aufgabe 6:

$a)$ $h \approx 7,26867cm \Rightarrow V \approx 1024,35cm^3$ und $O \approx 619,035cm^2$
$b)$ $h \approx 9,63592cm \Rightarrow V \approx 468,494cm^3$ und $O \approx 291,711cm^2$
$c)$ $h \approx 2,53159cm \Rightarrow V \approx 32,450cm^3$ und $O \approx 57,983cm^2$
$d)$ $h \approx 1,49569cm \Rightarrow V \approx 110,071cm^3$ und $O \approx 296,712cm^2$
$e)$ $h \approx 0,047417cm \Rightarrow V \approx 0,0073cm^3$ und $O \approx 0,622cm^2$
$f)$ $h \approx 0,696109cm \Rightarrow V \approx 6,039cm^3$ und $O \approx 35,209cm^2$
$g)$ $h \approx 1,71986cm \Rightarrow V \approx 2,797cm^3$ und $O \approx 9,602cm^2$
$h)$ $h \approx 1,76901cm \Rightarrow V \approx 17,596cm^3$ und $O \approx 43,064cm^2$

Aufgabe 7:

$a)\ h \approx 7,29689cm \Rightarrow V \approx 764,053cm^3$ und $O \approx 474,595cm^2$
$b)\ h \approx 2,19958cm \Rightarrow V \approx 34,454cm^3$ und $O \approx 67,723cm^2$
$c)\ h \approx 3,63908cm \Rightarrow V \approx 216,63cm^3$ und $O \approx 251,983cm^2$
$d)\ h \approx 9,15490cm \Rightarrow V \approx 1368,75cm^3$ und $O \approx 685,808cm^2$
$e)\ h \approx 1,96953cm \Rightarrow V \approx 11,802cm^3$ und $O \approx 28,032cm^2$
$f)\ h \approx 4,74603cm \Rightarrow V \approx 188,276cm^3$ und $O \approx 182,269cm^2$
$g)\ h \approx 0,639466cm \Rightarrow V \approx 2,807cm^3$ und $O \approx 17,984cm^2$
$h)\ h \approx 5,42872cm \Rightarrow V \approx 84,134cm^3$ und $O \approx 92,853cm^2$

Aufgabe 8:

$a)\ h \approx 0,417424cm \Rightarrow V \approx 21,856cm^3$ und $O \approx 222,648cm^2$
$b)\ h \approx 0,343316cm \Rightarrow V \approx 10,937cm^3$ und $O \approx 109,264cm^2$
$c)\ h \approx 0,644893cm \Rightarrow V \approx 59,192cm^3$ und $O \approx 569,959cm^2$
$d)\ h \approx 0,208997cm \Rightarrow V \approx 19,944cm^3$ und $O \approx 298,396cm^2$
$e)\ h \approx 0,634968cm \Rightarrow V \approx 7,240cm^3$ und $O \approx 49,088cm^2$
$f)\ h \approx 0,222551cm \Rightarrow V \approx 8,856cm^3$ und $O \approx 108,642cm^2$
$g)\ h \approx 0,613540cm \Rightarrow V \approx 50,730cm^3$ und $O \approx 488,055cm^2$
$h)\ h \approx 0,677603cm \Rightarrow V \approx 77,484cm^3$ und $O \approx 762,644cm^2$

Aufgabe 9:

$a)\ h \approx 0,160584cm \Rightarrow V \approx 7,066cm^3$ und $O \approx 100,578cm^2$
$b)\ h \approx 0,580896cm \Rightarrow V \approx 12,807cm^3$ und $O \approx 99,685cm^2$
$c)\ h \approx 0,277543cm \Rightarrow V \approx 8,360cm^3$ und $O \approx 89,417cm^2$
$d)\ h \approx 19,69790cm \Rightarrow V \approx 9844,39cm^3$ und $O \approx 40666,3cm^2$
$e)\ h \approx 0,569243cm \Rightarrow V \approx 1,537cm^3$ und $O \approx 8,600cm^2$
$f)\ h \approx 4,576910cm \Rightarrow V \approx 157,828cm^3$ und $O \approx 681,644cm^2$
$g)\ h \approx 1,044630cm \Rightarrow V \approx 1,735cm^3$ und $O \approx 7,390cm^2$
$h)\ h \approx 0,298985cm \Rightarrow V \approx 0,558cm^3$ und $O \approx 3,603cm^2$

Aufgabe 10:

$a)\ h \approx 7,87813cm \ \Rightarrow\ V \approx 697,121cm^3$ und $O \approx 2934,51cm^2$
$b)\ h \approx 7,76342cm \ \Rightarrow\ V \approx 406,492cm^3$ und $O \approx 1546,75cm^2$
$c)\ h \approx 6,03177cm \ \Rightarrow\ V \approx 439,752cm^3$ und $O \approx 1964,31cm^2$
$d)\ h \approx 10,8639cm \ \Rightarrow\ V \approx 713,543cm^3$ und $O \approx 2328,89cm^2$
$e)\ h \approx 1,94706cm \ \Rightarrow\ V \approx 11,984cm^3$ und $O \approx 51,633cm^2$
$f)\ h \approx 3,85581cm \ \Rightarrow\ V \approx 250,343cm^3$ und $O \approx 1267,00cm^2$
$g)\ h \approx 2,35052cm \ \Rightarrow\ V \approx 32,388cm^3$ und $O \approx 149,991cm^2$
$h)\ h \approx 2,03275cm \ \Rightarrow\ V \approx 31,458cm^3$ und $O \approx 155,435cm^2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.11.1).

Lösungen zu Zirkelkonstruktionen

Aufgabe 1: Das Streckenverhältnis zwischen den Schnittpunkten beträgt 2:1.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.13.1).

16.7.28 Lösungen zu den gemischten Geometrieaufgaben

Aufgabe 1:

a)
b)
c)

Aufgabe 2:

a)
b)
c)

Aufgabe 3:

a)
b)
c)

Aufgabe 4:

Aufgabe 5:

Aufgabe 6:

Aufgabe 7:

Aufgabe 8:

a)
b)
c)

Aufgabe 9:

a)
b)
c)

Aufgabe 10:

a)
b)
c)

Aufgabe 11:

Aufgabe 12:

Aufgabe 13:

a)
b)
c)

Aufgabe 14:

Aufgabe 15:

a)
b)
c)
d)

Aufgabe 16:

a)
b)
c)
d)

Aufgabe 17:

a)
b)
c)
d)

Aufgabe 18:

a)
b)
c)
d)

Aufgabe 19:

a)
b)
c)

Aufgabe 20:

a)
b)
c)

Aufgabe 21:

a)
b)
c)

Aufgabe 22:

a)
b)
c)

Aufgabe 23:

$a)$
$b)$
$c)$

Aufgabe 24:

Aufgabe 25:

Aufgabe 26:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.14).

Lösungen zur Trigonometrie

Aufgabe 1:

$a)$ $a = 7cm$	und $c = 11cm$:	$\Rightarrow b \approx 8,49cm,$	$\alpha \approx 39,52°,$	$\beta \approx 50,48°$
$b)$ $a = 4cm$	und $b = 6cm$:	$\Rightarrow c \approx 7,21cm,$	$\alpha \approx 33,69°,$	$\beta \approx 56,31°$
$c)$ $\alpha = 55°$	und $c = 9cm$:	$\Rightarrow a \approx 7,37cm,$	$b \approx 5,16cm,$	$\beta \approx 35°$
$d)$ $a = 5,35cm$	und $\beta = 18°$:	$\Rightarrow b \approx 1,74cm,$	$\alpha \approx 72°,$	$c \approx 5,63cm$
$e)$ $b = 14cm$	und $\beta = 81°$:	$\Rightarrow c \approx 14,18cm,$	$a \approx 2,22cm,$	$\beta \approx 9°$
$f)$ $a = \pi cm$	und $\alpha = 27,18°$:	$\Rightarrow b \approx 6,12cm,$	$c \approx 6,88cm,$	$\beta \approx 62,82°$
$g)$ $c = \sqrt{60}cm$	und $\beta = \frac{1}{3}\pi\text{rad}$:	$\Rightarrow b \approx 6,71cm,$	$a \approx 3,87cm,$	$\alpha \approx 30°$
$h)$ $c = \frac{83}{17}cm$	und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\text{rad}$:	$\Rightarrow b \approx 2,12cm,$	$a \approx 4,40cm,$	$\beta \approx 64,29°$

Aufgabe 2:

$a)$ $c \approx 5,292cm$	$\beta \approx 79,107°$	$\alpha \approx 40,893°$
$b)$ $b \approx 4,762cm$	$\alpha \approx 76,046°$	$\gamma \approx 69,954°$
$c)$ $a \approx 9,145cm$	$\beta \approx 74,610°$	$\gamma \approx 33,391°$
$d)$ $c \approx 0,999cm$	$\beta \approx 144,436°$	$\alpha \approx 31,564°$
$e)$ $a \approx 7,119cm$	$c \approx 5,429cm$	$\alpha = 112°$
$f)$ $a \approx 3,636cm$	$b \approx 4,006cm$	$\beta = 98°$
$g)$ $b \approx 40,602km$	$c \approx 40,403km$	$\gamma = 46,7°$
$h)$ $a \approx 3,125$	$b \approx 2,465$	$\alpha = 49,1°$

Aufgabe 3:

$c \approx 6,929cm$	$\psi = 60°$	$a \approx 3,464cm$
$z \approx 5,895cm$	$\chi \approx 45,96°$	$\xi \approx 44,04°$
$f \approx 8,238cm$	$\epsilon = 28°$	$e \approx 4,380cm$
$g \approx 7,742cm$	$\theta \approx 35,538°$	$\nu \approx 54,462°$
$r \approx 9,641cm$	$s \approx 5,802cm$	$\tau = 37°$
$j \approx 1,075cm$	$l \approx 5,057cm$	$\sigma = 78°$
$q \approx 6,271cm$	$p \approx 16,338cm$	$\eta = 69°$
$w \approx 6,132cm$	$\phi \approx 43,07°$	$\rho \approx 46,93°$
$a \approx 2,932cm$	$\lambda \approx 22,45°$	$\kappa \approx 67,55°$

Aufgabe 4:

$x \approx 13,465km$ $\quad$ $h \approx 8,611km$

Aufgabe 5:

$l \approx 181,238m$ $\quad$ Neigung: $\approx 4,98\%$

Aufgabe 6:

$\alpha \approx 28,50°$ $\beta \approx 39,19°$

Aufgabe 7:

a) $a \approx 18,463m$
b) $g \approx 35,000m$
c) $h \approx 30,001m$
d) Seillänge $\approx 174,479m$
e) $h_{\text{neu}} \approx 38,501m$

Aufgabe 8:

a) $l_1 \approx 8,000m$ $l_2 \approx 5,333m$
b) Aktionsradius $\approx 13,040m$
c) maximale Höhe $\approx 24,560m$
d) Seillänge $\approx 28,881m$
e) minimaler Abstand $\approx 4,324m$

Aufgabe 9:

a) $l \approx 20,928m$
b) $m \approx 20681,65kg$
c) $\phi \approx 34,987°$
d) $\chi \approx 24,166°$ Höhe des Brückenendes $\approx 17,282m$

Aufgabe 10:

a) $\overline{GM} \approx 8,005km$ $\overline{GP} \approx 19,814km$
b) $\overline{GM} \approx 29,611km$
c) $\overline{AG} \approx 39,554km$
d) $\overline{PB} \approx 27,488km$
e) Zeit $\approx 4,879$Tage

Aufgabe 11:

a) $\overline{BC} \approx 1203,619m$

b) $\overline{AC} \approx 1203,619m$ $\overline{AB} \approx 1380,735m$

c) $h_{\overline{AB}} \approx 985,947m$ $h_{\overline{CB}} = h_{\overline{AC}} \approx 1131,032m$

d) $h_{\overline{AB},C} \approx 502,546m$ $h_{\overline{CB},A} = h_{\overline{AC},B} \approx 842,783m$

Aufgabe 14:

Behauptung	wahr	falsch
Man kann die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion ausdrücken.	x	
Gegenkathete durch Hypotenuse ist gleich der Kosinus des Winkels.		x
Der Tangens ist der invertierte Kotangens.	x	
Der Sinus von 180° ist gleich 1.		x
Der minimale Funktionswert vom Kosinus ist 0.		x
Tangens ist der Quotient aus Sinus und Kosinus.	x	
Der Kosinus ist um der 90° verschobene Sinus.	x	
Da der Tangens von 90° nicht definiert ist, ist auch der Kotangens von 90° nicht definiert.		x
$\cos(180°) = \cos(\pi rad)$.	x	
$\sin^{-1}(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$	x	
Der Kosinus wiederholt sich nach $4\pi rad$.		x

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.0.1).

16.7.29 Lösungen zu den gemischten Trigonometrieaufgaben

Aufgabe 1:

	1	2	3	4	5	6
a	2	4	6	4,7	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
b	3	6	9	7,05	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{20}$
c	$\approx 3{,}606$	$\approx 7{,}211$	$\approx 10{,}817$	$\approx 8{,}473$	$\approx 0{,}901$	$\approx 0{,}541$
$\frac{a}{b}$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$
$\frac{b}{a}$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$
$\frac{a}{c}$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$
$\frac{b}{c}$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$

Aufgabe 2:

	1	2	3	4	5	6
α in $[°]$	5	11	30	45	60	90
α in $[rad]$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}192$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}191$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	$\approx 0{,}996$	$\approx 0{,}982$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}194$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot\alpha$	$\approx 11{,}430$	$\approx 5{,}145$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
	1	2	3	4	5	6
α in $[°]$	120	135	210	240	300	315
α in $[rad]$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1
$\cot\alpha$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1

Aufgabe 3:

	1	2	3	4	5	6
a	4	7	3,4	5,35	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{10}$
b	5	9	7,2	8,31	$\frac{8}{5}$	$\sqrt{15}$
c	$\approx$ 6,40	$\approx$ 11,40	$\approx$ 7,96	$\approx$ 9,88	$\approx$ 2,83	5
$\alpha =$arctan$\left(\frac{a}{b}\right)$ in [°]	$\approx$ 38,66	$\approx$ 37,88	$\approx$ 25,28	$\approx$ 32,77	$\approx$ 55,56	$\approx$ 39,23
$\alpha =$arcsin$\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]	$\approx$ 38,66	$\approx$ 37,88	$\approx$ 25,28	$\approx$ 32,77	$\approx$ 55,56	$\approx$ 39,23
$\alpha =$arccos$\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]	$\approx$ 38,66	$\approx$ 37,88	$\approx$ 25,28	$\approx$ 32,77	$\approx$ 55,56	$\approx$ 39,23
$\beta =$arctan$\left(\frac{b}{a}\right)$ in [°]	$\approx$ 51,34	$\approx$ 52,12	$\approx$ 64,72	$\approx$ 57,23	$\approx$ 34,44	$\approx$ 50,77
$\beta =$arcsin$\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]	$\approx$ 51,34	$\approx$ 52,12	$\approx$ 64,72	$\approx$ 57,23	$\approx$ 34,44	$\approx$ 50,77
$\beta =$arccos$\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]	$\approx$ 51,34	$\approx$ 52,12	$\approx$ 64,72	$\approx$ 57,23	$\approx$ 34,44	$\approx$ 50,77

Aufgabe 5:

a) $\alpha \approx 8,850°$; $\beta \approx 81,150°$ und $b \approx 12,845cm$

b) $\alpha \approx 1°$; $\beta \approx 89°$ und $a = 4999,9996m$

c) $\alpha \approx 51,073°$; $\beta \approx 38,928°$ und $c \approx 10,027$

d) $\beta = 55,4°$; $c \approx 13,364dm$ und $a \approx 7,588dm$

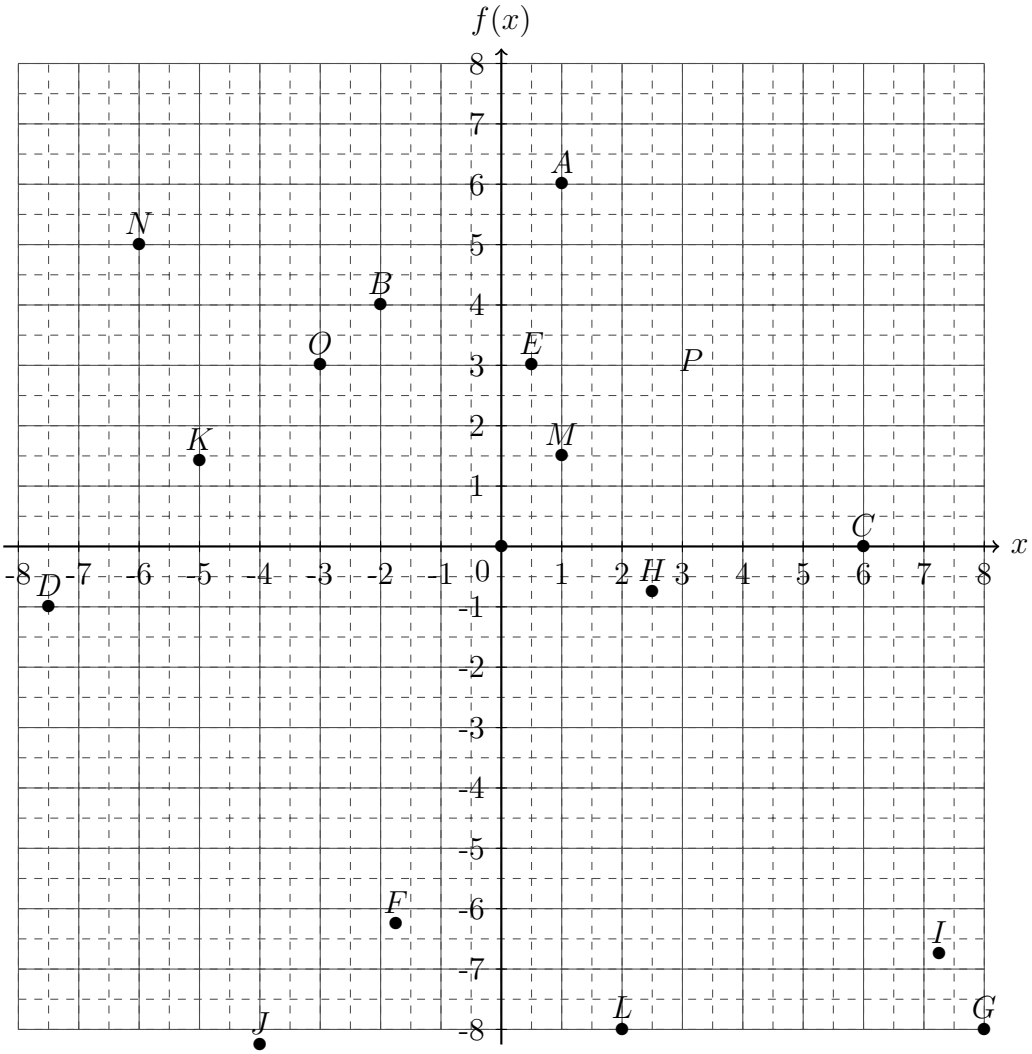
e) $\gamma \approx 66,120°$; $\alpha \approx 23,880°$ und $c \approx 57,982cm$

f) $\gamma = 30,82°$; $c \approx 8,591cm$ und $a \approx 16,768cm$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.1).

16.7.30 Lösungen zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

a)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	7	5	3	2	1	0	-1

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	5,83	3,67	2,6	0,71	-2,44	-3,28	-5,25

b)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-12,49	$\frac{1}{3}$	-3,08	-4,94	3,86	8,76	24,26

c)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	$\frac{9}{8}$	-1	$\frac{29}{8}$	-6
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,83	1,52	1,85	-1,73	7,47	-6,47	4,09

d)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	$-\frac{87}{16}$	-6	$-\frac{71}{16}$	3
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	$-\frac{422}{81}$	-5,08	-5,91	34,82	72,67	250

e)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-3	-4	-3	-1,75	0	2,25	5
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-3,828	$-\frac{32}{9}$	$-\frac{64}{25}$	$\frac{29}{49}$	9,826	13,153	22,246

f)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	12,485	$\frac{1}{3}$	$-\frac{77}{25}$	$-\frac{242}{49}$	3,857	8,759	24,261

g)

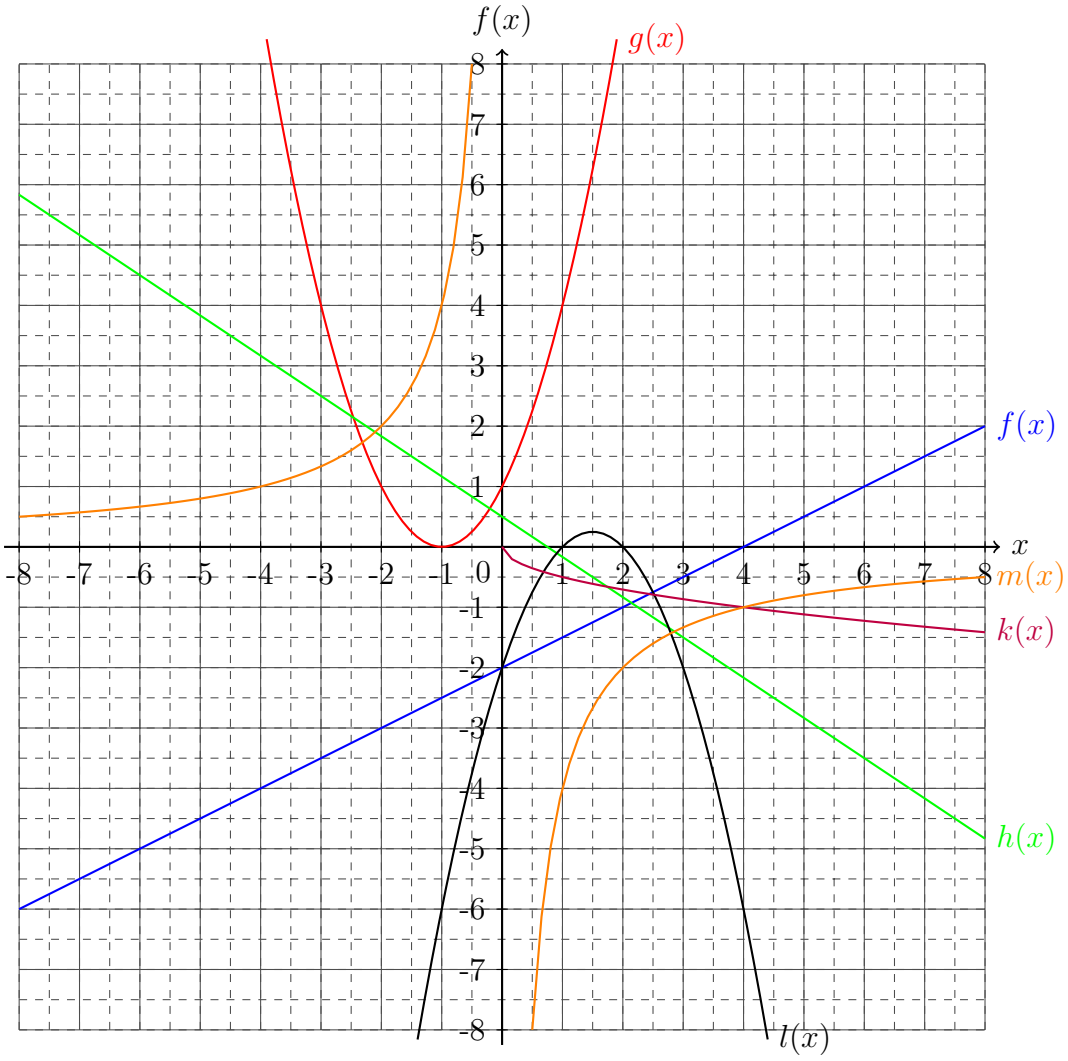
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	1,125	-1	3,625	-6
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,828	$\frac{41}{27}$	$\frac{231}{125}$	$-\frac{594}{343}$	-7,471	-6,472	4,093

$h)$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	-5,4375	-6	-4,4375	3

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	$-\frac{422}{81}$	$-\frac{3174}{625}$	$-\frac{14181}{2401}$	34,820	72,670	250

Aufgabe 3:



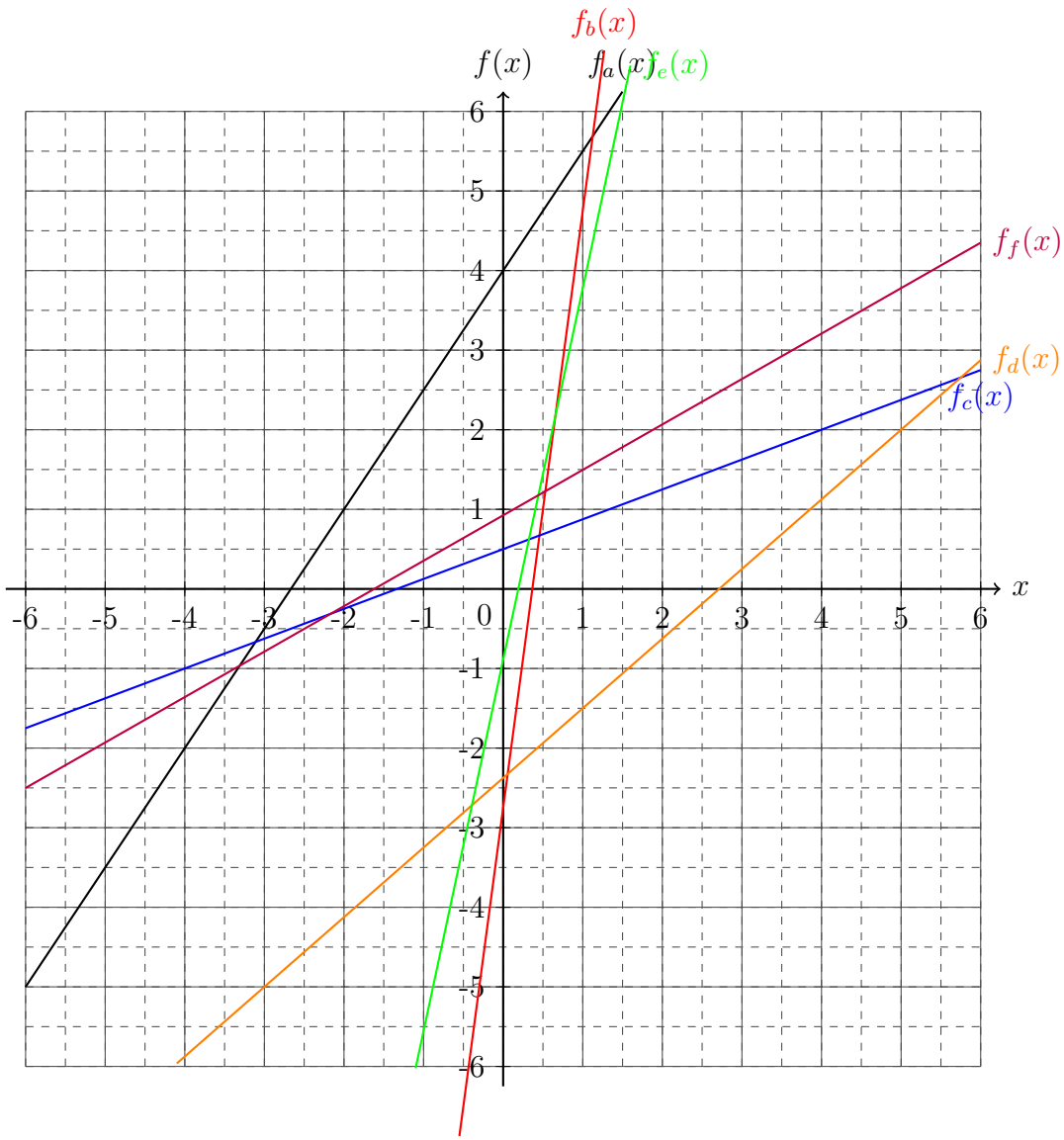
$a)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$
$b)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \left\{g(x) \in \mathbb{R}^+\right\}$
$c)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \{h(x) \in \mathbb{R}\}$
$d)\ \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^+\right\}, \quad \mathbb{W} = \left\{k(x) \in \mathbb{R}^-\right\}$
$e)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{W} = \left\{l(x) \in \mathbb{R} | l(x) \leq \frac{1}{4}\right\}$
$f)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \quad \mathbb{W} = \{m(x) \in \mathbb{R}\}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.1.1).

16.7.31 Lösungen zu Geraden

Aufgabe 1:

$a)\ f_a(x) = \frac{3}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow x_N = -\frac{8}{3}$
$b)\ f_b(x) = \frac{15}{2} \cdot x - \frac{11}{4} \quad \Rightarrow x_N = \frac{11}{30}$
$c)\ f_c(x) = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_N = -\frac{4}{3}$
$d)\ f_d(x) = \frac{7}{8} \cdot x - \frac{19}{8} \quad \Rightarrow x_N = \frac{19}{7}$
$e)\ f_e(x) = \frac{14}{3} \cdot x - \frac{8}{9} \quad \Rightarrow x_N = \frac{4}{21}$
$f)\ f_f(x) = \frac{e - \sqrt{3}}{\pi - \sqrt{2}} \cdot x + e - \frac{e - \sqrt{3}}{\pi - \sqrt{2}} \cdot \pi$
$f_f(x) \approx 0,571 \cdot x + 0,925 \quad \Rightarrow x_N = -1,620$



Aufgabe 2:

a) $f_a(x) = \frac{5}{4} \cdot x + 1$

b) $f_b(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$

c) $f_c(x) = -2 \cdot x + \frac{9}{4}$

d) $f_d(x) = 6 \cdot x - 2$

e) $f_e(x) = -\frac{1}{4} \cdot x - 5$

f) $f_f(x) = -x + \frac{1}{3}$

Aufgabe 3:

$a)\ P_x\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{11}{2}\right)$
$b)\ P_x\left(\frac{54}{95}\middle|-\frac{86}{95}\right)$
$c)\ P_x\left(\frac{6}{5}\middle|-\frac{18}{5}\right)$
$d)\ P_x\left(1,99\,|3,64\right)$
$e)\ P_x\left(1,30\,|4,35\right)$
$f)\ P_x\left(2,85\,|-4,03\right)$

Aufgabe 4:

$a)\ f(x) = 5x - 9 \Rightarrow x_N = \frac{9}{5}$

$b)\ f(x) = \frac{1}{3}x - 6 \Rightarrow x_N = 18$

$c)\ f(x) = -3x + 4 \Rightarrow x_N = \frac{4}{3}$

$d)\ f(x) = -12x + \frac{8}{17} \Rightarrow x_N = \frac{8}{204}$

$e)\ f(x) = 9x + 4 \Rightarrow x_N = -\frac{4}{9}$

$f)\ f(x) = 15x + \sqrt{2} \Rightarrow x_N = -\frac{\sqrt{2}}{15}$

$g)\ f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{5} \Rightarrow x_N = -\frac{4}{15}$

$h)\ f(x) = 3x - \frac{5}{6} \Rightarrow x_N = \frac{5}{18}$

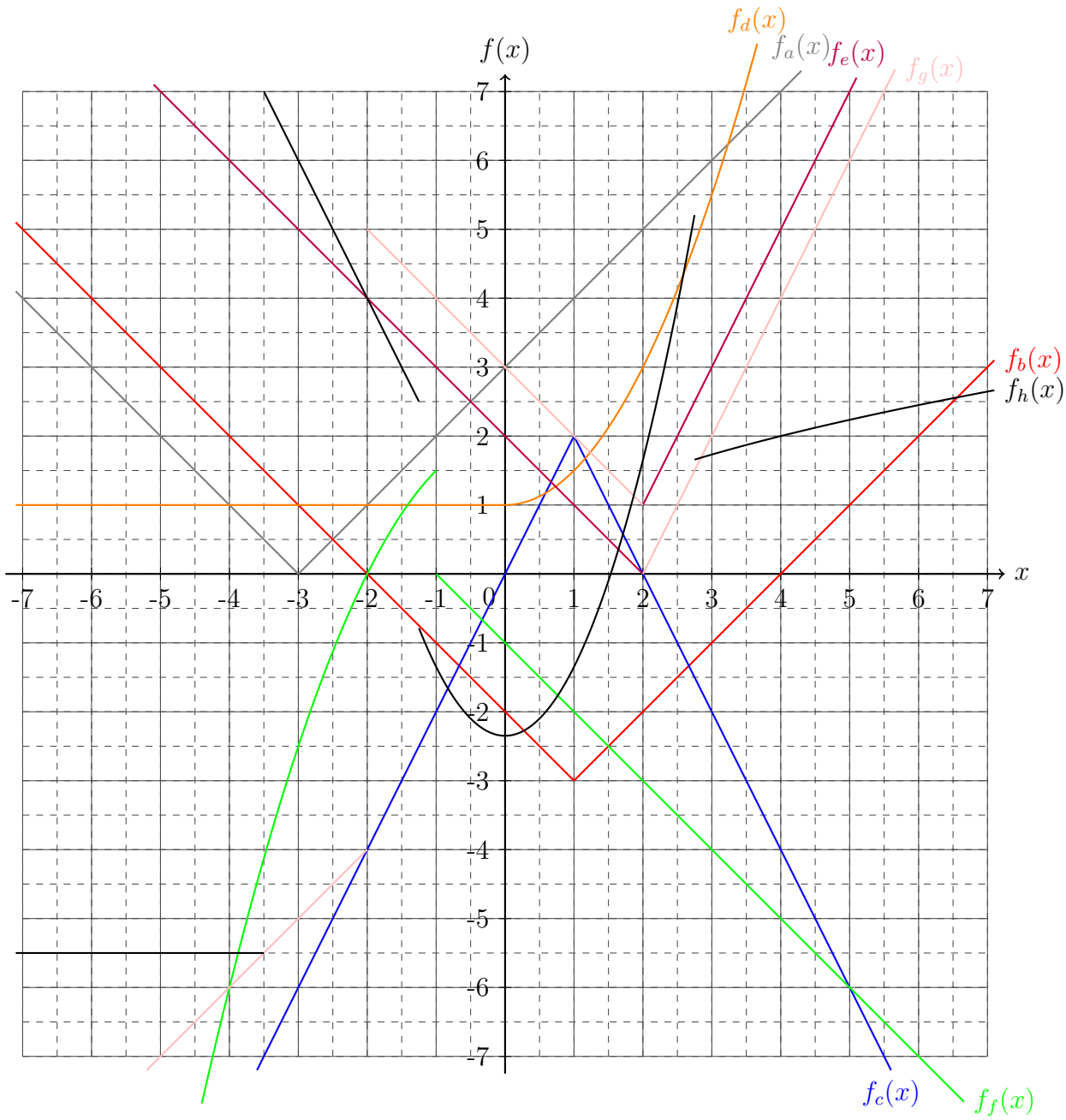
$i)\ f(x) = -\sqrt{2}x - 45 \Rightarrow x_N = -\frac{45}{\sqrt{2}}$

$j)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \ln 4 \Rightarrow x_N = -\ln 4\sqrt{2}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.2.1).

16.7.32 Lösungen zu Stufenfunktionen

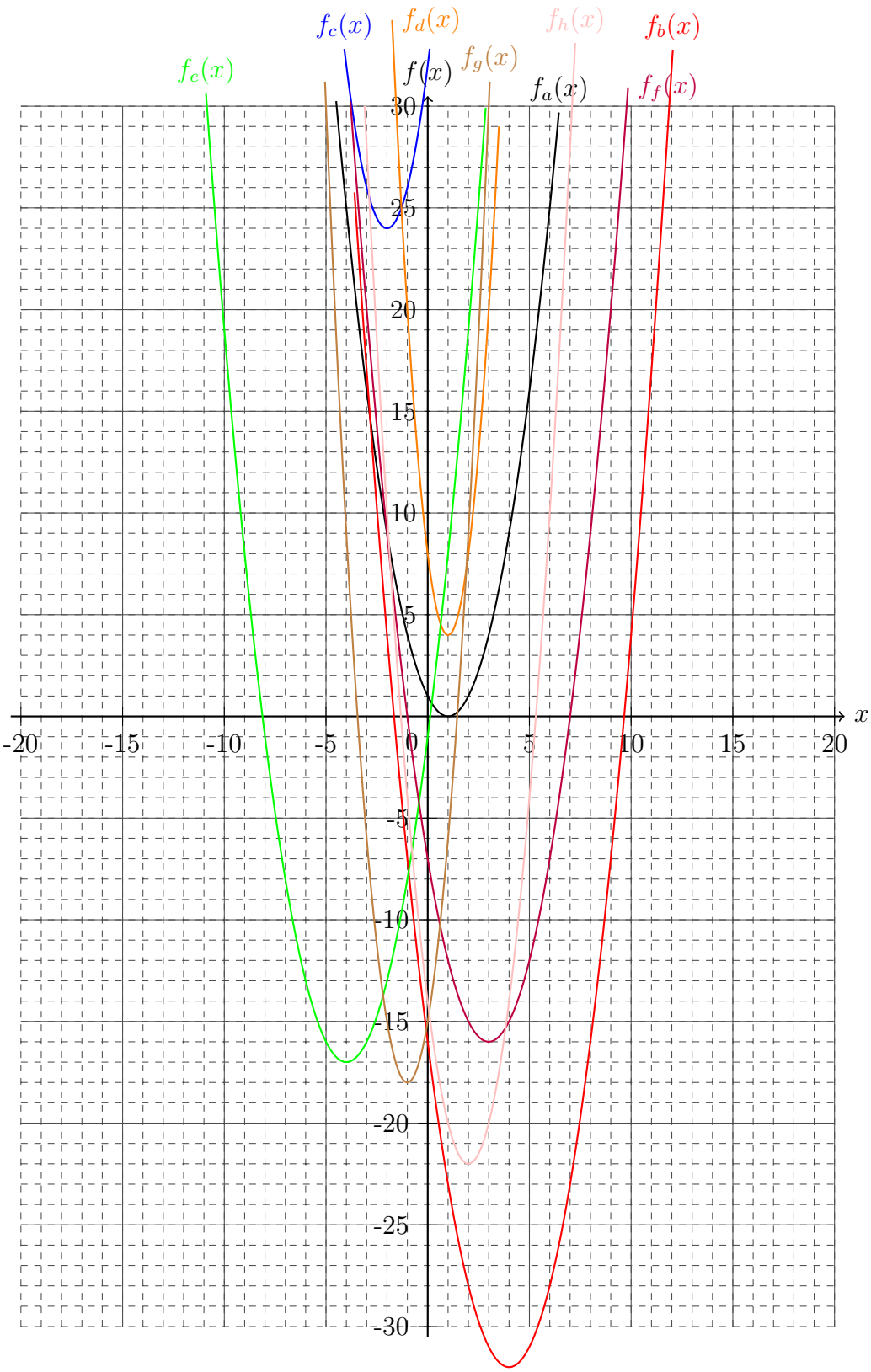
Aufgabe 1:

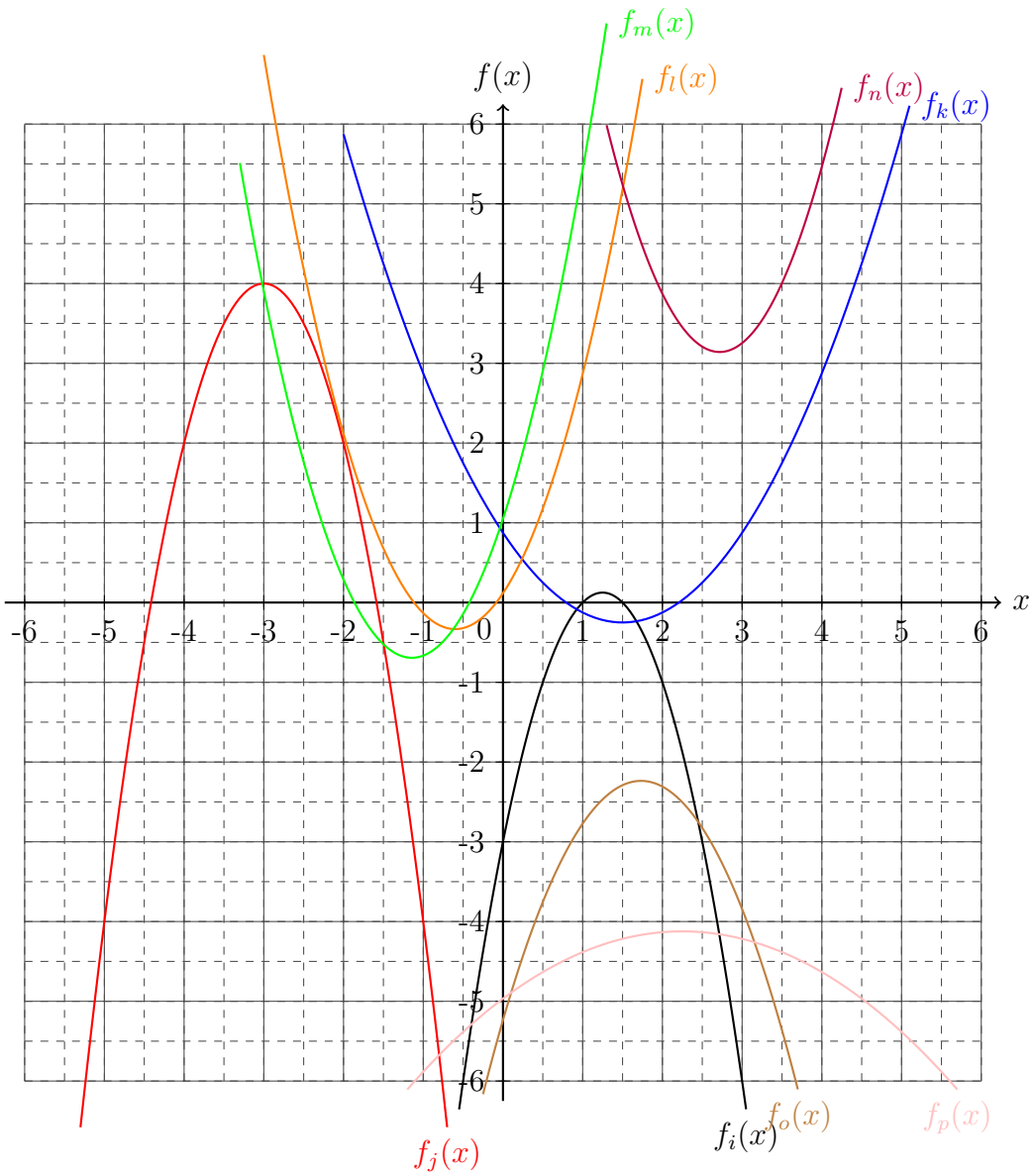


Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.3.1).

16.7.33 Lösungen zu Parabeln

Aufgabe 1:


$f_c(x)$
$f_d(x)$
$f_h(x)$
$f_b(x)$
$f_e(x)$
$f(x)$
$f_g(x)$
$f_a(x)$
$f_f(x)$
30
25
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
x


$f(x)$
x
$f_m(x)$
$f_l(x)$
$f_n(x)$
$f_k(x)$
$f_j(x)$
$f_i(x)$
$f_o(x)$
$f_p(x)$
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6

a) $f_a(x) = (x-1)^2, \Rightarrow S\,(1\,|0\,)$, Nullstellen:$x_N = 1$

b) $f_b(x) = (x-4)^2, \Rightarrow S\,(4\,|0\,)$, Nullstellen:$x_N = 4$

c) $f_c(x) = 2\,(x+4)^2 + 24, \Rightarrow S\,(-4\,|24\,)$, Nullstellen: keine

d) $f_d(x) = 4\,(x-1)^2 + 4, \Rightarrow S\,(1\,|4\,)$, Nullstellen: keine

e) $f_e(x) = (x+4)^2 - 17, \Rightarrow S\,(-4\,|-17\,)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = -4 \pm \sqrt{17}$

f) $f_f(x) = (x-3)^2 - 16, \Rightarrow S\,(3\,|-16\,)$, Nullstellen:$x_{N_1} = 7 \wedge x_{N_2} = -1$

g) $f_g(x) = 3\,(x+1)^2 - 18, \Rightarrow S\,(-1\,|-18\,)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{6}$

h) $f_h(x) = 2\,(x-2)^2 - 22, \Rightarrow S\,(2\,|-22\,)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{11}$

i) $f_i(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}, \Rightarrow S\left(\frac{5}{4}\middle|\frac{1}{8}\right)$, Nullstellen:$x_{N_1} = 1 \wedge x_{N_2} = \frac{3}{2}$

j) $f_j(x) = -2\,(x+3)^2 + 4, \Rightarrow S\,(-3\,|4\,)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = -3 \pm \sqrt{2}$

k) $f_k(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{4}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

l) $f_l(x) = \frac{5}{4}\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{3}, \Rightarrow S\left(-\frac{3}{5}\middle|-\frac{1}{3}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm \sqrt{15}}{15}$

m) $f_m(x) = \frac{4}{3}\left(x + \frac{8}{7}\right)^2 - \ln 2, \Rightarrow S\left(-\frac{8}{7}\,|-\ln 2\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{-16 \pm 7\sqrt{3\ln 2}}{14}$

n) $f_n(x) = \sqrt{2}\,(x-e)^2 + \pi, \Rightarrow S\,(e\,|\pi\,)$, Nullstellen: keine

o) $f_o(x) = -\left(x - \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{5}, \Rightarrow S\left(\sqrt{3}\middle|-\sqrt{5}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{5}$

p) $f_p(x) = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \sqrt{17}, \Rightarrow S\left(\frac{9}{4}\middle|-\sqrt{17}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm 4\sqrt{6}\sqrt[4]{17}}{4}$

Aufgabe 2:

a) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$

b) $x_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{15}$

c) $x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = 4$

d) $\mathbb{L} = \varnothing$

Aufgabe 3:

a) $S\,(3|-4)$; $x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 5$; $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $S\,(-2|-1)$; $x_1 = -3 \quad \wedge \quad x_2 = -1$; $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $S\,(2|8)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = x^2 - 4x + 12$

d) $S\,(1|-7)$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$; $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$

e) $S\left(-2|\frac{1}{2}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -x^2 - 4x - \frac{9}{2}$

f) $S\left(\frac{1}{2}|\frac{4}{3}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = 4x^2 - 4x + \frac{7}{3}$

g) $S\left(-\frac{3}{4}|\frac{1}{8}\right)$; $x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{2}$; $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$

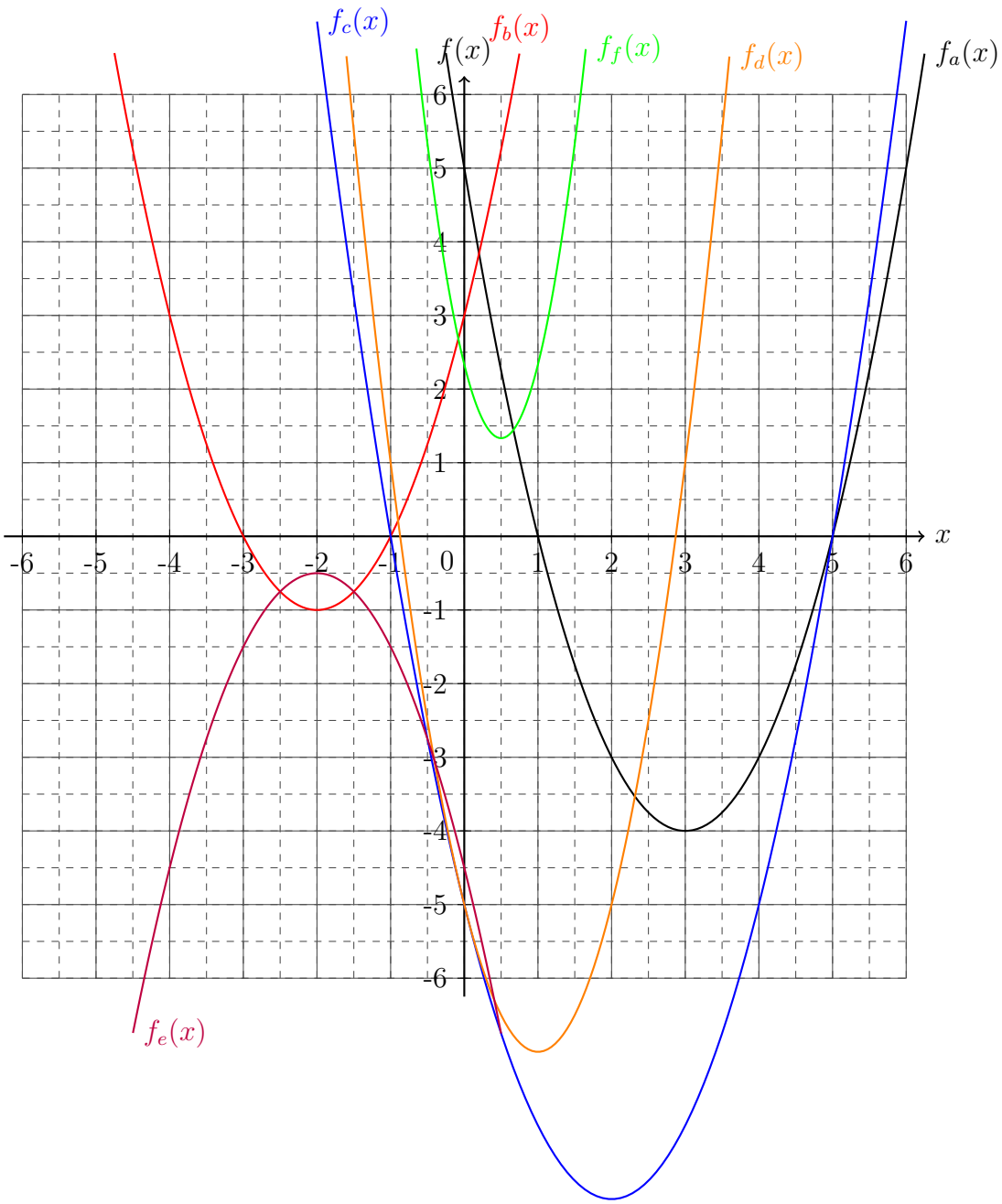
h) $S\left(\frac{4}{3}|-\frac{1}{4}\right)$; $x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{36}$

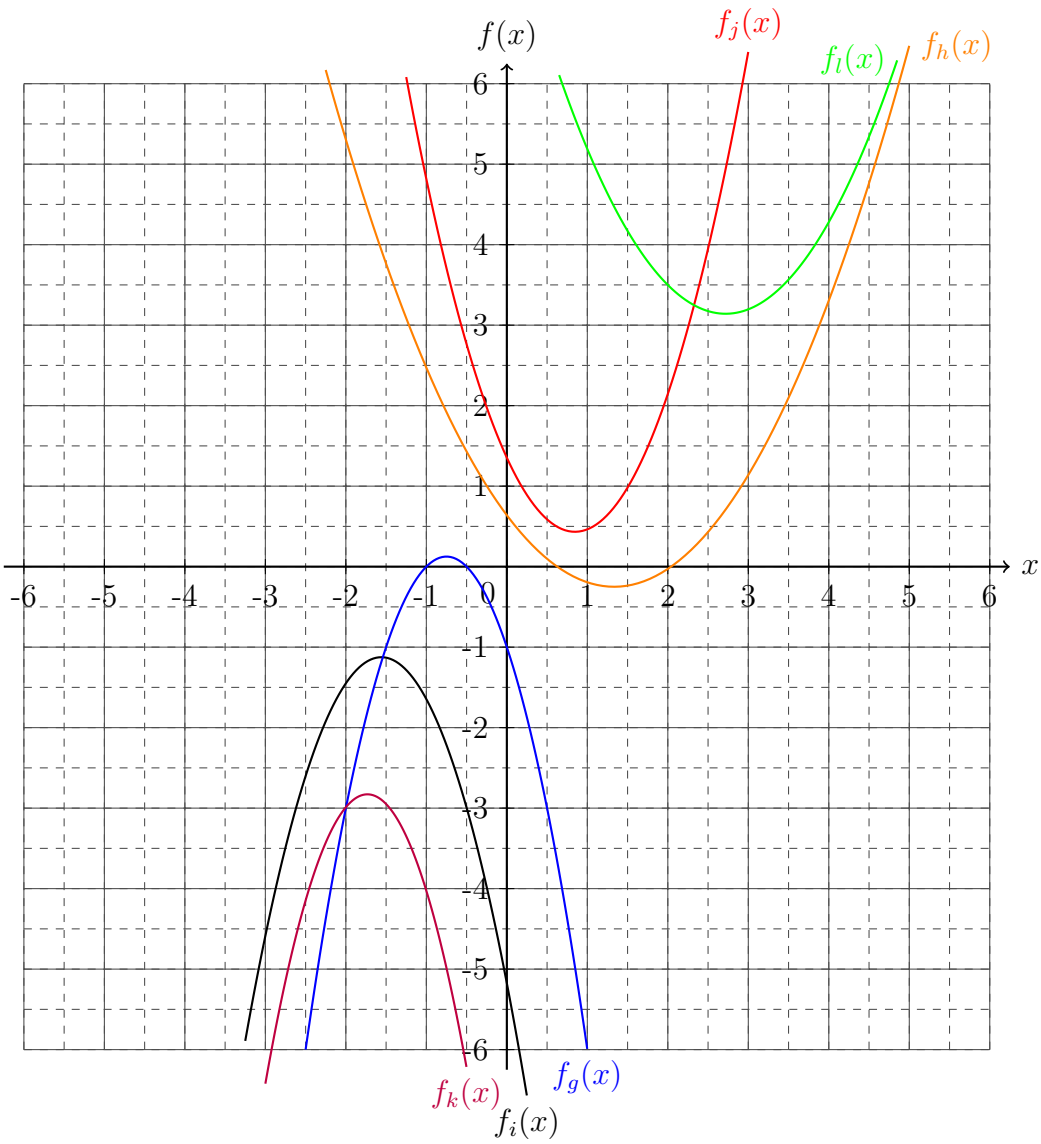
i) $S\left(-\frac{53}{34}|-\frac{9}{8}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 - \frac{256}{51}x - \frac{35893}{6936}$

j) $S\left(\frac{11}{13}|\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = \frac{9}{7}x^2 - \frac{198}{91}x + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1089}{1183}$

k) $S\left(-\sqrt{3}|-\sqrt{8}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -\sqrt{5}x^2 - 2\sqrt{15}x - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

l) $S\,(e|\pi)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = \ln(2)x^2 - e\ln(2)x + \pi + e^2\ln(2)$


$f_c(x)$
$f_b(x)$
$f(x)$
$f_f(x)$
$f_d(x)$
$f_a(x)$
x
$f_e(x)$
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6



Aufgabe 4:

a) $f(x) = 2\,(x+2)^2 - 2$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}\,(x+1)^2 + 3$

c) $h(x) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

d) $k(x) = \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

e) $l(x) = -4\,(x-4)^2 + 4$

f) $m(x) = -2\,(x+1)^2 - 2$

f) $n(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$

f) $o(x) = \frac{1}{8}\,(x-3)^2 + 1$

Aufgabe 5:
a) Achsensymmetrisch
b) Nicht achsensymmetrisch
c) Achsensymmetrisch
d) Achsensymmetrisch

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.4.1).

16.7.34 Lösungen zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1:

a) $f^{-1}(x) = x - 6$

b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 3$

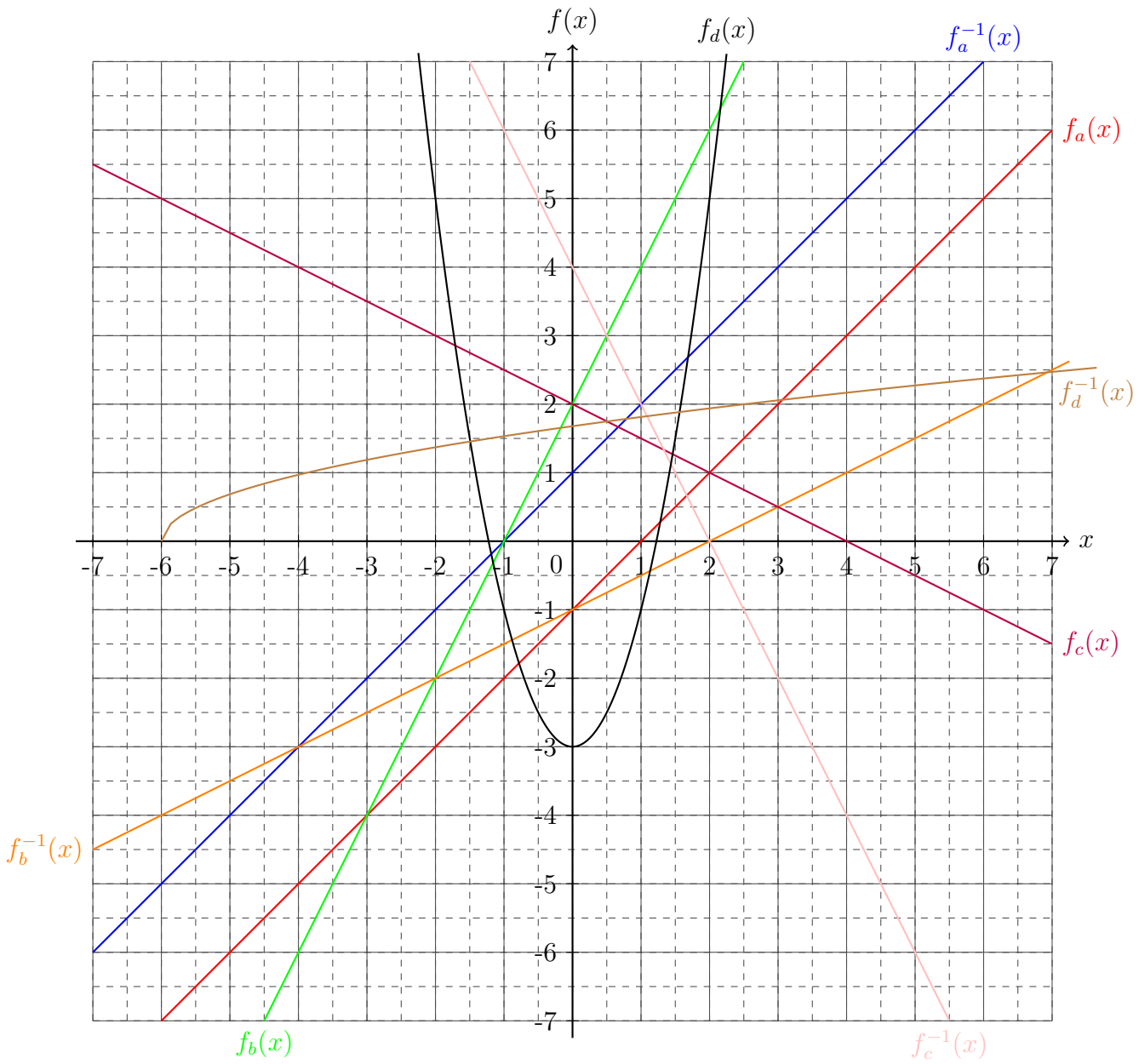
c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+64}$

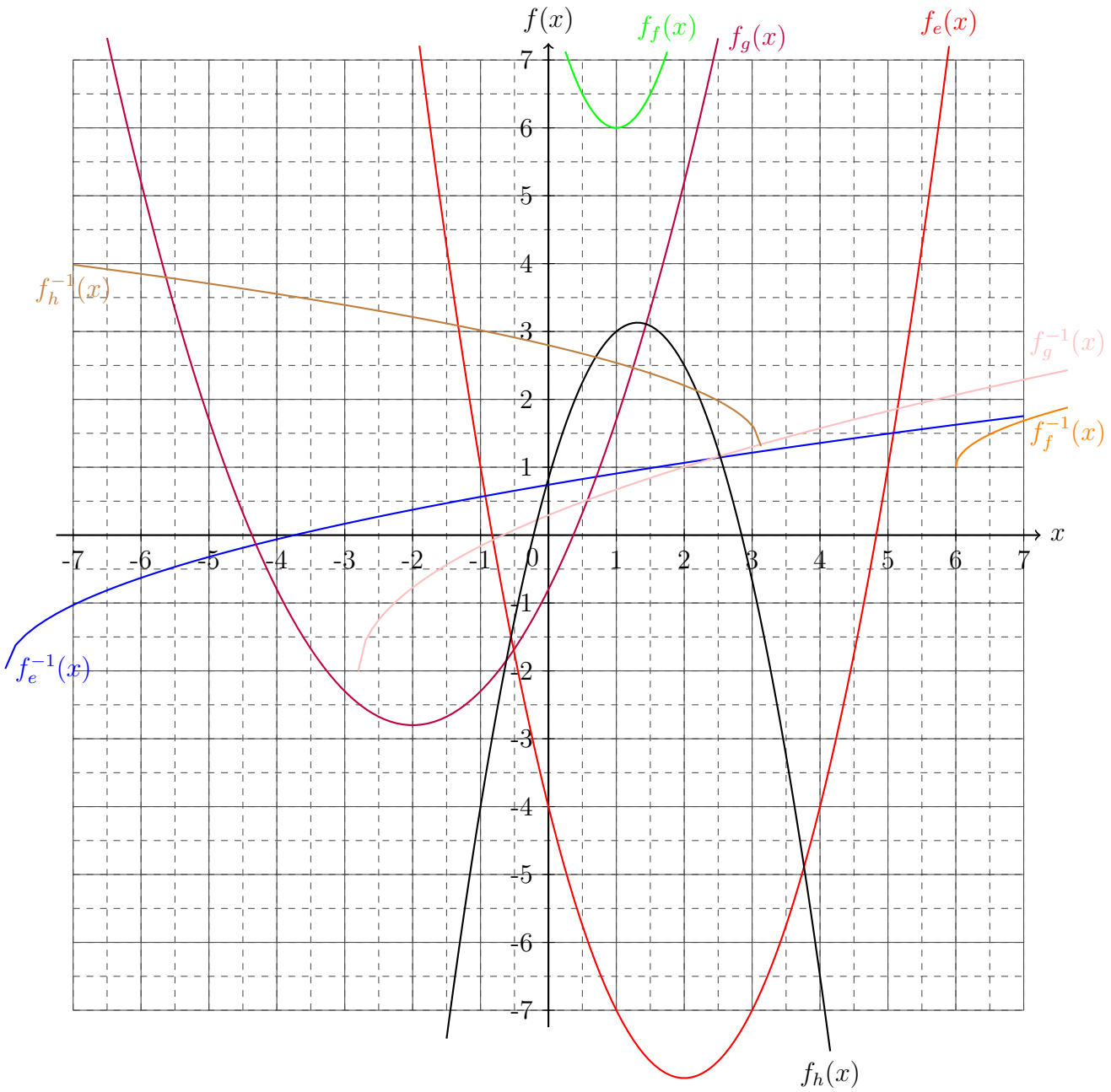
d) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{41-4x}+3}{2}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x+10}-2}{2}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{12x-1}-1}{3}$

Aufgabe 2:


$f(x)$
$f_d(x)$
$f_a^{-1}(x)$
$f_a(x)$
$f_d^{-1}(x)$
$f_c(x)$
$f_b^{-1}(x)$
$f_b(x)$
$f_c^{-1}(x)$
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.5.1).

16.7.35 Lösungen zu Hyperbeln

Aufgabe 1:

a) $x_N = \frac{1}{2}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

b) $x_N = -8, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

c) $x_N = \frac{5}{3}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$

d) $x_N = -\frac{44}{9}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}\}$

e) $x_N = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}, \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}\right\}$

f) $x_N = \frac{e\sqrt{2} - \pi}{e}, \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\}\right\}$

Aufgabe 2:

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$

b) $f^{-1}(x) = \frac{3}{2\,(3x+1)}$

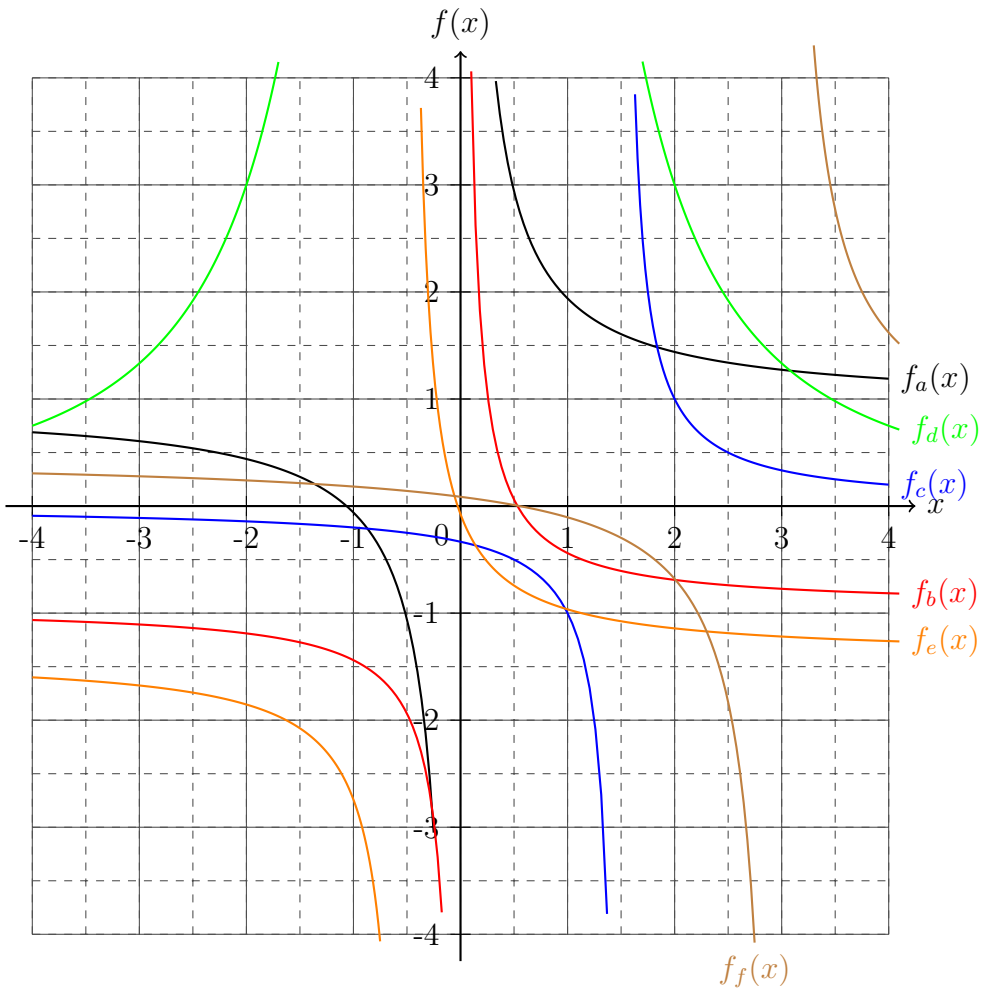
c) $f^{-1}(x) = \frac{9}{4\,(x-3)} + \frac{1}{2}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{4x-16} + 6}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{7}{16}} + 27}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2}\sqrt{\frac{e}{x - \sqrt{2}} + \pi}$

Aufgabe 3:



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.6.1).

16.7.36 Lösungen zu Grenzwerte

Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x\nearrow 6} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\searrow 6} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x\nearrow 4} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\searrow 4} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x\nearrow \frac{2}{5}} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\searrow \frac{2}{5}} f(x) = \infty$

d) $\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow 3} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow -3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow -3} f(x) = \infty$

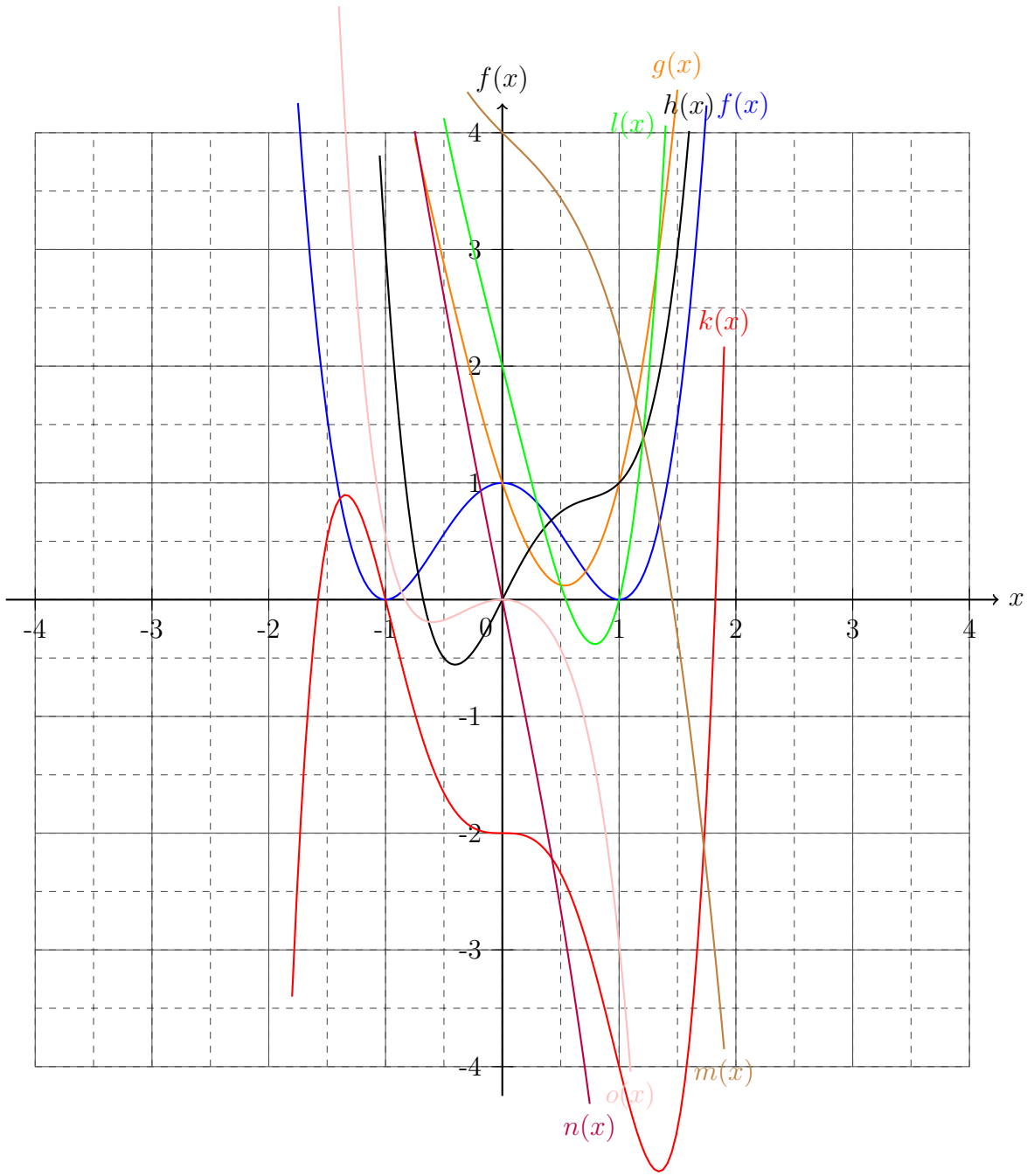
e) $\lim\limits_{x\nearrow \sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow \sqrt{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty$

f) $\lim\limits_{x\nearrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.7.1).

16.7.37 Lösungen zu Polynomfunktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

a) $\mathbb{L} = \varnothing$

b) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{11}$

c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{11} + 2}$

d) $\mathbb{L} = \varnothing$

e) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = -3$

f) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -3 \pm 3\sqrt{2}$

g) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{6}$

h) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{29}}{4}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.8.1).

16.7.38 Lösungen zu Reihen

Aufgabe 1:

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

b) $1 + 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720$

c) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

d) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$

e) $x + \sqrt{2x} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[5]{5x} + \sqrt[6]{6x}$

f) $x^3 + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{23} + \frac{x^6}{119}$

g) $x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[5]{x}\sqrt[6]{x}$

h) $1\sqrt{2}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{24}\sqrt[5]{120}\sqrt[6]{720}$

i) $x2!x^2 3!x^3 4!x^4 5!x^5 6!x^6 = 24883200x^{21}$

j) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

k) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}$

l) $-x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{120}x^6$

m) $-3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 - 35 = -20$

n) $1! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 10!$

o) $x + 2x^2 + \sqrt[3]{10}x^3 + \sqrt[4]{20}x^4 + \sqrt[5]{35}x^5 + \sqrt[6]{56}x^6$

p) $\sum_{n=1}^{5} \left(n + n^2 + n^3\right) = 1 + 1 + 1 - 1 - 4 - 8 + 1 + 9 + 27 - 1 - 16 - 64 + 1 + 25 + 125 = 97$

Aufgabe 2:

$a)\ \sum_{n=0}^{8} n = \sum_{n=1}^{8} n = \sum_{n=0}^{7} (n+1) = \ldots$

$b)\ \sum_{n=1}^{5} n! = \sum_{n=0}^{4} (n+1)! = \ldots$

$c)\ \prod_{n=1}^{8} x^n = \prod_{n=0}^{7} x^{n+1} = \ldots$

$d)\ \prod_{n=0}^{6} (x-n)^n = \prod_{n=1}^{6} (x-n)^n = \ldots$

$e)\ \sum_{n=1}^{9} nx^n(-1)^{n+1} = sum_{n=0}^{8}(n+1)x^{n+1}(-1)^n = \ldots$

$f)\ \sum_{n=1}^{6} \frac{x^{2n}}{n} = \ldots$

$g)\ \sum_{n=2}^{6} \frac{x^{n-4}}{n!} = \ldots$

$h)\ \sum_{n=0}^{5} (-1)^{n+1}(n+1)!x^{2n+1} = \ldots$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.9.1).

16.7.39 Lösungen zu gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 1:

$a)\ x^2 + 2x + 1$ $b)\ x^3 - x + 5$

$c)\ 5x^2 - 7$ $d)\ x^2 - 5$

$e)\ x^3 - \frac{7}{3}$ $f)\ -x^2 - 7x + 3$

$g)\ -\ln 2 \cdot x^2 - e^{\pi}$ $h)\ \sqrt{2}x^3 - ex + \pi$

Aufgabe 2:

a) $x - 9\dfrac{47}{x+5}$

b) $x + 3\dfrac{2x+1}{x^2-2}$

c) $6x^3 + 6x^2 + 7x + 7 - \dfrac{8}{x-1}$

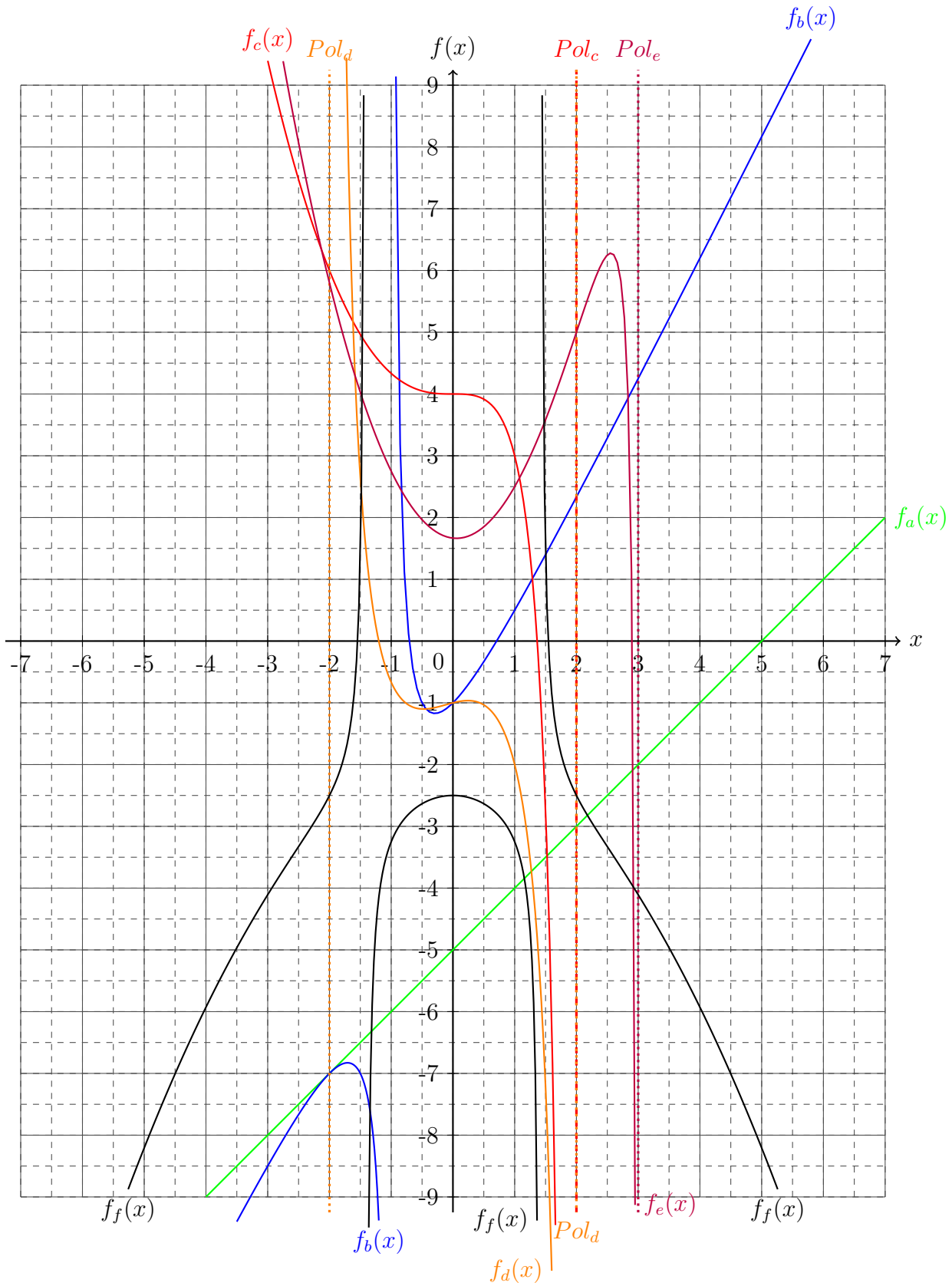
d) $\dfrac{x^4}{6} - \dfrac{5x^2}{6} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{43}{6\left(4x^2+2\right)}$

e) $-35x^2 - 525x - 7920 - \dfrac{118790}{x-15}$

f) $x^7 + 3x^5 + 9x^3 - x^2 + 27x - 2 + \dfrac{81-5}{x^2-3}$

Aufgabe 3:
a) echt, *b*) echt, *c*) unecht, *d*) echt, *e*) unecht, *f*) echt.

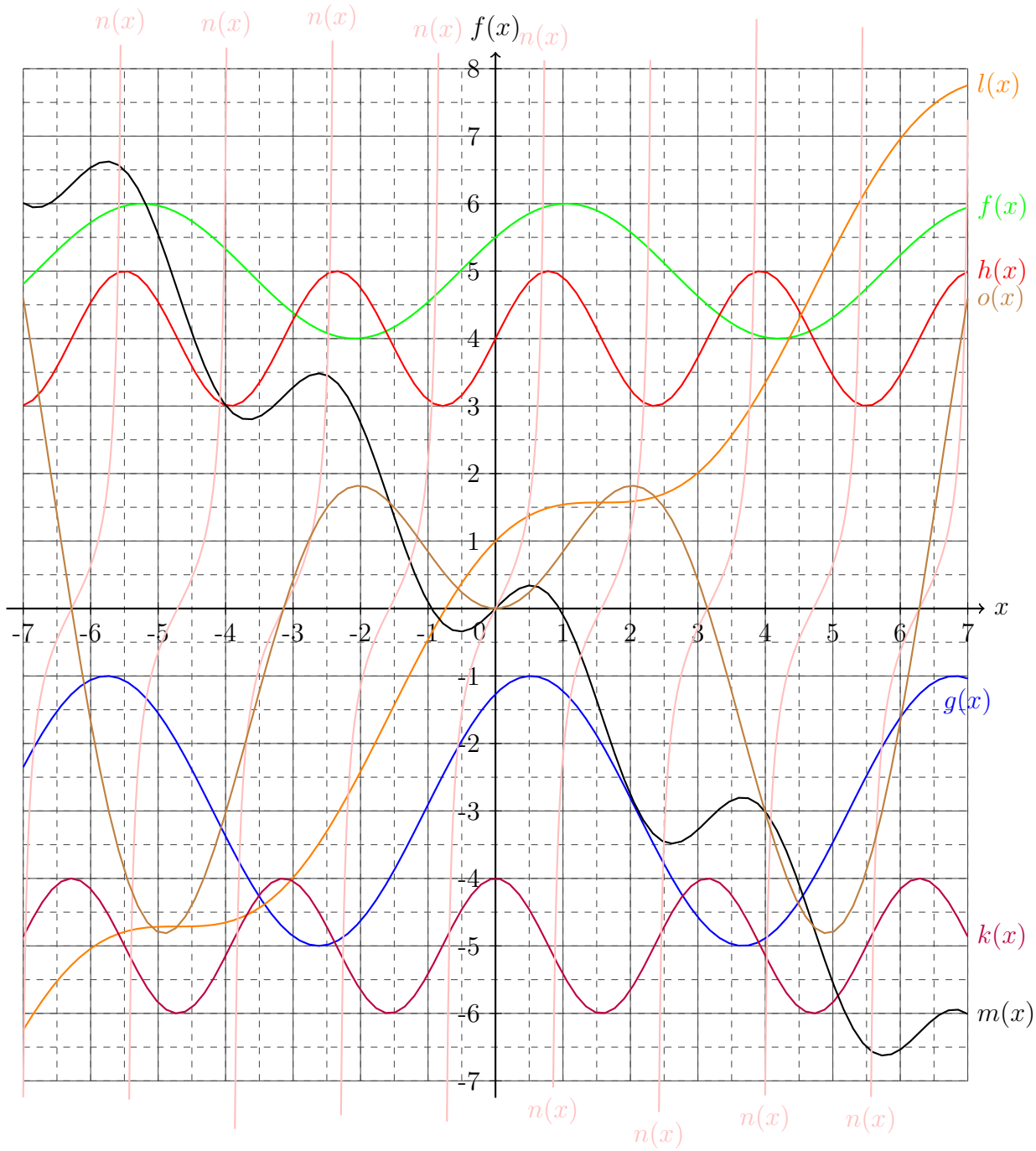
Aufgabe 4: Wenn die Polstellen mit angegeben sind, sind weiterführende Teile der Funktion nicht mit abgebildet. Dabei handelt es sich unter anderem um Extrem- und Wendepunkte.



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.10.1).

16.7.40 Lösungen zu trigonomischen Funktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$$
\begin{aligned}
a)\quad \sin(2x) &= \sin(x+x) \\
&= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) \\
&= 2\sin(x)\cos(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \cos(2x) &= \cos(x+x) \\
&= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \square \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\
&= 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \\
&= 1 - 2\sin^2(x) \qquad \square \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \\
&= 1 - 2\left(1 - \cos^2(x)\right) \\
&= 2\cos^2(x) - 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\quad \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \quad |+1 \\
\cos(2x) + 1 &= 2\cos^2(x) \quad |:2 \\
\frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right) &= \cos^2(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\quad \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\
\cos(2x) &= 2 - 2\sin^2(x) - 1 \quad |-1 \\
\cos(2x) - 1 &= 2\sin^2(x) \quad |:2 \\
\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - 1\right) &= \sin^2(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3:

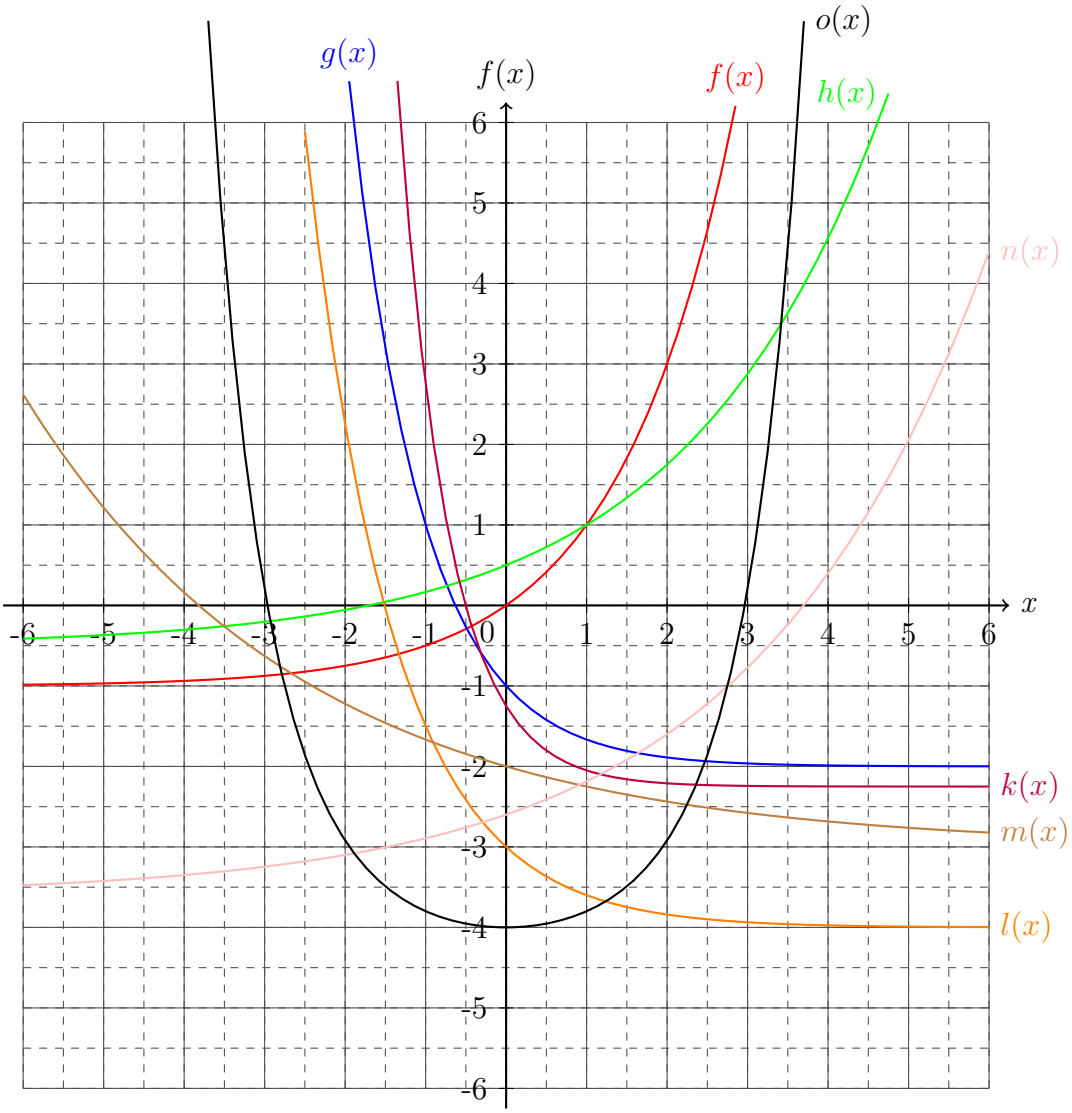
$a)\ x_n = n\pi \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$ $\qquad b)\ x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$

$c)\ x_n = n\pi \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$ $\qquad d)\ x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.12.1).

16.7.41 Lösungen zu Exponentialfunktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$a)\ \ f(x) = 3^x$	$b) g(x) = \ \ 0,5^x$
$c)\ \ h(x) = 5^x - 2$	$d)\ \ l(x) = 2^{-x} + 1,5$
$e)\ \ k(x) = 1,5^{-x} - 1,75$	$f)\ \ m(x) = 0,75^{-x} - 0,25$

Aufgabe 3:

$a)$

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \approx 9,85 \cdot 10^{-10} \ \text{(gilt nur für Zeit in Jahren)} \tag{16.1}$$

b)

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = 0,140 \ \text{(gilt nur für Zeit in Stunden)} \tag{16.2}$$

c)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \quad = 25000 e^{-\frac{ln2}{5730a} 15300a} \approx 3928 \tag{16.3}$$

d)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \quad = 214000 e^{-\frac{ln2}{19s} 2700s} \approx 3,57 \cdot 10^{-38} \approx 0 \tag{16.4}$$

e)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow 0,25 = 1 e^{-\frac{ln2}{13,16d} t} \quad \Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = 26,32d \tag{16.5}$$

f)

$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-2,898a \ln\left(\frac{0,05}{1}\right)}{\ln 2} \approx 12,53a \tag{16.6}$$

g)

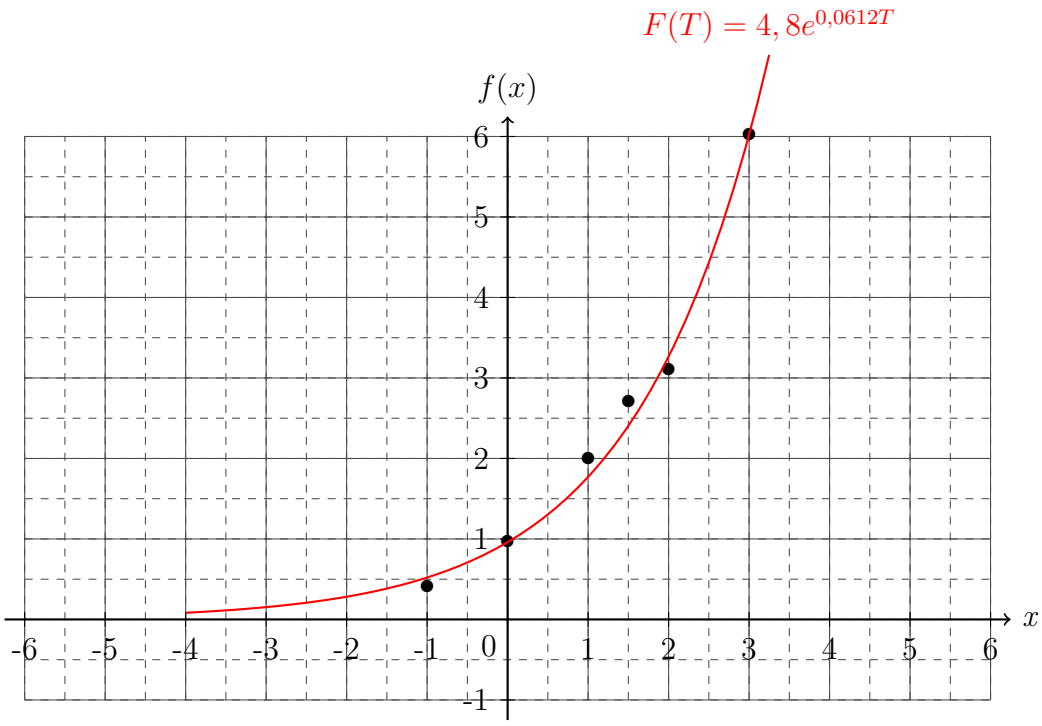
$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-4,28d \ln\left(\frac{14578}{43688}\right)}{\ln 2} \approx 6,777d \tag{16.7}$$

h)

$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-12,33a \ln\left(\frac{2,454 \cdot 10^4}{5,346 \cdot 10^{12}}\right)}{\ln 2} \approx 341,53a \tag{16.8}$$

Aufgabe 4:

a) b) c)



T in $[°C]$	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$F(T)$ in $\left[\frac{g}{m^3}\right]$	2,60	3,53	4,80	6,52	8,85	12,02	16,32	22,17	30,10	40,88	55,51
F_R in $[\%]$	0,20	0,27	0,37	0,50	0,68	0,92	1,25	1,69	2,28	3,06	4,12

d)
e) $0,73F(15°C) = 8,77\frac{g}{m^3} \Rightarrow 0,674\%$
$H_2O \;\; 16,852 : 1 \;\; CO_2, \quad H_2O \;\; 3744,88 : 1 \;\; CH_4, \quad CO_2 \;\; 222,\bar{2} : 1 \;\; CH_4$

Aufgabe 5:
a) $\lambda = 0,000121\frac{1}{a}$
b) $m_{^{14}C} = 2,51 \cdot 10^{-16}kg$
c) $t_c \approx 4300a$
d) Ein Sonnensturm kann die ^{14}C-Produktion erhöhen.

$N(t) = 1,90216 \cdot 10^{-13}g = N_0 e^{-0,000121\frac{1}{a}4478a} \Rightarrow N_0 = 3,27012 \cdot 10^{-13g}$
$\Rightarrow {}^{14}C_{\text{normal}} \;\; 1 : 1,719 \;\; {}^{14}C_{\text{früher}}$
$\Rightarrow {}^{12}C \;\; 1 : 1,719 \cdot 10^{12} \;\; {}^{14}C_{\text{früher}}$

Aufgabe 6:
a) $\lambda_{235} = 9,8485 \cdot 10^{-10}\frac{1}{a}$
b) $\lambda_{238} = 1,55125 \cdot 10^{-10}\frac{1}{a}$
c) $^{207}Pb \;\; 1 : 21,7033 \;\; {}^{206}Pb$
d) $T_{\oplus} = 4,543 \cdot 10^9 a$

Aufgabe 7:
a) $\bar{x}_I = 1,5\overline{90}\%$; $\bar{x}_W = 1,2\overline{90}\%$

b) $f_I(n) = 1,015\overline{90}^n$; $f_W(n) = 1,012\overline{90}^n$
c) $\dfrac{0,8 \cdot f_I(0)}{f_I(9)} \approx 70,51\%$
$\dfrac{0,8 \cdot f_I(0)}{f_I(45)} \approx 39,95\%$
d) $0,1f_w(n) \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; f_w(n) = 10 = 1,012\overline{90}^n \;\Rightarrow\; n = 179,518a$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.13.1).

16.7.42 Lösungen zu Proportionalitäten

Aufgabe 1:
a) Proportional ; *b*) Nichts ; *c*) Antiproportional
d) Nichts ; *e*) Proportional ; *f*) Proportional
g) Nichts ; *h*) Antiproportional ; *i*) Nichts
j) Nichts ; *k*) Proportional ; *l*) Antiproportional

Aufgabe 3:

a) $f(x) = x + 2$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x - 12$

f) $f(x) = \frac{1}{5}x - 12$

k) $f(x) = 2x$

Aufgabe 4:

c) $f(x) = \frac{80}{x}$

h) $f(x) = \frac{25000}{x}$

l) $f(x) = \frac{50}{x}$

Aufgabe 6:

a) $H \propto DU$

b) $p \propto Amc$

c) $a \propto \frac{y}{x}$

d) $k \propto \frac{fz}{T}$

e) $E \propto \frac{Q}{r}$

f) $P \propto \frac{T}{dN}$

g) $L \propto \frac{nU}{Nd}$

h) $W \propto \frac{IC}{gHT}$

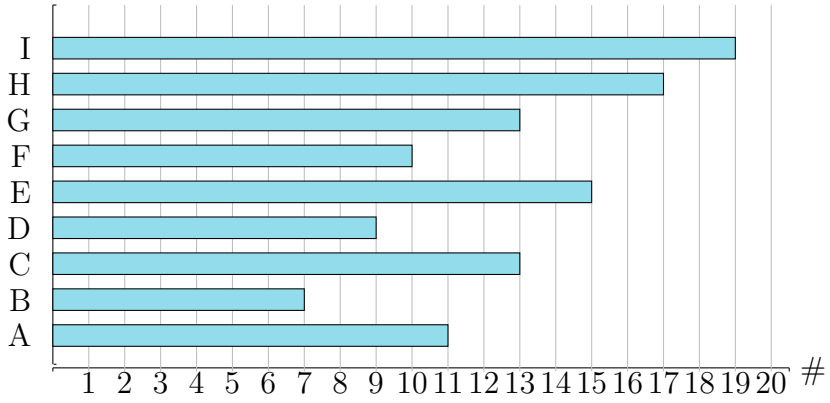
i) $F \propto \frac{mv^2}{r}$

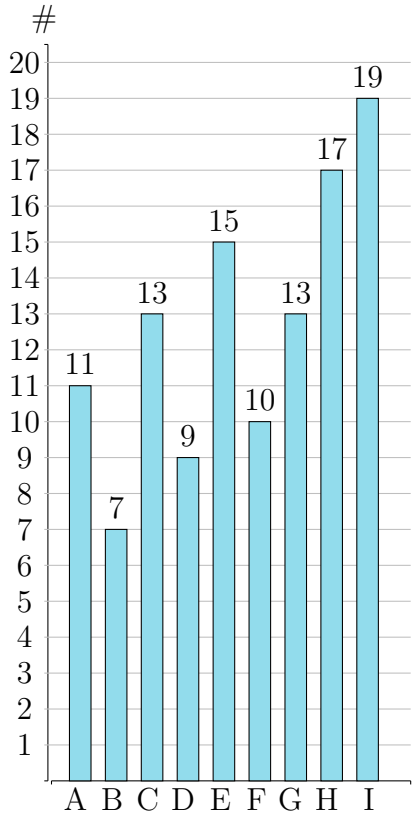
j) $G \propto \frac{\ln(m)e^{\lambda}\sqrt{z}y^3}{r^2}$

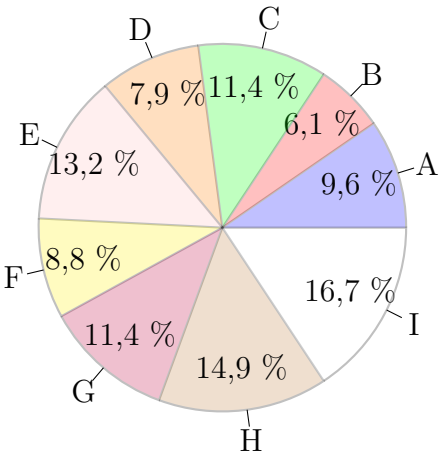
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.14.1).

16.7.43 Lösungen zu Diagrammen

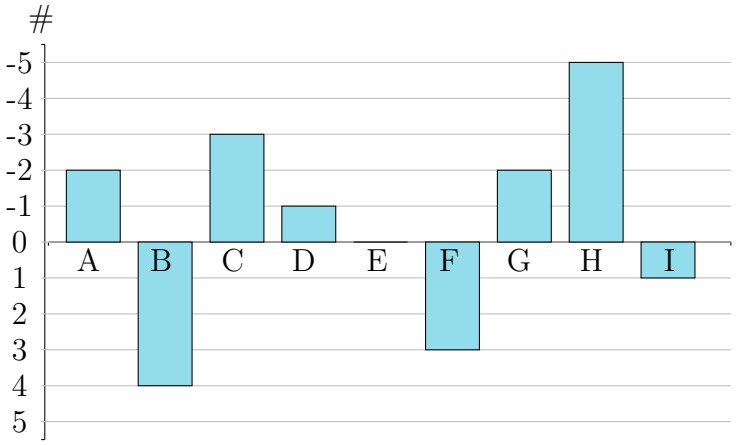
Aufgabe 1:



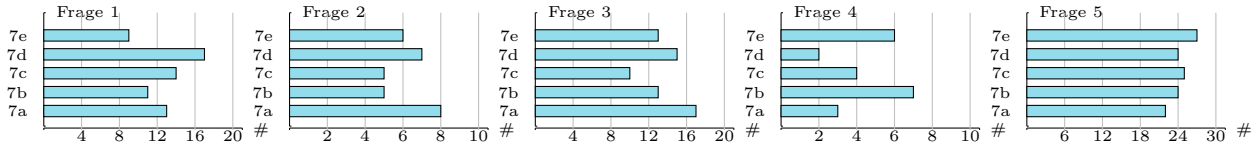


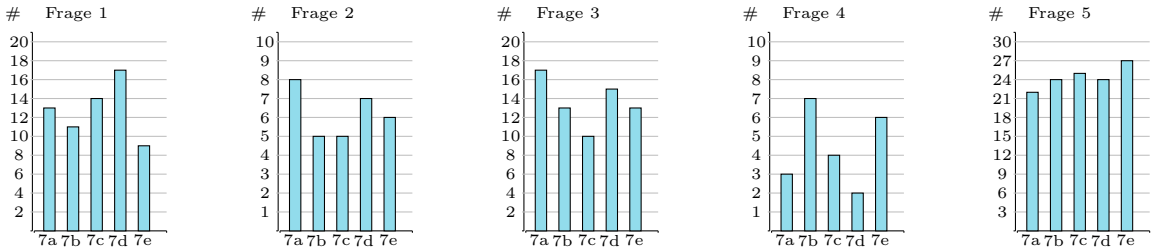


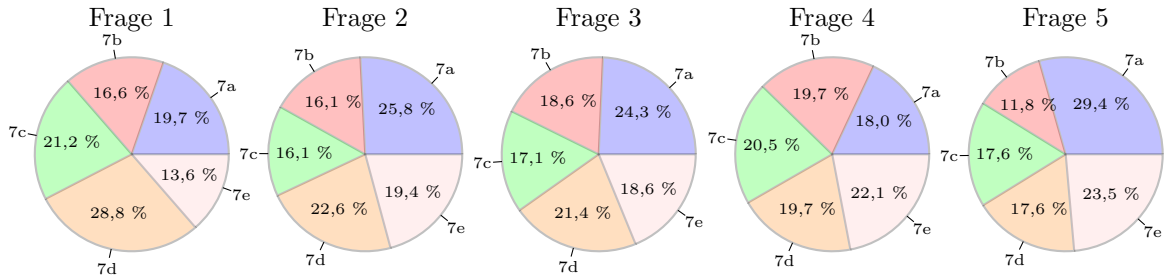
A	B	C	D	E	F	G	H	I
9,6%	6,1%	11,4%	7,9%	13,2%	8,8%	11,4%	14,9%	16,7%

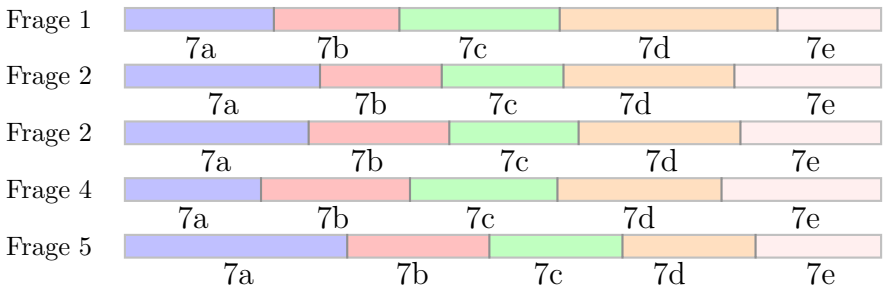


Aufgabe 2:





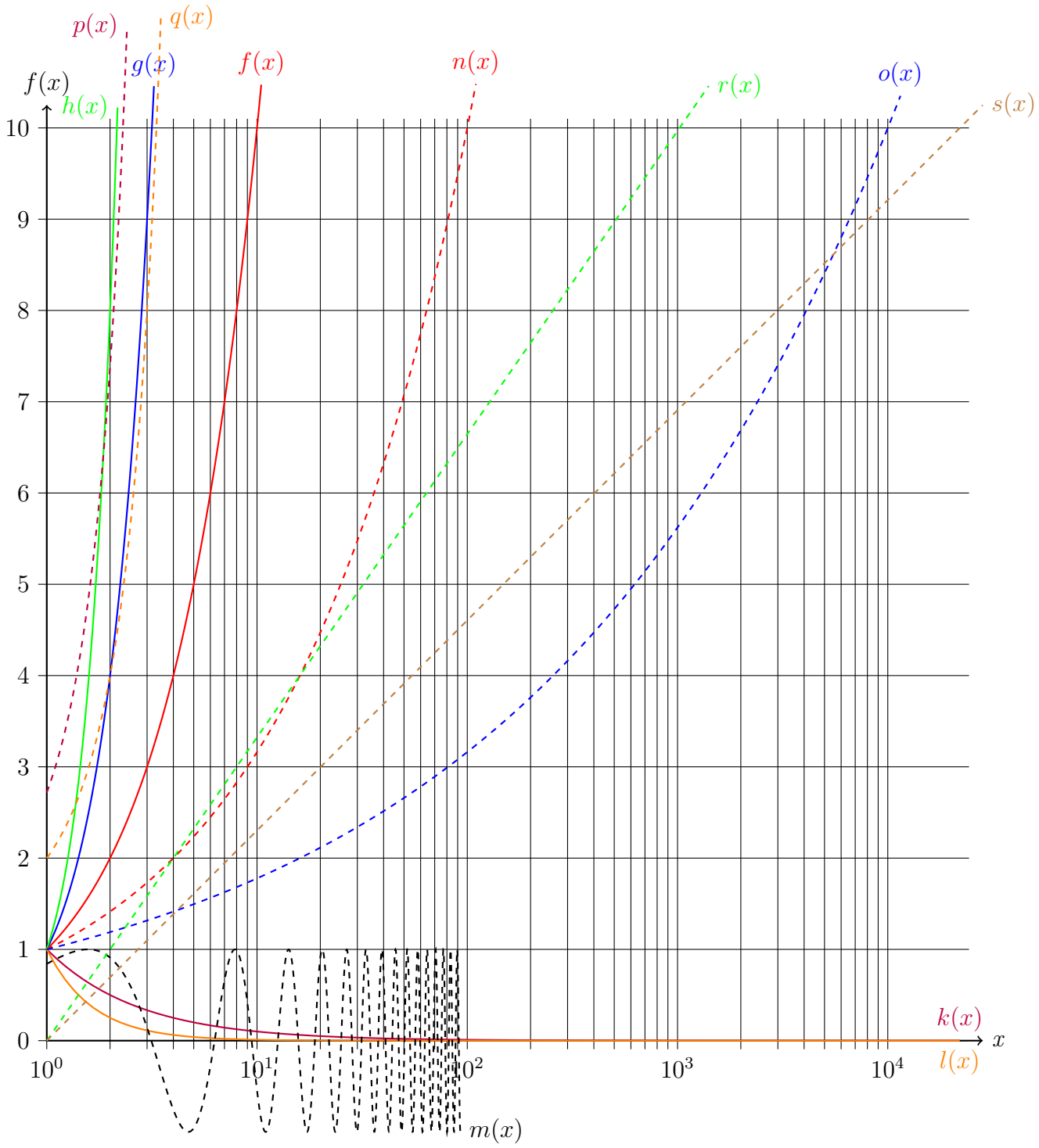


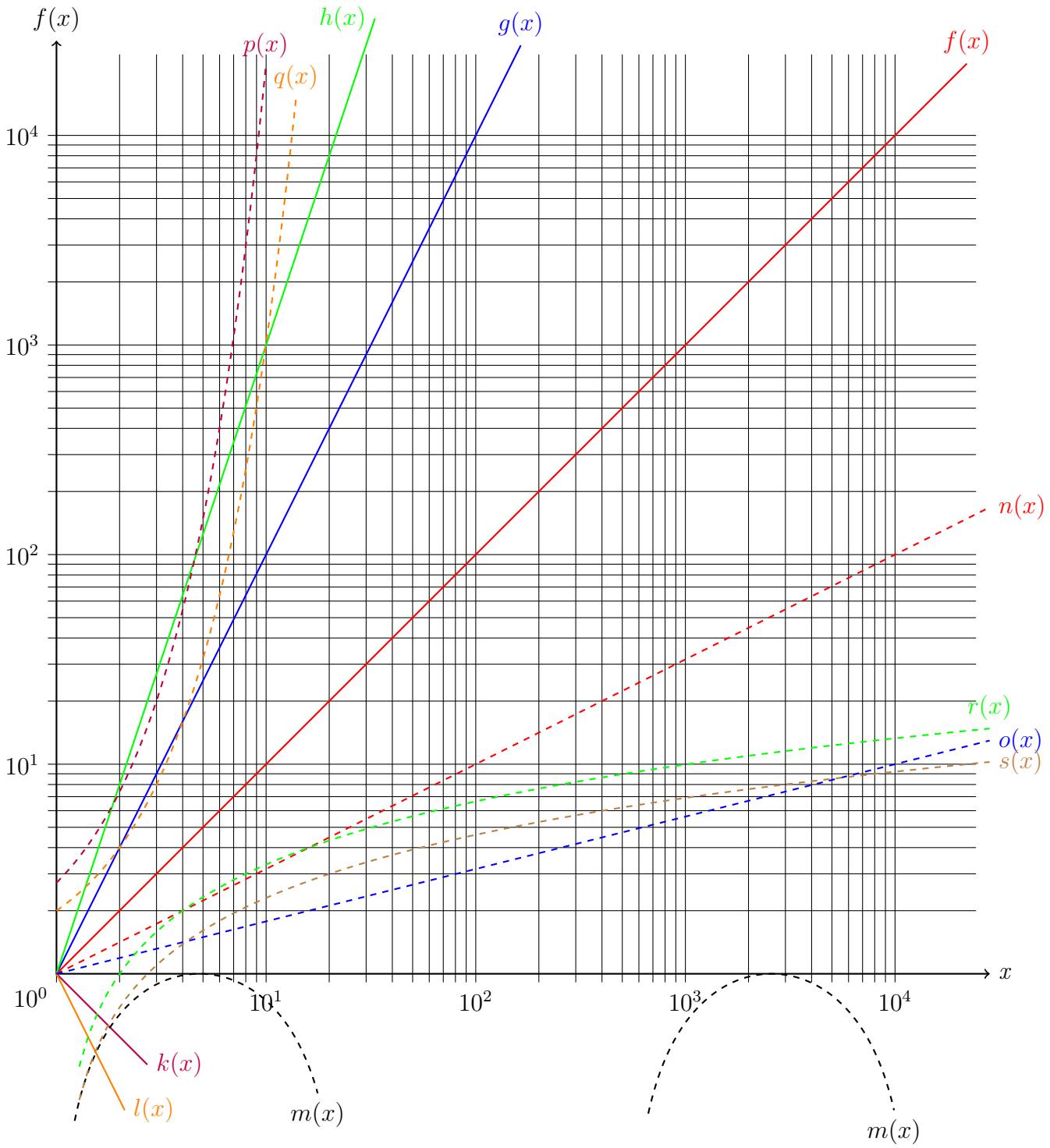


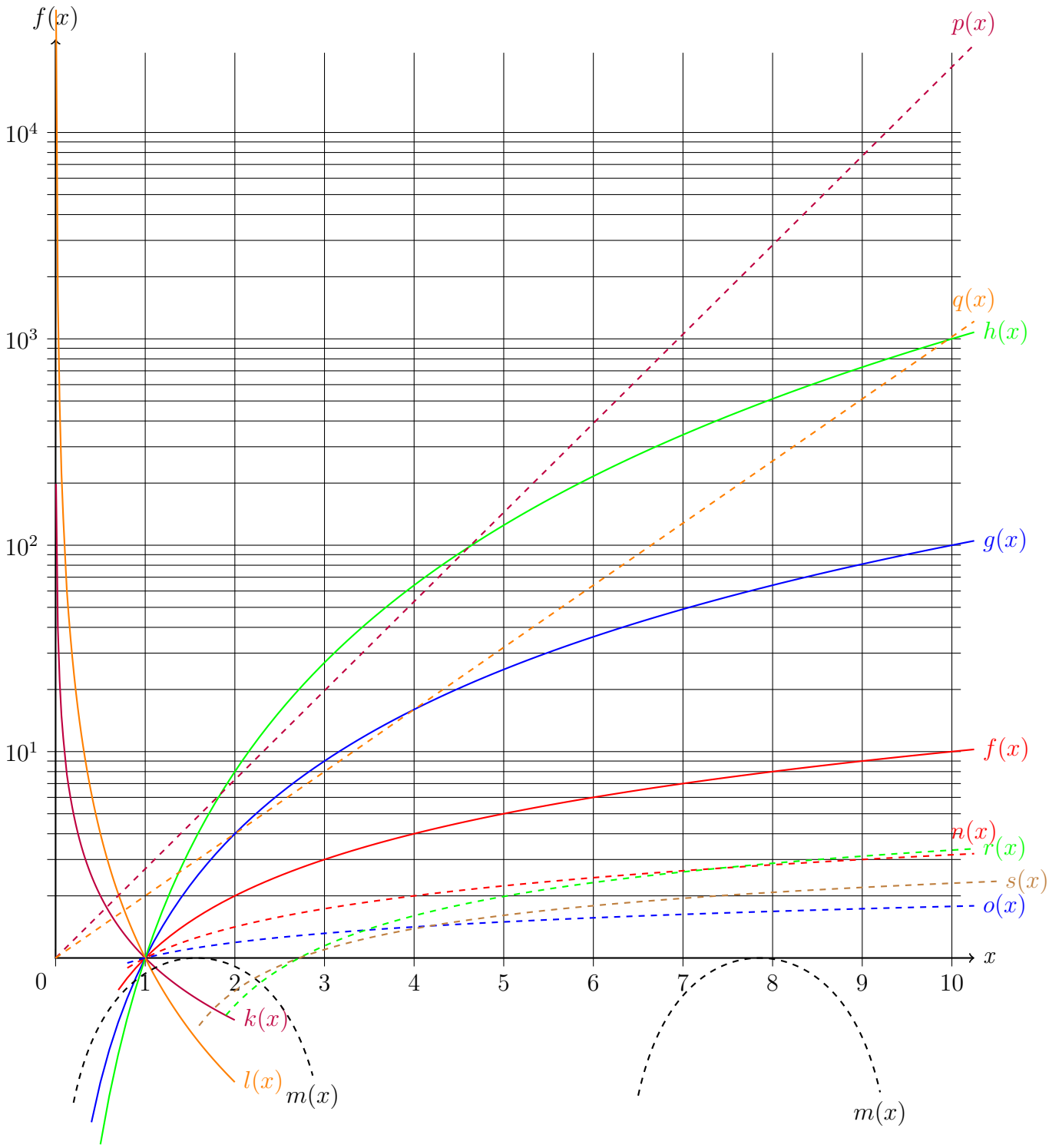
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.15.1).

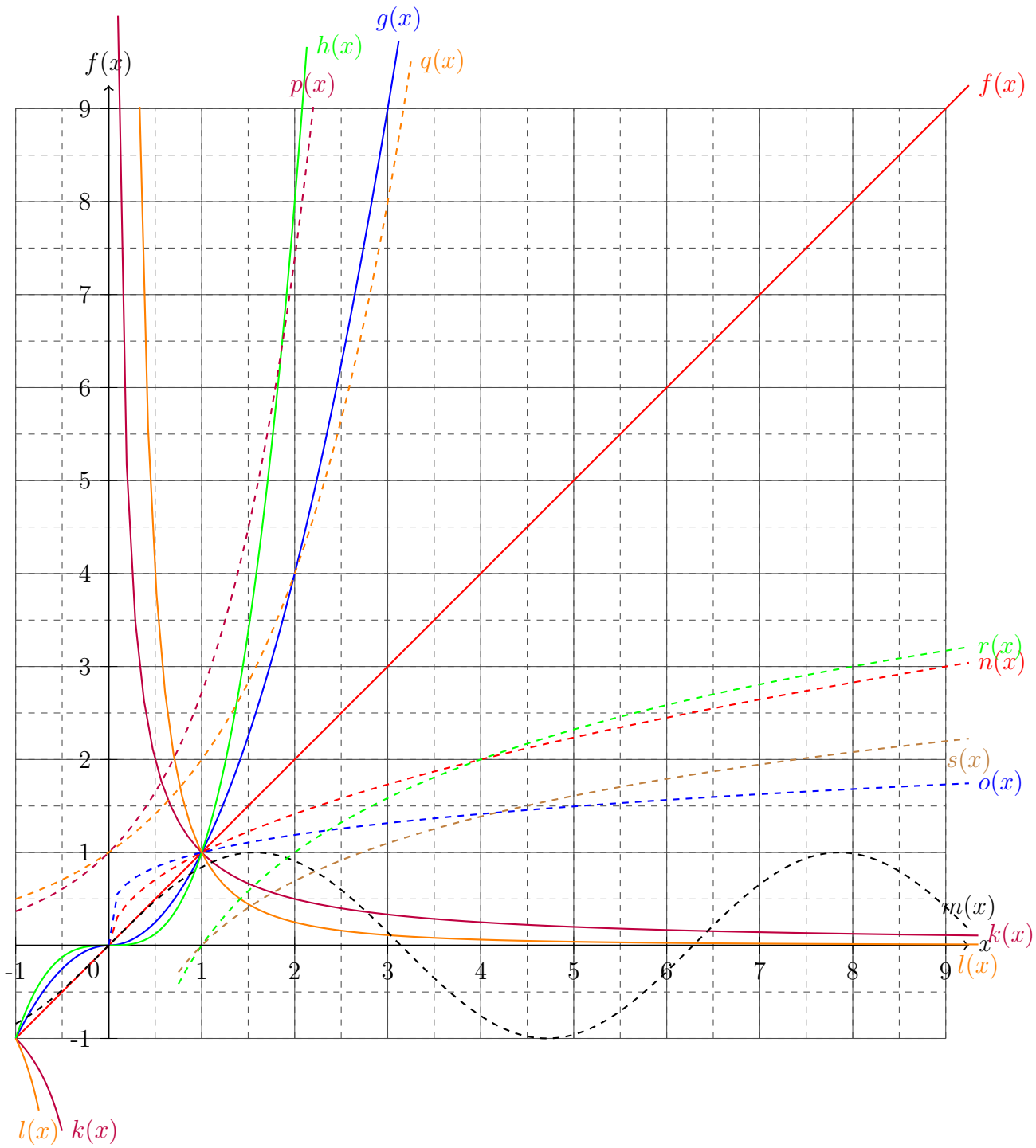
16.7.44 Lösungen zu den gemischten Funktionenaufgaben

Aufgabe 1:


$p(x)$
$q(x)$
$g(x)$
$f(x)$
$n(x)$
$r(x)$
$o(x)$
$s(x)$
$f(x)$
$h(x)$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
x
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$


$f(x)$
$h(x)$
$g(x)$
$p(x)$
$q(x)$
$f(x)$
10^4
10^3
$n(x)$
10^2
$r(x)$
$o(x)$
10^1
$s(x)$
x
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$
$m(x)$


$f(x)$
$p(x)$
10^4
$q(x)$
$h(x)$
10^3
$g(x)$
10^2
$f(x)$
10^1
$n(x)$
$r(x)$
$s(x)$
$o(x)$
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$
$m(x)$


$f(x)$
$g(x)$
$h(x)$
$p(x)$
$q(x)$
$f(x)$
$r(x)$
$n(x)$
$s(x)$
$o(x)$
$m(x)$
$k(x)$
x
$l(x)$
$l(x)$
$k(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Aufgabe 2: a)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 5	≈ 2	≈ 2	≈ 3	≈ 6	≈ 10	≈ 13	≈ 17
Niederschlag	≈ 70	≈ 72	≈ 68	≈ 64	≈ 50	≈ 40	≈ 30	≈ 22
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 21	≈ 24	≈ 26	≈ 28	≈ 30	≈ 31	≈ 30	≈ 29
Niederschlag	≈ 16	≈ 12	≈ 8	≈ 6	≈ 5	≈ 8	≈ 10	≈ 13
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 27	≈ 24	≈ 21	≈ 17	≈ 13	≈ 9	≈ 6	≈ 4
Niederschlag	≈ 17	≈ 23	≈ 30	≈ 35	≈ 42	≈ 50	≈ 55	≈ 62

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: AApr ; Temperatur: $13°C$; Niederschlag: $30\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MOkt ; Temperatur: $16°C$; Niederschlag: $36\frac{mm}{m^3}$

b)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 18	≈ 14	≈ 14	≈ 15	≈ 15	≈ 14	≈ 11	≈ 7
Niederschlag	≈ 50	≈ 22	≈ 14	≈ 20	≈ 28	≈ 40	≈ 55	≈ 63
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 1	≈ -5	≈ -10	≈ -15	≈ -18	≈ -20	≈ -21	≈ -19
Niederschlag	≈ 70	≈ 72	≈ 68	≈ 62	≈ 52	≈ 42	≈ 38	≈ 30
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ -16	≈ -12	≈ -7	≈ -2	≈ 2	≈ 6	≈ 7	≈ 10
Niederschlag	≈ 30	≈ 34	≈ 40	≈ 50	≈ 60	≈ 66	≈ 62	≈ 48

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMrz ; Temperatur: $14°C$; Niederschlag: $40\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MDez ; Temperatur: $11°C$; Niederschlag: $32\frac{mm}{m^3}$

c)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 11	≈ 9	≈ 9	≈ 10	≈ 11	≈ 12	≈ 14	≈ 16
Niederschlag	≈ 62	≈ 75	≈ 72	≈ 62	≈ 50	≈ 45	≈ 42	≈ 45
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 18	≈ 20	≈ 22	≈ 24	≈ 25	≈ 26	≈ 27	≈ 27
Niederschlag	≈ 50	≈ 58	≈ 62	≈ 68	≈ 70	≈ 70	≈ 68	≈ 65
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 26	≈ 24	≈ 21	≈ 18	≈ 14	≈ 11	≈ 8	≈ 9
Niederschlag	≈ 55	≈ 52	≈ 45	≈ 42	≈ 42	≈ 44	≈ 46	≈ 46

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MJul ; Temperatur: $26°C$; Niederschlag: $68\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MOkt ; Temperatur: $16°C$; Niederschlag: $40\frac{mm}{m^3}$

d)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 12	≈ 11	≈ 10	≈ 10	≈ 10	≈ 12	≈ 15	≈ 18
Niederschlag	≈ 120	≈ 170	≈ 180	$\approx$	≈ 170	≈ 160	≈ 140	≈ 125
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 22	≈ 23	≈ 27	≈ 29	≈ 30	≈ 30	≈ 28	≈ 26
Niederschlag	≈ 120	≈ 125	≈ 136	≈ 150	≈ 160	≈ 170	≈ 166	≈ 156
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 24	≈ 21	≈ 18	≈ 15	≈ 13	≈ 12	≈ 11	≈ 10
Niederschlag	≈ 144	≈ 126	≈ 115	≈ 100	≈ 92	≈ 95	≈ 100	≈ 116

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMai ; Temperatur: $24°C$; Niederschlag: $136\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MJul ; Temperatur: $30°C$; Niederschlag: $160\frac{mm}{m^3}$

e)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ -3	≈ -12	≈ -14	≈ -13	≈ -11	≈ -8	≈ -4	≈ 0
Niederschlag	≈ 44	≈ 41	≈ 40	≈ 40	≈ 41	≈ 40	≈ 38	≈ 33
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 3	≈ 6	≈ 9	≈ 11	≈ 12	≈ 13	≈ 13	≈ 12
Niederschlag	≈ 30	≈ 23	≈ 18	≈ 14	≈ 11	≈ 12	≈ 15	≈ 20
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 10	≈ 8	≈ 5	≈ 1	≈ -3	≈ -6	≈ -9	≈ -10
Niederschlag	≈ 27	≈ 35	≈ 45	≈ 55	≈ 60	≈ 62	≈ 60	≈ 50

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMai ; Temperatur: $6°C$; Niederschlag: $22\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MSep ; Temperatur: $8°C$; Niederschlag: $30\frac{mm}{m^3}$

f)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 38	≈ 35	≈ 33	≈ 31	≈ 29	≈ 27	≈ 25	≈ 23
Niederschlag	≈ 112	≈ 120	≈ 130	≈ 124	≈ 120	≈ 114	≈ 104	≈ 94
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 21	≈ 19	≈ 18	$\approx$	≈ 17	≈ 17	≈ 17	≈ 18
Niederschlag	≈ 90	≈ 82	≈ 80	≈ 80	≈ 82	≈ 83	≈ 90	≈ 95
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 19	≈ 21	≈ 23	≈ 26	≈ 28	≈ 30	≈ 31	≈ 32
Niederschlag	≈ 100	≈ 106	≈ 112	≈ 120	≈ 124	≈ 130	≈ 132	≈ 136

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MJan ; Temperatur: $35°C$; Niederschlag: $122\frac{mm}{m^3}$

Aufgabe 3:

Zeitpunkt	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug
Temperatur	–	≈ -11	≈ -9	≈ -4	≈ 2	≈ 8	≈ 12	≈ 13
Niederschlag	–	≈ 38	≈ 43	≈ 40	≈ 24	≈ 18	≈ 14	≈ 17
∅ Temperatur	–	≈ -11	≈ -1	≈ 5	$\approx 6,5$	≈ 6	≈ 4	$\approx 2,5$
∅ Niederschlag	–	–	–	–	≈ 36	≈ 31	≈ 24	≈ 18

Zeitpunkt	Sep	Okt	Nov	Dez	Jan	Feb	Mrz	Apr
Temperatur	≈ 10	≈ 4	≈ -3	≈ -8	≈ -7	≈ -5	≈ -6	≈ -1
Niederschlag	≈ 20	≈ 28	≈ 44	≈ 59	≈ 56	≈ 35	≈ 30	≈ 43
∅ Temperatur	≈ 1	≈ 0	≈ 0	$\approx 0,5$	$\approx 1,5$	≈ 3	$\approx 4,5$	$\approx 6,5$
∅ Niederschlag	≈ 52	≈ 26	≈ 37	≈ 47	≈ 48	≈ 45	≈ 41	≈ 40

Zeitpunkt	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Temperatur	≈ 8	≈ 18	≈ 24	≈ 23	≈ 18	≈ 13	≈ 8	≈ 4
Niederschlag	≈ 55	≈ 38	≈ 14	≈ 11	≈ 42	≈ 72	≈ 66	≈ 45
∅ Temperatur	≈ 8	≈ 9	≈ 10	≈ 11	≈ 11	≈ 11	≈ 11	≈ 11
∅ Niederschlag	≈ 45	≈ 47	≈ 40	≈ 30	≈ 26	≈ 34	≈ 47	≈ 56

Zeitpunkt	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug
Temperatur	≈ 2	≈ 3	≈ 6	≈ 14	≈ 21	≈ 26	≈ 29	≈ 30
Niederschlag	≈ 53	≈ 66	≈ 52	≈ 32	≈ 16	≈ 11	≈ 7	≈ 6
∅ Temperatur	≈ 11	$\approx 11,5$	$\approx 12,5$	≈ 14	≈ 17	≈ 20	≈ 23	≈ 25
∅ Niederschlag	≈ 59	≈ 58	≈ 54	≈ 50	≈ 42	≈ 28	≈ 16	≈ 10

Zeitpunkt	Sep	Okt	Nov	Dez				
Temperatur	≈ 26	≈ 20	≈ 13	≈ 6				
Niederschlag	≈ 20	≈ 30	≈ 40	≈ 56				
∅ Temperatur	≈ 27	≈ 25	≈ 20	≈ 7				
∅ Niederschlag	≈ 12	≈ 16	≈ 24	≈ 36				

Aufgabe 4:

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Aktienkurs	≈ 20	≈ 26	≈ 36	≈ 42	≈ 50	≈ 60	≈ 48	≈ 70

Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Aktienkurs	≈ 75	≈ 60	≈ 80	≈ 93	≈ 50	≈ 80	≈ 94	≈ 95

Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Aktienkurs	≈ 115	≈ 125	≈ 85	≈ 100	≈ 115	≈ 112	≈ 123	≈ 125

Aufgabe 5:

a) $\approx 850m$; $\approx 1050m$; $\approx 600m$; $\approx 500m$; $\approx 800m$; $\approx 1200m$; $\approx 700m$
b) $\approx 8,25km$
c) $\approx 2km$

Aufgabe 7:

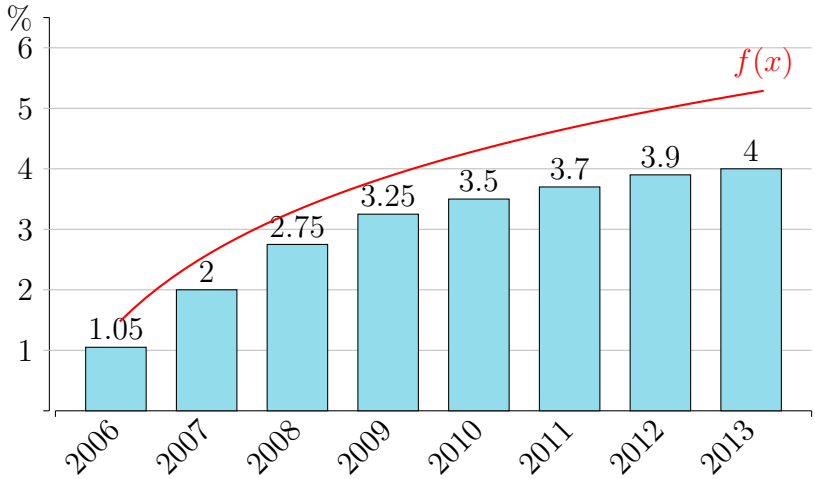
a) lineares
b) $m = 0,3$
c) $f(x) = 0,3x + 0,2$
d) $f(18) = 6,2$

Aufgabe 8:

a) exponentielles
b) $f(2014) = 25,6$
c) $f(x) = 0,1 \cdot 2^x$
d) $x = \text{lb}10 = \log_2 10 \approx 3,32193$
d) $x = \text{lb}500 = \log_2 500 \approx 8,96578$

Aufgabe 9:

a) logarithmisches
b) von 2006 zu 2007
c)



Aufgabe 10:

a) exponentielle Funktion

b)

x	-4	-2	1	2	4
$f(x)$	$0,25$	$0,5$	0	2	4

c) $f(x) = \sqrt{2}^x$

d)

x	8	$1,5$	$\approx 6,64$	$\approx 3,17$	-8	$\approx -6,64$	-1	$\approx -33,22$
$f(x)$	16	$\approx 1,68$	10	3	$0,0625$	$0,1$	$\approx 0,707$	10^{-5}

Aufgabe 11:

Da e^x niemals gleich Null sein kann, kann man durch e^x bedenkenlos dividieren. Beispiel: Da $e^{-200} = \frac{1}{e^{200}} \approx 1,3839 \cdot 10^{-87}$ ist, kann somit nur eine beliebig kleine Zahl erreicht werden.

Aufgabe 12:

Behauptung	wahr	falsch
$f(x) = mx + b$ ist eine Funktion erster Ordnung.	x	
Eine Konstante ist keine Funktion.		x
Eine Hyperbel ist für alle Werte definiert.		x
Eine Tangente schneidet eine Funktion an einem Punkt.		x
Eine Funktion 5. Ordnung hat bis zu 4 Extremstellen.	x	
Die Exponentialfunktion e^x hat ihren Graphen nur im 1. und 2. Quadranten.	x	
Zur Wurzelfunktion existiert keine Umkehrfunktion.		x
Die Hyperbel $\frac{1}{x}$ hat ihren Graphen nur im 1. und 3. Quadranten.	x	
Der positive Abszissen- und negative Ordinatenbereich ist der 4. Quadrant.	x	
$f(x) = -3x^6 + 2x^2 - 9$ ist eine Funktion zweiter Ordnung.		x

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.16).

16.7.45 Lösungen zum Differentiationsoperator

Aufgabe 1:

a) $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$

b) $\frac{d}{dx}3x^2 = 6x$

c) $\frac{d}{dx}(x+1) = 1$

d) $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2\right) = 3x^2 + 2x$

e) $\frac{d}{dx}5\left(x^2 + x\right) = 2x + 1$

f) $\frac{d}{dx}x^2 + x^7 = 2x + x^7$

g) $\frac{d}{dx}5x^3 + 8x^9 = 15x^2 + 8x^9$

h) $\frac{d}{dx}\left(x^3 + 77\right) + x^9 = 3x^2 + x^9$

Aufgabe 2:

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = 55x^{54}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

d) $f'(x) = -x^{-2}$

e) $f'(x) = 1$

f) $f'(x) = 2x + 6x^5$

g) $f'(x) = 20x^4$

h) $f'(x) = 3\pi x^2$

i) $f'(x) = 4ex^3$

j) $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$

k) $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

l) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

m) $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

n) $f'(x) = 8x^{-9}$

o) $f'(x) = -\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}}$

p) $f'(x) = 0$

a)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\frac{1}{2!}x^2 + \frac{d}{dx}\frac{1}{3!}x^3 + \frac{d}{dx}\frac{1}{4!}x^4 + \frac{d}{dx}\frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x
\end{aligned}$$

b) $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$

c) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

d) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

Aufgabe 4: *Leite mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 folgende Funktionen ab.*

a) $f(x) = e^{x}$

b) $f(x) = e^{-x}$

c) $f(x) = e^{4x}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}$

e) $f(x) = \sin x$

f) $f(x) = -\sin x$

g) $f(x) = \cos x$

h) $f(x) = -\cos x$

i) $f(x) = \sin 4x$

j) $f(x) = -\sin 3x$

k) $f(x) = \cos 5x$

l) $f(x) = -\cos 2x$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.1.1).

16.7.46 Lösungen zu den Ableitungsregeln

Aufgabe 1:

a) $f'(x) = 6\,(2x+3)^2$

b) $f'(x) = 6x^2\left(x^3+2\right)$

c) $f'(x) = 2x^3\left(x^4 - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2}\,(8x+3)\left(4x^2+3x\right)^{-\frac{1}{2}}$

e) $f'(x) = 6xe^{3x^2}$

f) $f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4\right)e^{\frac{1}{2}x^3-4x+6}$

g) $f'(x) = 5\cos(5x)$

h) $f'(x) = 2x^2\sin(-2x^3)$

i) $f'(x) = -\,(5x+3)\left(5x^2+6x\right)^{-\frac{3}{2}}$

j) $f'(x) = -9\sin(3x)\,(\cos(3x))^{-4}$

Aufgabe 2:

a) $f'(x) = (1+x)e^x$
b) $f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$
c) $f'(x) = (4x + 10x^2)e^{5x}$
d) $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$
e) $f'(x) = 4x^3 \sin 5x + 5x^4 \cos 5x$
f) $f'(x) = \frac{2,34}{2}x^{1,34} \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^{2,34}\cos\frac{x}{2}$
g) $f'(x) = -\frac{3}{4}e^{-3x}\sin\frac{3x}{4} - 3e^{-3x}\cos\frac{3x}{4}$
h) $f'(x) = a\cos(ax)\cos(bx) - b\sin(ax)\sin(bx)$
i) $f'(x) = (-2\cos(6x)\cos(\pi x) - 6\sin(6x)\cos(\pi x) - \pi\sin(6x)\cos(\pi x))\,e^{-2x}$
j) $f'(x) = (d\sin(ax)\cos(bx) + b\sin(ax)\sin(bx) - a\cos(ax)\cos(bx))\,e^{dx}$

Aufgabe 3:

a) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$
b) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{x\ln a}$
c) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
d) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$
f) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 4:

a) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(2x-1)^2}$
c) $f'(x) = \ln x$
d) $f'(x) = \ln^2 x$
e) $f'(x) = \sin ax \cos ax$
f) $f'(x) = xe^{ax}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.2.1).

16.7.47 Lösungen zur Integration

Aufgabe 1:

$a)\ \frac{x^4}{4}$	$b)\ \frac{4}{7}x^7$	$c)\ \frac{3}{2}x^2 - 3x$
$d)\ 9x$	$e)\ \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 5x$	$f)\ x^4 + \frac{1}{2}x^2$
$g)\ \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$	$h)\ \frac{11}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^4$	$i)\ \frac{1}{3}x^{10} - \frac{1}{3}x^9 + \frac{5}{7}x^7$
$j)\ \frac{12}{25}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 3x$	$k)\ \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$	$l)\ -\frac{1}{x}$

Aufgabe 2:

$a)\ \frac{16256}{7}$	$b)\ \frac{860}{3}$	$c)\ -8$	$d)\ \frac{25}{2}$
$e)\ 672$	$f)\ \frac{27}{2}$	$g)\ \approx 1,76686$	$h)\ \frac{58249}{375}$
$i)\ -\frac{83}{32}$	$j)\ -\frac{9200}{81}$	$k)\ \approx 1,57848$	$l)\ \frac{2}{3}$

Aufgabe 3:

$a)\ x_{x_1} = 1 \ \wedge\ x_{x_2} = 2 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{6}$

$b)\ x_{x_1} = -\frac{3}{2} \ \wedge\ x_{x_2} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ A = \frac{2}{3}$

$c)\ x_{x_1} = \frac{-3-\sqrt{57}}{6} \ \wedge\ x_{x_2} = \frac{-3+\sqrt{57}}{6} \ \Rightarrow\ A \approx 1,29859$

$d)\ x_{x_1} = 0 \ \wedge\ x_{x_2} = 1 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{3}$

$e)\ x_{x_1} = -3-\sqrt{17} \ \wedge\ x_{x_2} = -3+\sqrt{17} \ \Rightarrow\ A \approx 142,934$

$f)\ x_{x_1} \approx 1,72465 \ \wedge\ x_{x_2} \approx 4,84446 \ \Rightarrow\ A \approx 2,64709$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.3.1).

16.7.48 Lösungen zu den Integrationsregeln

Aufgabe 1:

a) $(x-1)e^x$

b) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}$

c) $\sin(x)-x\cos(x)$

d) $\frac{\cos(2x)}{4}+\frac{x\sin(2x)}{2}$

e) $(48x-2x^3)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+12(x^2-8)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $\frac{4\cdot 2^x\left(\ln^2(2)x^2-2\ln(2)x+2\right)}{\ln^3(2)}$

g) $-\frac{3}{4}e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$

h) $\frac{-\cos^2(x)}{2}$

Aufgabe 2:

a) $=e^{x^2}$

b) $e^{\frac{1}{4}x^4}$

c) $=\frac{3}{4}e^{4x^4}$

d) $e^{\sqrt{x^3}}$

e) $=\sin\left(x^4\right)$

f) $\frac{-\cos\left(2x^2\right)}{4}$

g) $=\frac{2}{3}\left(\tan(x)\right)^{\frac{3}{2}}$

h) $-\cos(\ln(x))$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.4.1).

16.7.49 Lösungen zu partieller und totaler Differentiation

Aufgabe 1:

a) $=4x^3-6x$

b) $=2x^5$

c) $=e^x$

d) $=b(x)c(x)x^{c(x)-1}$

e) $=e^x-2x+a(x)$

f) $=1$

g) $=abx^{b-1}-cdx^{d-1}$

h) $=0$

Aufgabe 2:

$a) \quad = (a(x)x^2 + 2x)e^{a(x)x}$

$b) \quad = \dfrac{\sqrt{2}t(x)\cos(\sqrt{2xt(x)})}{2\sqrt{xt(x)}}$

$c) \quad = \left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x}$

$d) \quad = -\dfrac{3x + 2f(x) + 9}{(x-3)^3}$

$e) \quad = \dfrac{a\cos(ax)\cos(a(x)x) + a(x)\sin(ax)\sin(a(x)x)}{\cos^2(a(x)x)}$

$f) \quad = (d(x)\ln(x) + d(x))x^{d(x)x}$

$g) \quad = (a\cos(a(x))\cos(ax) + 2\cos(a(x))x\sin(ax))\,e^{x^2}$

$h) \quad = \tan(\ln(d(x)))\,x^2$

Aufgabe 3:

$a) \quad = (a(x)a'(x)x^2 + 2x)e^{a(x)x}$

$b) \quad = \dfrac{1}{2\sqrt{2xt(x)}}\cos\left(\sqrt{2xt(x)}\right)(2t(x) + 2xt'(x))$

$c) \quad = \left(3\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x}$

$d) \quad = \dfrac{f'(x)x - f(x) - 3f'(x) - 3x - 9}{(x-3)^3}$

$e) \quad = \dfrac{a\cos(ax)\cos(a(x)x) + a(x)a'(x)\sin(ax)\sin(a(x)x)}{\cos^2(a(x)x)}$

$f) \quad = (d'(x)x\ln(x)d(x)\ln(x) + d(x))\,x^{d(x)x}$

$g) \quad = (a\cos(a(x))\cos(ax) + 2\cos(a(x))x\sin(ax) - a(x)a'(x)\sin(ax)\sin(a(x)))\,e^{x^2}$

$h) \quad = \tan(\ln(d(x)))\,x^2 + \dfrac{x^3 d'(x)}{3\cos^2(\ln(d(x)))\,d(x)}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.5.1).

16.7.50 Lösungen zur Kurvendiskussion

Aufgabe 1:

$a)\ E_{Min}(2|-9)$

$b)\ E_{Min}\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{55}{8}\right)$

$c)\ E_{Min}\left(-\frac{1}{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$

$d)\ E_{Min}\left(-\frac{9}{10}\middle|\frac{841}{1700}\right)$

$e)\ E_{Max}\left(-1|\,0\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{-32}{27}\right)$

$f)\ E_{Min}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\middle|\frac{-10\sqrt{15}}{9}-10\right)\ \wedge\ E_{Max}\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\middle|\frac{10\sqrt{15}}{9}-10\right)$

$g)\ E_{Max}\left(-\frac{7}{3}\middle|\frac{343}{108}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(0|\,0\right)$

$h)\ E_{Max}\left(\frac{-1-\sqrt{649}}{12}\middle|13,5082\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{-1+\sqrt{649}}{12}\middle|-12,0066\right)$

$i)\ E_{Min}\left(0|-1\right)$

$j)\ E_{Max}\left(-2|\,4e^{-2}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(0|\,0\right)$

$k)\ E_{Min}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\middle|-5,39928\right)\ \wedge\ E_{Max}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\middle|-1,86002\right)$

$l)\ E_{Min}\left(-\frac{4}{3}\middle|-3,0805\right)$

$m)\ E_{Max}\left(-8|\,132e^{-2}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{1}{2}\middle|-4e^{\frac{1}{8}}\right)$

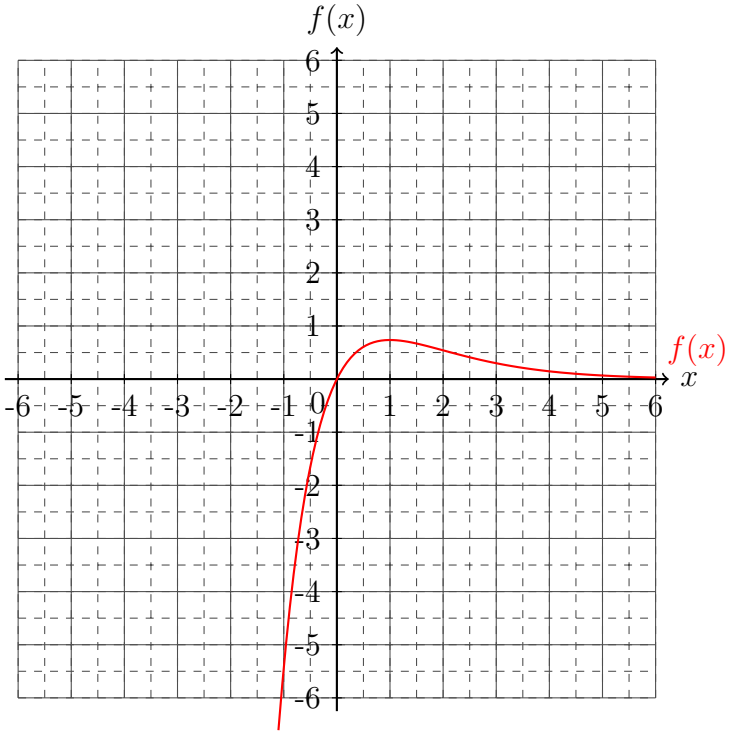
$n)\ E_{Max}\left(-3,95981|\,4,97324\cdot 10^{19}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(-0,040193|\,1,98998\right)$

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

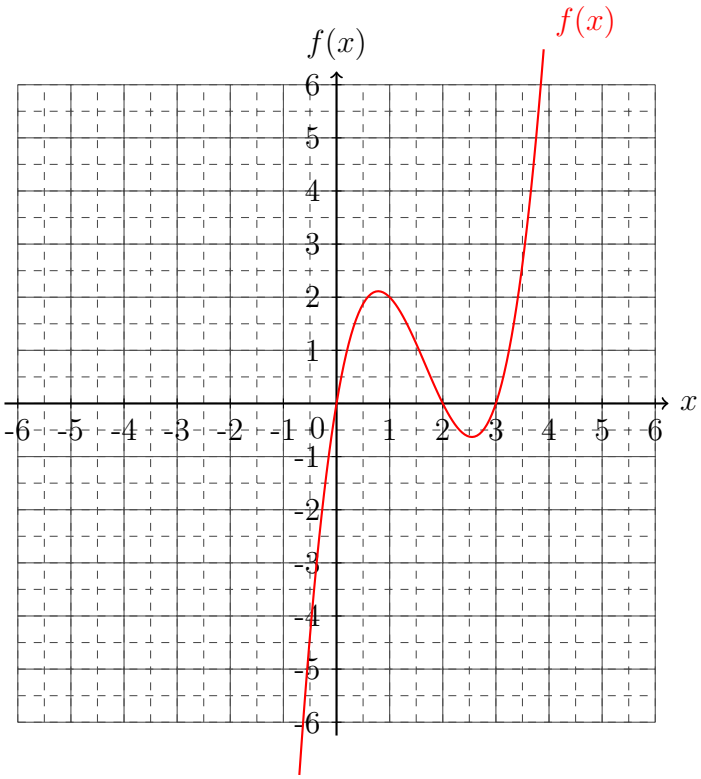
a)

$$f(x) = 2xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad N(0|0)$$
$$f'(x) = (1-x)2e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x_E = 1$$
$$f''(x) = (x-2)2e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x_W = 2$$
$$f'''(x) = (3-x)2e^{-x}$$
$$f''(x_E) = -2e^{-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_{Max}\left(1 \left| \frac{2}{e}\right.\right)$$
$$f'''(x_W) = 4e^{-2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(2 \left| 4e^{-2}\right.\right)$$
$$F(x) = -2(1+x)e^{-x} + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \leq \frac{2}{e} \right\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 1[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]1, \infty[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, 2[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]2, \infty[\quad \text{konvex}$$



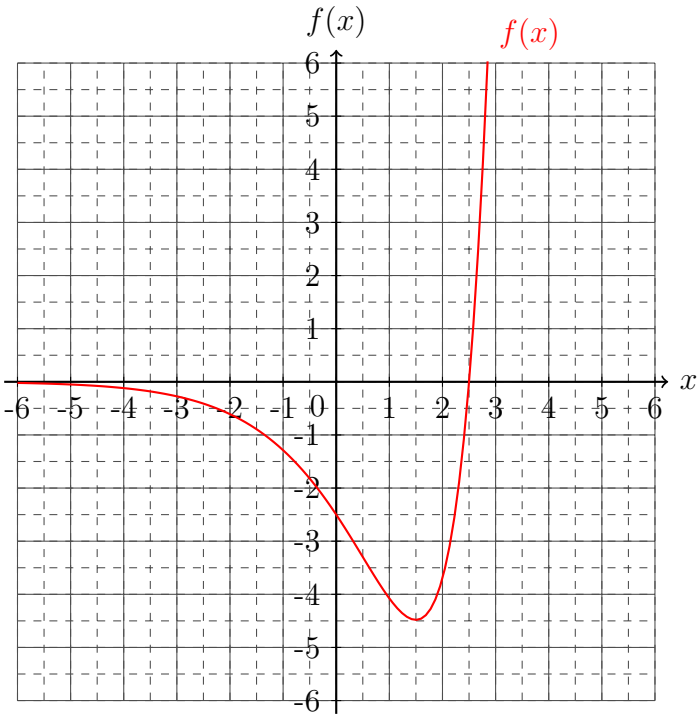
b)

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$\Rightarrow \; N_1(0|0), N_2(2|0), N_3(3|0)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$$
$$\Rightarrow \; x_{E_{1,2}} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$
$$f''(x) = 6x - 10 \;\; \Rightarrow \;\; x_W = \frac{5}{3}$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f''(x_{E_1}) \approx 5,2915 > 0$$
$$\Rightarrow \; E_{Min}\,(2,549\,|-0,631\,)$$
$$f''(x_{E_2}) \approx -5,2915 < 0$$
$$\Rightarrow \; E_{Max}\,(0,785\,|2,113\,)$$
$$f'''(x_W) = 6 \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; W\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{20}{27}\right)$$
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0,785\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]\,0,785, 2,549\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,2,549, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, 1,667\,[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]\,1,667, \infty\,[\quad \text{konvex}$$



c)

$$f(x) = \frac{x^2 - 6,25}{x + 2,5} e^x \quad \Rightarrow \quad N(4|0)$$
$$f'(x) = (x - 1,5)e^x \quad \Rightarrow \quad x_E = 1,5$$
$$f''(x) = (x - 0,5)e^x \quad \Rightarrow \quad x_W = 0,5$$
$$f'''(x) = (x + 0,5)e^x$$
$$f''(x_{E_1}) = e^{1,5} > 0 \quad \Rightarrow \quad E_{Min}\left(1,5 \,\middle|\, -e^{1,5}\right)$$
$$f'''(x_W) = e^{0,5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(0,5 \,\middle|\, -2e^{0,5}\right)$$
$$F(x) = (x - 3,5)e^x + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -e^{1,5}\right\}$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \ ; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \searrow 2,5} f(x) = \lim_{x \nearrow 2,5} f(x) = 5e^{2,5}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 1,5[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]1,5, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, 0,5[\quad \text{konvex}$$
$$f(x) \in \,]0,5, \infty[\quad \text{konkav}$$



d)

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \; N_1(-1,618|0); N_1(0,618|0)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \; \text{keine Extremstellen}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \; \text{keine Wendestellen}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x) + c$$

$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\infty \;\; ; \;\; \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \infty$$

$$A(x) = x + 1 \;\; \forall x \to \pm\infty$$

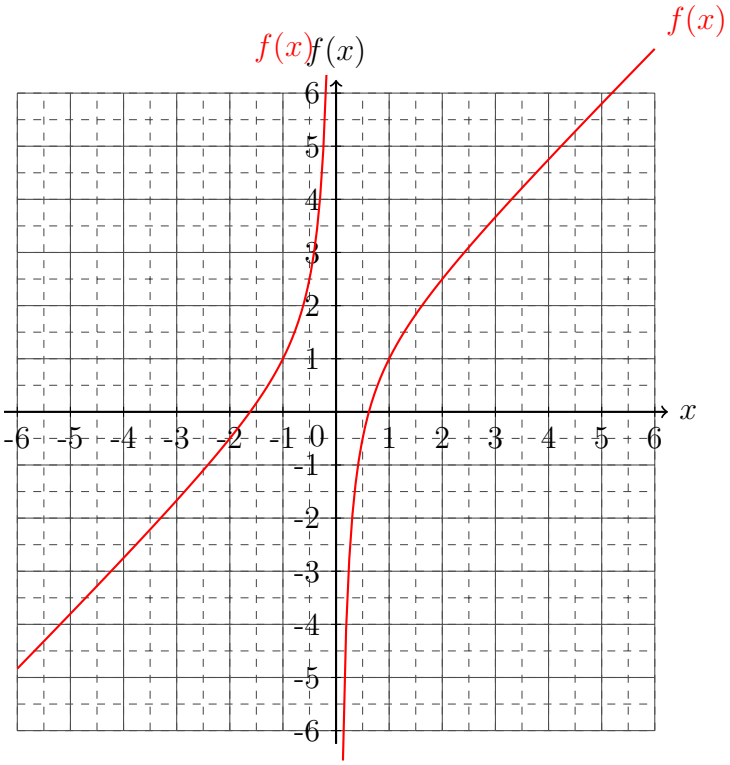
Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei 0

$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]0, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f(x) \in \,]-\infty, 0[\quad \text{konvex}$$

$$f(x) \in \,]0, \infty[\quad \text{konkav}$$



e)

$$f(x) = x^3 e^{\frac{1}{4}x-2} \;\Rightarrow\; N(0|0)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4} + 3x^2\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_E = 0$$

$$f''(x) = \frac{x}{16}\left(x^2 + 24x + 96\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_W = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1}{64}\left(x^3 + 36x^2 + 288x + 384\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$

$$f'''(0) = 6e^{-2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt: } S(0|0)$$

$$F(x) = 4(x^3 - 12x^2 + 96x - 384)e^{\frac{1}{4}x-2} + c$$

$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

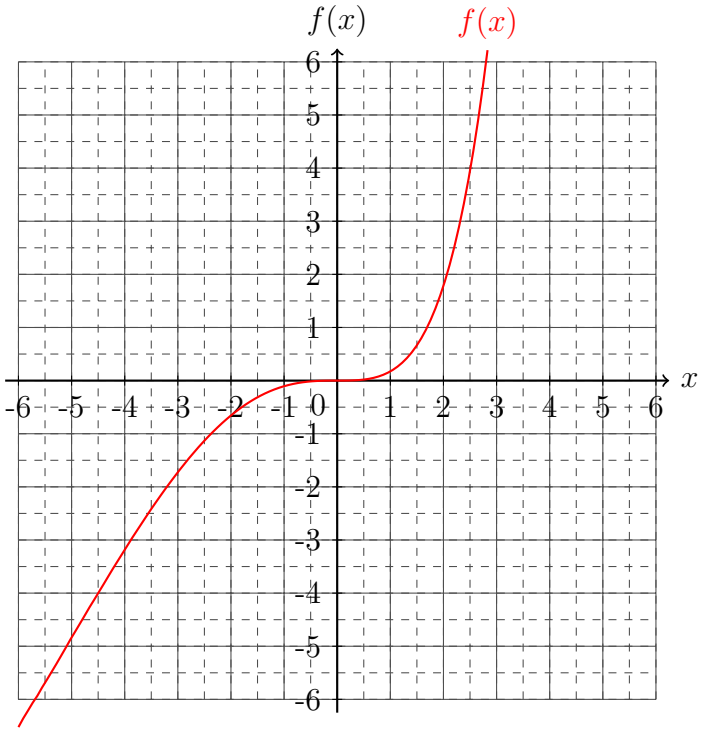
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, \infty[\quad \text{m. st.}$$

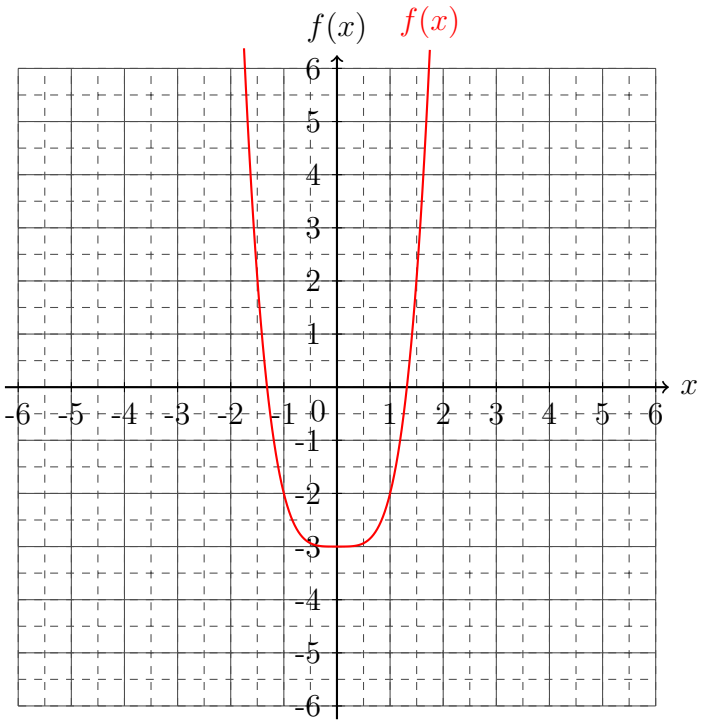
$$f(x) \in \,]-\infty, 0[\quad \text{konkav}$$

$$f(x) \in \,]0, \infty[\quad \text{konvex}$$



$f)$

$$f(x) = x^4 - 3$$
$$\Rightarrow \; N_1(\sqrt[4]{3}|0); N_2(\sqrt[4]{3}|0)$$
$$f'(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad x_E = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f'''(0) = 0$$
$$\Rightarrow \; \text{Substitutionstest: } z := x^2$$
$$f(z) = z^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad E_{Min}(0|-3)$$
$$F(x) = 4(x^3 - 12x^2 + 96x - 384)e^{\frac{1}{4}x-2} + c$$
$$f(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; \text{Achsensymmetrie}$$
$$f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -3\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]0, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, \infty[\quad \text{konvex}$$



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.6.8).

16.7.51 Lösungen zu den Rotationskörpern

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.7.1).

16.7.52 Lösungen zu den gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.8).

16.7.53 Lösungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1:

a) 21 *b)* 45 *c)* Ziehung mit Zurücklegen

d) $\frac{21}{45} \cdot \frac{21}{45}$ *e)* $\frac{24}{45} \cdot \frac{21}{45}$ *f)* $2\left(\frac{21}{45} \cdot \frac{21}{45}\right)$

g) $\left(\frac{24}{45}\right)^3$ *h)* $\frac{21}{45}$ *i)* $1 - \left(\frac{21}{45}\right)^2$

j) $1 = 100\%$

Aufgabe 2:

a) 88 *b)* 144 *c)* Ziehung ohne Zurücklegen

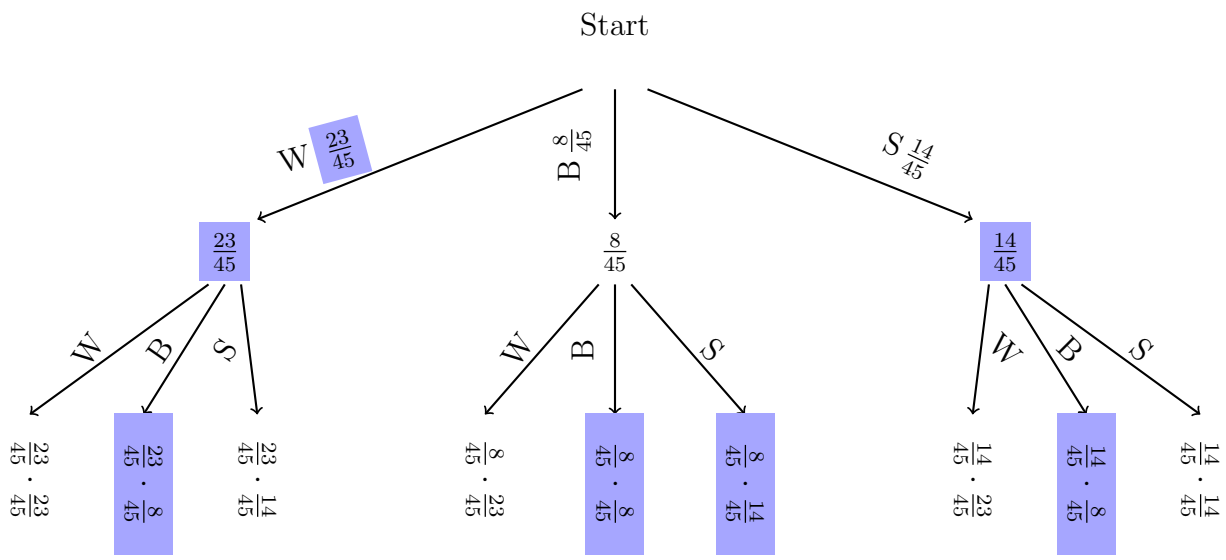
d) $\frac{56}{144} \cdot \frac{55}{143}$ *e)* $\frac{88}{144} \cdot \frac{56}{143}$ *f)* $2\left(\frac{88}{144} \cdot \frac{56}{143}\right)$

g) $\frac{88}{144} \cdot \frac{87}{143} \cdot \frac{86}{142}$ *i)* $1 - \frac{56 \cdot 55}{144 \cdot 143}$ *j)* 0%

h) WWS: $\frac{88 \cdot 87 \cdot 56}{144 \cdot 143 \cdot 142}$ WSS: $\frac{88 \cdot 56 \cdot 55}{144 \cdot 143 \cdot 142}$ SWS: $\frac{56 \cdot 87 \cdot 55}{144 \cdot 143 \cdot 142}$

SSS: $\frac{56 \cdot 55 \cdot 54}{144 \cdot 143 \cdot 142}$

Aufgabe 3:

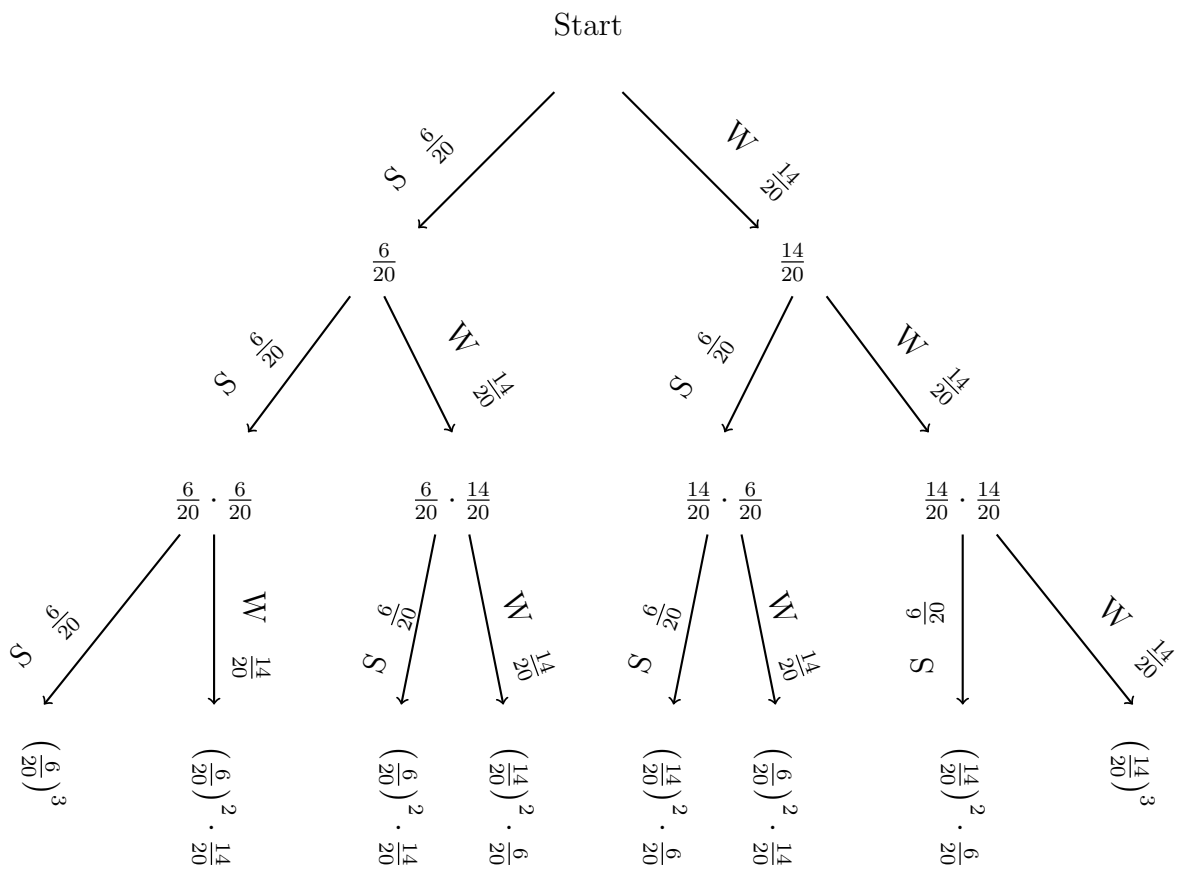


a) $\frac{8}{45}$ *b)* $\left(\frac{14}{45}\right)^2$ *c)* 3

d) 4 *e)* $\left(\frac{23}{45}\right)^2$ *f)* 1

g) $2\left(\frac{14}{45}\cdot\frac{23}{45}\right)$ *h)* $1-\left(\frac{23}{45}\right)^2$

Aufgabe 4:

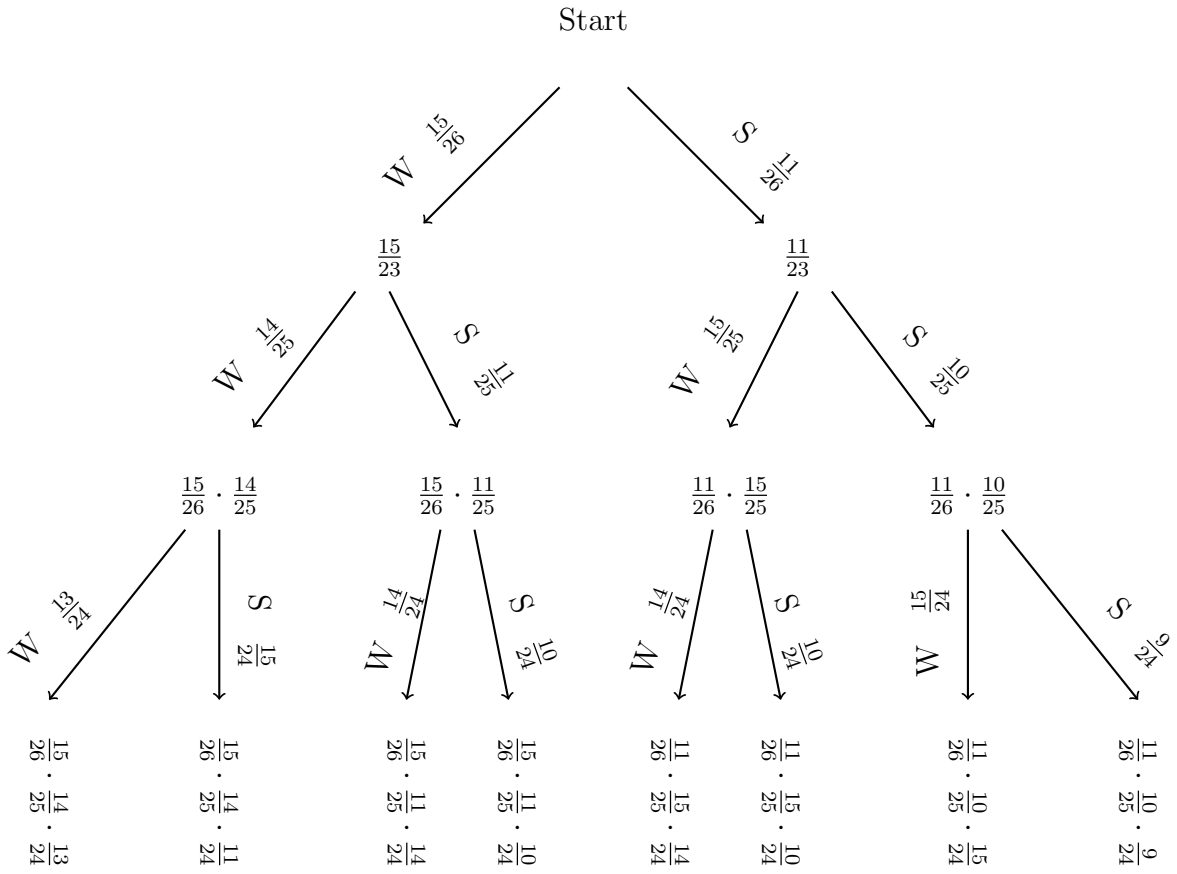


a) $\frac{14}{20}$ *b)* $\left(\frac{6}{20}\right)^3$ *c)* 3

d) 7 *e)* $\left(\frac{6}{20}\right)^3+3\left(\frac{6}{20}\right)^2\cdot\frac{14}{20}$ *f)* $1-\left(\frac{6}{20}\right)^3$

g) $\left(\frac{6}{20}\right)^3+3\left(\frac{6}{20}\right)^2\cdot\frac{14}{20}$ *h)* $1-\left(\frac{6}{20}\right)^3$

Aufgabe 5:



a) $\dfrac{15}{26}$

b) $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

c) 3

d) 7

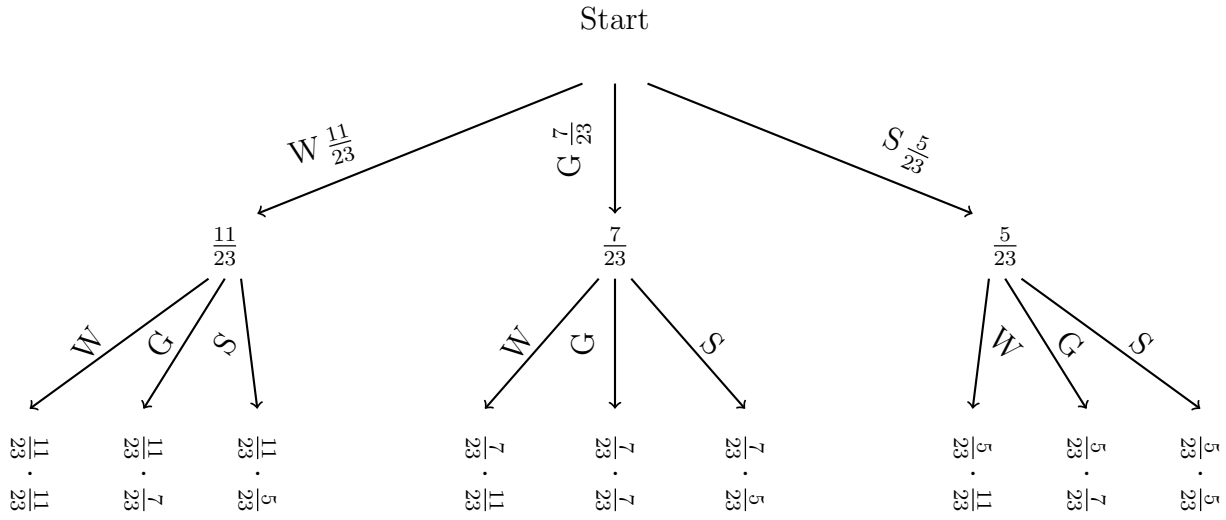
e) $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24} + 3\left(\dfrac{11 \cdot 10 \cdot 15}{26 \cdot 25 \cdot 24}\right)$

f) $1 - \dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

g) $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24} + 3\left(\dfrac{11 \cdot 10 \cdot 15}{26 \cdot 25 \cdot 24}\right)$

h) $1 - \dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

Aufgabe 6:



a) $\dfrac{7}{23}$ *b)* $\left(\dfrac{7}{23}\right)^3$

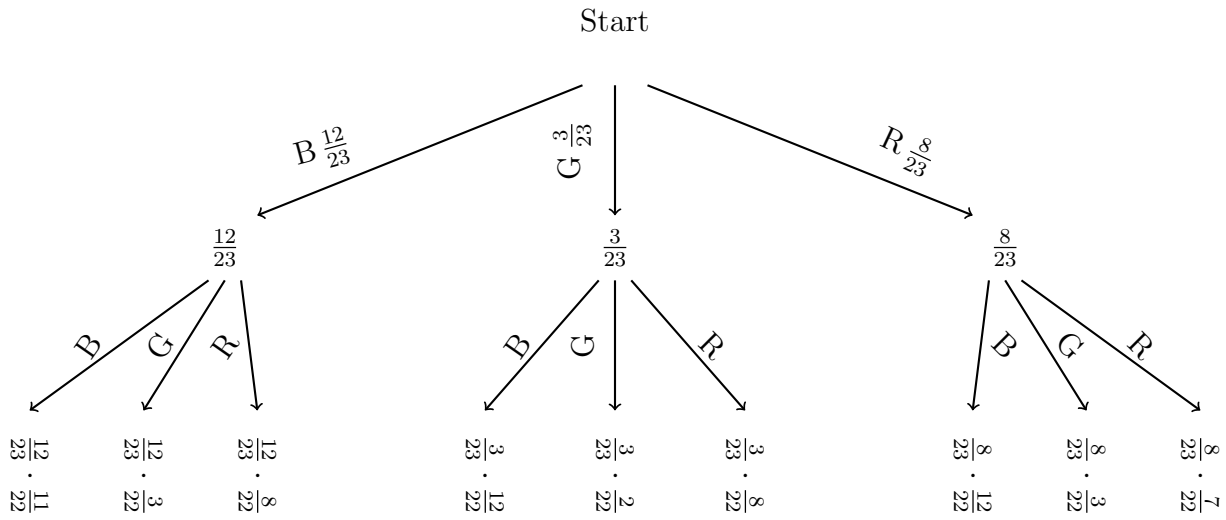
c) 1 *d)* 5

e) 3 *f)* $3\left(\dfrac{11 \cdot 7 \cdot 5}{23^3}\right)$

g) $\dfrac{11 \cdot 7 \cdot 5}{23^3}$ *h)* $\dfrac{11 \cdot 7 \cdot 7}{23^3}$

i) $1 - \left(\dfrac{5}{23}\right)^3$

Aufgabe 7:



$a)\ \dfrac{12}{23}$	$b)\ \dfrac{3 \cdot 2}{23 \cdot 22}$
$c)\ 3$	$d)\ 9$
$e)\ \dfrac{12 \cdot 11}{23 \cdot 22}$	$f)\ 1 - \dfrac{8 \cdot 7}{23 \cdot 22}$
$g)\ 1 - \dfrac{3 \cdot 2}{23 \cdot 22}$	$h)\ 1 = 100\%$
$i)\ \dfrac{3 \cdot 12 \cdot 11}{23 \cdot 22 \cdot 21}$	$j)\ \dfrac{3 \cdot 12 \cdot 11}{23 \cdot 22 \cdot 21}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (7.0.1).

16.7.54 Lösungen zu Permutationen

Aufgabe 1:

$a)\ \{1,2,3\}\ ;\ \{1,3,2\}\ ;\ \{2,1,3\}\ ;\ \{2,3,1\}\ ;\ \{3,1,2\}\ ;\ \{3,2,1\}$
$b)\ \{R,R,B\}\ ;\ \{R,B,R\}\ ;\ \{B,R,R\}$
$c)\ \{G,B,B,B\}\ ;\ \{B,G,B,B\}\ ;\ \{B,B,G,B\}\ ;\ \{B,B,B,G\}$
$d)\ \{R,R,B,B\}\ ;\ \{R,B,R,B\}\ ;\ \{B,R,B,R\}\ ;\ \{B,B,R,R\}\ ;\ \{R,B,B,R\}\ ;\ \{B,R,R,B\}$
$e)\ \{R,R,G,B\}\ ;\ \{R,R,B,G\}\ ;\ \{R,G,B,R\}\ ;\ \{R,B,G,R\}\ ;\ \{G,B,R,R\}\ ;\ \{B,G,R,R\}\ ;$
$\{G,R,R,B\}\ ;\ \{B,R,R,G\}\ ;\ \{R,G,R,B\}\ ;\ \{R,B,R,G\}\ ;\ \{G,R,B,R\}\ ;\ \{B,R,G,R\}\ ;$
$f)\ \{R,R,G,G,G\}\ ;\ \{R,G,G,G,R\}\ ;\ \{G,G,G,R,R\}\ ;\ \{G,G,R,G,R\}\ ;\ \{G,R,G,G,R\}\ ;$
$\{G,R,R,G,G\}\ ;\ \{G,R,G,R,G\}\ ;\ \{R,G,G,R,G\}\ ;\ \{R,G,R,G,G\}\ ;\ \{G,G,R,R,G\}$

Aufgabe 2:

$a)\ 4! = 24$	$b)\ 6! = 720$
$c)\ 5! = 120$	$d)\ 5! = 120$
$e)\ 6! = 720$	$f)\ 10! = 3628800$

Aufgabe 3:

$a)\ 4! = 24$ $\quad b)\ 6! = 720$

$c)\ \dfrac{5!}{2!2!} = 30$ $\quad d)\ \dfrac{5!}{4!} = 5$

$e)\ \dfrac{6!}{2!} = 360$ $\quad f)\ \dfrac{10!}{3!2!4!} = 6300$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (7.1.1).

16.7.55 Lösungen zu Verteilungen

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (7.2.1).

16.7.56 Lösungen zur Vektoraddition

Aufgabe 1:

$a)\ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\quad c)\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad f)\ \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ -23 \end{pmatrix}$ $\quad g)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 28 \end{pmatrix}$ $\quad h)\ \begin{pmatrix} -57 \\ -12 \\ -25 \end{pmatrix}$

$i)\ \begin{pmatrix} 9,3 \\ -2,1 \\ -10,2 \end{pmatrix}$ $\quad j)\ \begin{pmatrix} -1,95 \\ 2,05 \\ 3,3 \end{pmatrix}$ $\quad k)\ \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ $\quad l)\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 5 \\ -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) $(5\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 7\hat{e}_3)$ *b)* $(7\hat{e}_1 - 8\hat{e}_2 - 5\hat{e}_3)$

c) $(-50\hat{e}_1 + 23\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3)$ *d)* $(-1\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3)$

e) $(-13,9\hat{e}_1 + 21,8\hat{e}_2 - 3,4\hat{e}_3)$ *f)* $(8,2\hat{e}_1 + 16,9\hat{e}_2 - 12,1\hat{e}_3)$

g) $\left(\frac{40}{3}\hat{e}_1 + \frac{17}{2}\hat{e}_2 - \frac{109}{6}\hat{e}_3\right)$ *h)* $\left(-\frac{55}{14}\hat{e}_1 - \frac{205}{28}\hat{e}_2 - \frac{195}{28}\hat{e}_3\right)$

i) $\left(-\frac{11}{2}\hat{e}_1 - \frac{23}{5}\hat{e}_2 + \frac{19}{3}\hat{e}_3\right)$ *j)* $\left(\frac{19}{15}\hat{e}_1 - \frac{407}{90}\hat{e}_2 - \frac{17}{30}\hat{e}_3\right)$

Aufgabe 3:

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 83 \\ -52 \\ 27 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 7,35 \\ -0,05 \\ -6,9 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} -\frac{59}{24} \\ \frac{17}{4} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.0.1).

16.7.57 Lösungen zur Vektornorm

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.1.1).

16.7.58 Lösungen zum Skalarprodukt

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.2.1).

16.7.59 Lösungen zu Matrizen und Tensoren

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.3.7).

16.7.60 Lösungen zum Kreuz- und Spatprodukt

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.4.1).

16.7.61 Lösungen zu vektoriellen Geraden

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.5.1).

16.7.62 Lösungen zu vektoriellen Ebenen

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.6.1).

16.7.63 Lösungen zur vektoriellen Geometrie

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.7.1).

16.7.64 Lösungen zu den gemischten Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.8).

16.7.65 Lösungen zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1:

$a)$ $\Re(z) = 1$	$\Im(z) = 2$	$b)$ $\Re(z) = 3$	$\Im(z) = -8$
$c)$ $\Re(z) = -4$	$\Im(z) = 1$	$d)$ $\Re(z) = 0$	$\Im(z) = 7$
$e)$ $\Re(z) = 6$	$\Im(z) = 0$	$f)$ $\Re(z) = -7$	$\Im(z) = 5$
$g)$ $\Re(z) = -\frac{4}{5}$	$\Im(z) = \frac{6}{7}$	$h)$ $\Re(z) = -\frac{9}{4}$	$\Im(z) = -\frac{7}{3}$
$i)$ $\Re(z) = \sqrt{2}$	$\Im(z) = \ln 6$	$j)$ $\Re(z) = -e$	$\Im(z) = -\pi$

Aufgabe 2:

$a)\ = 10 + 7i$	$b)\ = 8 + 7i$	$c)\ = 5 + 3i$
$d)\ = 2 + 11i$	$e)\ = 10,6 + 7,6i$	$f)\ = 13,45 - 0,9i$
$g)\ = 0,87 + 10,23i$	$h)\ = 2,02 + 12,23i$	$i)\ = \frac{47}{20} + \frac{27}{8}i$
$j)\ = \frac{31}{12} - \frac{46}{21}i$	$k)\ = \frac{42}{55} + \frac{13}{40}i$	$l)\ = \frac{121}{35} - \frac{7}{12}i$
$m)\ = \frac{103}{35} + \frac{233}{50}i$	$n)\ = \frac{491}{50} + \frac{109}{60}i$	$o)\ = \frac{77}{50} + \frac{27}{100}i$
$p)\ = \frac{1163}{300} - \frac{491}{3000}i$	$q)\ \approx 2,968 + 4,060i$	$r)\ \approx 7,899 + 8,401i$
$s)\ \approx 3,689 + 3,401i$	$t)\ \approx 8,041 + 4,647i$	

Aufgabe 3:

$a)\ = -2 + 3i$	$b)\ = 6 - 3i$	$c)\ = 1 + 13i$
$d)\ = 20 - 5i$	$e)\ = -5,8 + 3,8i$	$f)\ = -0,65 + 1,5i$
$g)\ = 2,21 + 1,63i$	$h)\ = -1,94 - 7,52i$	$i)\ = -\frac{17}{20} + \frac{13}{8}i$
$j)\ = \frac{11}{12} - \frac{52}{21}i$	$k)\ = -\frac{2}{55} + \frac{43}{40}i$	$l)\ = -\frac{61}{35} + \frac{7}{4}i$
$m)\ = \frac{4}{5} - \frac{297}{50}i$	$n)\ = \frac{163}{50} - \frac{91}{60}i$	$o)\ = -\frac{1}{25} - \frac{293}{100}i$
$p)\ = \frac{763}{300} + \frac{509}{3000}i$	$q)\ \approx 0,504 - 1,232i$	$r)\ \approx -1,266 + 1,190i$
$s)\ \approx -0,470 + 2,015i$	$t)\ \approx -4,582 + 1,636i$	

Aufgabe 4:

$a)\ = 14 + 38i$	$b)\ = -3 + 37i$	$c)\ = 46 + i$
$d)\ = -123 + 61i$	$e)\ = 8,85 + 51,3i$	$f)\ = 45,48 - 5,565i$
$g)\ = -26,5308 + 2,6489i$	$h)\ = -23,1153 + 5,0478i$	$i)\ = -\frac{79}{80} + \frac{149}{32}i$
$j)\ = \frac{43}{24} - \frac{61}{36}i$	$k)\ = \frac{359}{880} + \frac{79}{550}i$	$l)\ = \frac{7331}{2520} + \frac{31}{60}i$
$m)\ \approx 5,106 + 2,869i$	$n)\ \approx 21,201 + 11,392i$	$o)\ \approx 2,721 + 0,149i$
$p)\ \approx 2,141 - 0,533i$	$q)\ \approx 0,131 + 8,366i$	$r)\ \approx -2,093 + 33,936i$
$s)\ \approx 1,470 + 6,747i$	$t)\ \approx 6,189 + 22,432i$	

Aufgabe 5:

$a)\ = \frac{17}{20} + \frac{11}{20}i$	$b)\ = \frac{17}{26} - \frac{33}{26}i$	$c)\ = -\frac{34}{29} + \frac{31}{29}i$
$d)\ = -\frac{15}{29} - \frac{23}{29}i$	$e)\ \approx 0,431 + 0,595i$	$f)\ \approx 0,875 + 0,192i$
$g)\ \approx 1,292 - 0,559i$	$h)\ \approx 0,230 + 0,042i$	$i)\ = \frac{5420}{5321} + \frac{5350}{5321}i$
$j)\ = \frac{3969}{2522} - \frac{3871}{2522}i$	$k)\ = -\frac{2060}{5291} + \frac{7328}{5291}i$	$l)\ \approx 0,191 + 0,310i$
$m)\ \approx -0,051 - 0,172i$	$n)\ \approx 1,603 - 0,769i$	$o)\ \approx -0,482 - 0,707i$
$p)\ \approx 4,531 + 1,137i$	$q)\ \approx 0,761 - 0,347i$	$r)\ \approx 0,956 + 0,295i$
$s)\ \approx 1,087 + 0,940i$	$t)\ \approx 0,372 + 0,409i$	

Aufgabe 6:

$a)\ \overline{z} = 2 - 3i$	$b)\ \overline{z} = 6 + 9i$
$c)\ \overline{z} = -4 + i$	$d)\ \overline{z} = 8$
$e)\ \overline{z} = 3i$	$f)\ \overline{z} = -4 - 2i$
$g)\ \overline{z} = -\frac{5}{7} - \frac{9}{8}i$	$h)\ \overline{z} = -\frac{4}{3} + \frac{7}{9}i$
$i)\ \overline{z} = \sqrt{5} + i \ln 8$	$j)\ \overline{z} = e + \pi i$

Aufgabe 7: *Bestimme Betrag der komplexen Zahlen.*

$a)\ \lvert z\rvert \approx 8,0623$	$b)\ \lvert z\rvert \approx 2,8284$
$c)\ \lvert z\rvert \approx 7,2801$	$d)\ \lvert z\rvert \approx 7,0711$
$e)\ \lvert z\rvert \approx 8,5440$	$f)\ \lvert z\rvert \approx 8,6023$
$g)\ \lvert z\rvert \approx 0,6468$	$h)\ \lvert z\rvert \approx 1,0817$
$i)\ \lvert z\rvert \approx 2,8648$	$j)\ \lvert z\rvert \approx 4,1544$

Aufgabe 8:

$a)\quad = 6 + 11i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = 6\;;\; \Im(z_E) = 11\;;\; \overline{z_E} = 6 - 11i\;;\; |z_E| \approx 12,53$

$b)\quad = -7 - 5i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -7\;;\; \Im(z_E) = -5\;;\; \overline{z_E} = -7 + 5i\;;\; |z_E| \approx 8,602$

$c)\quad = -45 - 25i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -45\;;\; \Im(z_E) = -25\;;\; \overline{z_E} = -45 + 25i\;;\; |z_E| \approx 51,478$

$d)\quad = \frac{90}{221} - \frac{99}{221}i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = \frac{90}{221}\;;\; \Im(z_E) = -\frac{99}{221}\;;\; \overline{z_E} \approx \frac{90}{221} + \frac{99}{221}i\;;\; |z_E| = 0,605$

$e)\quad = -1 + 3i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -1\;;\; \Im(z_E) = 3\;;\; \overline{z_E} = -1 - 3i\;;\; |z_E| \approx 3,162$

$f)\quad = -\frac{605}{41} - \frac{730}{41}i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -\frac{605}{41}\;;\; \Im(z_E) = -\frac{730}{41}\;;\; \overline{z_E} = -\frac{605}{41} + \frac{730}{41}i\;;\; |z_E| \approx 23,125$

$g)\quad = -\frac{229}{41} - \frac{93}{41}i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -\frac{229}{41}\;;\; \Im(z_E) = -\frac{93}{41}\;;\; \overline{z_E} = -\frac{229}{41} + \frac{93}{41}i\;;\; |z_E| \approx 6,028$

$h)\quad = 26 - 2i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = 26\;;\; \Im(z_E) = -2\;;\; \overline{z_E} = 26 + 2i\;;\; |z_E| \approx 26,077$

$i)\quad = -11 + 27i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = -11\;;\; \Im(z_E) = 27\;;\; \overline{z_E} = -11 - 27i\;;\; |z_E| \approx 29,155$

$j)\quad = 69 + 75i \;\Rightarrow\; \Re(z_E) = 69\;;\; \Im(z_E) = 75\;;\; \overline{z_E} = 69 - 75i\;;\; |z_E| \approx 101,912$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.1.1).

16.7.66 Lösungen zu komplexen Matrizen

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.2.1).

16.7.67 Lösungen zur Taylorentwicklung

Aufgabe 1:

$a)\quad \mathcal{T}_f(x;0) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \mathcal{O}(x^8)$

$b)\quad \mathcal{T}_f(x;0) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)$

$c)\quad \mathcal{T}_f(x;0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

$d)\quad \mathcal{T}_f(x;0) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.1.1).

16.7.68 Lösungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.2.1).

16.7.69 Lösungen zu Differentialgleichungen 2. Ordnung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.3.1).

16.7.70 Lösungen zu inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.4.1).

16.7.71 Lösungen zu Distributionen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.5.1).

16.7.72 Lösungen zu Kurvenintegralen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.6.1).

16.7.73 Lösungen zu Ringintegralen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.7.1).

16.7.74 Lösungen zur Fourier-Transformation

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.8.1).

16.7.75 Lösungen zu Faltungen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.9.1).

16.7.76 Lösungen zu den Gemischte Aufgaben zur Analysis

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.10).

16.7.77 Lösungen zum Gradient

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.1.1).

16.7.78 Lösungen zur Divergenz

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.2.1).

16.7.79 Lösungen zur Rotation

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.3.1).

16.7.80 Lösungen zu Koordinatenwechseln

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.4.1).

16.7.81 Lösungen zum Satz von Gauß

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.5.1).

16.7.82 Lösungen zum Satz von Stokes

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.6.1).

17 Glossar

Im Glossar können die wichtigsten mathematischen Begrifflichkeiten nachgeschlagen werden. Dabei gibt der Pfeil hinter einem Wort an, unter welchem Begriff mehr Informationen zu finden ist. Befindet sich kein Wort hinter dem Pfeil kann direkt das vorangegangene Wort gesucht werden.

Ableitung: Die Ableitung ist eine Funktion $f(x)$ auf die der Differentialoperator gewirkt hat und wird mit $f'(x)$ gekennzeichnet.
Abstand: Der Abstand ist die kürzeste Strecke ($\longrightarrow$) zwischen zwei Punkten ($\longrightarrow$) und ist immer positiv.
Abszisse: Die Abszisse ist im Koordinatensystem ($\longrightarrow$) die Achse auf der die Variablenwerte ($\longrightarrow$) zu finden sind.
Addition: Bei der Addition werden Summanden ($\longrightarrow$) zu einer Summe ($\longrightarrow$) zusammengezählt mit dem Operator + ($\longrightarrow$) .
Ankathete: Die Ankathete ist die Kathete ($\longrightarrow$), die sich direkt am Winkel ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) befindet.
Äquivalenzumformung: Die Äquivalenzumformung ist die Methode der Algebra ($\longrightarrow$) um Gleichungen ($\longrightarrow$) zu lösen, dabei bedient sie sich der Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).
Algebra: Die Algebra ist ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit dem lösen von Gleichungen ($\longrightarrow$). Dazu bedient sie sich der Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) und den Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).
Analysis: Die Analysis bildet ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit den Eigenschaften von Funktionen ($\longrightarrow$).
Assoziativ: Rechnungen bei denen Klammern ($\longrightarrow$ Ausmultiplizieren) nach belieben setzen kann ohne das sich das sich das Ergebnis ändert sind assoziativ.
Ausklammern: Es ist möglich Klammern zusetzen, indem gleiche Vorfaktoren ($\longrightarrow$ Koeffizienten) von mehreren Summanden ($\longrightarrow$) als Faktor ($\longrightarrow$) vor einer Klammer ($\longrightarrow$ assoziativ) gesetzt werden.
Ausmultiplizieren: Klammern können ausmultipliziert werden, dabei wirkt der Faktor ($\longrightarrow$) außerhalb der Klammern auf jeden Summanden ($\longrightarrow$) in den Klammern ($\longrightarrow$ assoziativ).

Basis: Wenn eine Term ($\longrightarrow$) mehrfach mit sich selbst multipliziert ($\longrightarrow$) wird, dann bildet der Term die Basis, während die Anzahl der Multiplikationen durch den Exponenten ($\longrightarrow$) beziehungsweise der Potenz ($\longrightarrow$) beschrieben wird.
Betrag: Der Betrag sorgt dafür, dass ein positives Ergebnis erzeugt wird.
Binomialkoeffizient: Die Binomialkoeffizienten sind eine verkürzte Schreibweise von Brüchen ($\longrightarrow$) aus Fakultäten ($\longrightarrow$).
Bogenmaß: Das Bogenmaß hat die Einheit Radiant ($\longrightarrow$) und kann aus der Einheit Grad ($\longrightarrow$) bestimmt werden.

Bruch: Ein Bruch besteht aus einem Zähler ($\longrightarrow$) und einem Nenner ($\longrightarrow$) und kann in eine Dezimalzahl ($\longrightarrow$) umgewandelt werden.

Darstellung (Zahl): Eine Zahl ($\longrightarrow$) kann verschieden dargestellt werden, so ist zum Beispiel: $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ($\longrightarrow$ Bruch).
Definition: Die Definition bildet den Anfang jeglicher Mathematik, da sie die wichtigsten Regeln festlegt.
Definitionslücke: Wenn eine Funktion ($\longrightarrow$) an einem Punkt ($\longrightarrow$) nicht definiert ($\longrightarrow$) ist und es sich dabei nicht um eine Polstelle ($\longrightarrow$) handelt, wird dies Definitionslücke genannt. Sie treten oftmals bei unecht gebrochen rationalen Funktionen auf.
Definitionsmenge: Die Definitionsmenge gibt an für welche Werte einer Variablen ($\longrightarrow$) die Gleichung ($\longrightarrow$) oder Funktion ($\longrightarrow$) berechenbar ist.
Dezimalzahlen: Ein Bruch ($\longrightarrow$) kann in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Dabei handelt es sich um eine andere Darstellung ($\longrightarrow$).
Diagonale: Diagonalen sind Strecken ($\longrightarrow$) zwischen gegenüberliegenden Eckpunkten ($\longrightarrow$) bei einem geometrischen Körper ($\longrightarrow$ Geometrie).
Differentialoperator: Der Differentialoperator wirkt nur nach rechts und kommt in zwei Formen ($\longrightarrow$ Differentiation) vor. Um mit ihm zu rechnen wird der Kommutator ($\longrightarrow$) benutzt. Wirkt ein Differentialoperator auf eine Funktion ($\longrightarrow$) wird die Ableitung ($\longrightarrow$) gebildet. Die Differentialoperatoren nehmen einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.
Differentiation (partiell): Bei der partiellen Differentiation werden Unterabhängigkeiten nicht berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{\partial}{\partial x}$.
Differentiation (total): Bei der totalen Differentiation werden Unterabhängigkeiten berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{d}{dx}$.
Differenz: Die Differenz ist das Ergebnis einer Subtraktion ($\longrightarrow$).
Differenz (Mengen): Der Mengenoperator ($\longrightarrow$) Differenz wird auch als „Eine Menge ($\longrightarrow$) *ohne* einer anderen Menge “ gelesen.
Dimension: Die Anzahl von Dimensionen gibt die Ausbreitung von Objekten an und ist ein zentraler Begriff der Geometrie ($\longrightarrow$).
Distributivgesetz: Das Distributivgesetz beschreibt eine Rechenvorschrift für die Multiplikation ($\longrightarrow$) bei der mindestens ein Faktor ($\longrightarrow$) mittels Klammern ($\longrightarrow$) auf Summanden ($\longrightarrow$) besteht.
Division: Bei der Division wird eine Zahl ($\longrightarrow$) oder ein Term ($\longrightarrow$) ($\longrightarrow$ Dividend) durch eine andere Zahl oder einen anderen Term ($\longrightarrow$ Divisor) geteilt und bilden den Quotienten ($\longrightarrow$).
Divisor: Der Divisor ist eine Zahl ($\longrightarrow$) oder ein Term ($\longrightarrow$) durch den geteilt wird. Bei Brüchen ($\longrightarrow$) wird der Divisor auch Nenner ($\longrightarrow$) genannt.
Dividend: Der Dividend ist eine Zahl ($\longrightarrow$) oder ein Term ($\longrightarrow$) der geteilt durch den Divisor ($\longrightarrow$) wird. Bei Brüchen ($\longrightarrow$) wird der Divisor auch Nenner ($\longrightarrow$) genannt.
Drachen: Der Drachen ist ein spezielles Viereck ($\longrightarrow$ Rechteck), dass zwei gegenüberliegende gleich große Winkel ($\longrightarrow$) besitzt. Die Schenkel ($\longrightarrow$) der anderen Winkel sind jeweils gleichlang.
Dreieck: Ein Dreieck besteht aus drei Ecken ($\longrightarrow$) und drei Seiten ($\longrightarrow$). Es besitzt eine Winkelsumme ($\longrightarrow$) von 180 Grad ($\longrightarrow$).

-rechtwinkliges: Beim rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel ein rechter Winkel ($\longrightarrow$). Die gegenüberliegende Seite ($\longrightarrow$) wird Hypotenuse ($\longrightarrow$) genannt.

-gleichschenkliges: Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Winkel ($\longrightarrow$) gleich groß und zwei Seiten ($\longrightarrow$) gleich lang.

-gleichseitiges: Bei einem gleichseitigen Dreieck besitzen alle Winkel (⟶) 60 Grad (⟶) und alle Seiten (⟶) sind gleich lang.
Dreisatz: Der Dreisatz wird benutzt um Prozentanteile (⟶) einer Zahl (⟶) zu bestimmen.
Durchmesser: Der Durchmesser ist die Strecke (⟶) von einem Punkt (⟶) am Kreisbogen (⟶) durch den Mittelpunkt (⟶) bis zum gegenüberliegenden Punkt auf dem Kreisbogen. Dabei ist der Durchmesser doppelt so groß wie der Radius (⟶).
Durchschnitt: Der Mengenoperator (⟶) Durchschnitt bestimmt die Zahlen (⟶), welche sich sowohl in einer Menge (⟶) als auch in einer anderen Menge befinden.

Ebene: Eine Ebene ist ein Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches nicht begrenzt ist.
Ecke: An einer Ecke treffen sich zwei Strecken (⟶) in einem Punkt (⟶), sodass sie einen Winkel (⟶) ungleich von 180 Grad (⟶) zu einander haben.
Eindeutigkeit: Eindeutigkeit ist die Forderung, dass zu jedem Variablenwert (⟶) nur ein Funktionswert (⟶) existiert. Erst wenn eine Funktion (⟶) eindeutig ist, ist sie auch tatsächlich eine Funktion.
Einheitskreis: Der Einheitskreis ist ein Kreis (⟶) mit Radius (⟶) $r = 1$.
Einsetzungsverfahren: Um Gleichungen (⟶) nutzen zu können, müssen Werte oder Terme (⟶) in sie eingesetzt werden. Dies wird das Einsetzungsverfahren genannt.
Element: Befindet sich eine Zahl (⟶) in einer Menge (⟶), dann ist sie Element der Menge.
Ellipse: Die Ellipse ist ein Kreis (⟶), der nicht immer den gleichen Radius (⟶) besitzt. Dabei ist die Ellipse immer symmetrisch (⟶) bezüglich zwei Achsen (⟶).
Euler'sche Zahl: $e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 95\ldots$
Euler'sche Gerade: Auf der Euler'schen Geraden (⟶ Gerade) liegen die Schnittpunkte (⟶) der Höhen (⟶), der Mittelsenkrechten (⟶) und der Seitenhalbierenden (⟶) mit einem Abstandsverhältnis (⟶) von eins zu zwei.
Erweitern: Brüche (⟶) können durch Erweitern in eine andere Darstellung (⟶) überführt werden, sodass mit ihr die Addition (⟶) oder Subtraktion (⟶) leichter durchgeführt werden können.
Exponent: Ein Exponent gibt an wie oft eine Basis (⟶) mit sich selbst multipliziert (⟶) wird.
Exponentialfunktion: Bei der Exponentialfunktion steht im Exponenten (⟶) die Variable (⟶). Die bedeutendste Funktion (⟶) dieser Art hat die Euler'sche Zahl (⟶) zur Basis (⟶).
Extremstelle: Extremstellen einer Funktion (⟶) sind Minimum (⟶) oder Maximum (⟶) und besitzen eine Tangente mit der Steigung (⟶) gleich Null.

Faktor: Bei der Multiplikation (⟶) werden Faktoren miteinander verrechnet.
Fakultät: Die Fakultät ist eine Abkürzung einer Kette von Multiplikationen (⟶), wobei zum Beispiel $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist und per Definition (⟶) $0! := 1$ gilt.
Fläche: Eine Fläche ist ein geometrisches (⟶) Objekt welches einen Rand (⟶) besitzt.
Flächeninhalt: Der Flächeninhalt gibt an wieviele Quadratmeter (⟶) in eine Fläche (⟶) passen.
Funktion: Eine Funktion bildet eine Zahl (⟶) auf eine andere Zahl ab und muss dabei eindeutig (⟶) sein. Sie besitzen immer eine Definitions- (⟶) und Wertemenge (⟶).

-echt gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Polstellen (⟶), da sie für einige Zahlen (⟶) nicht definiert (⟶) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision (⟶).

-unecht gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Definitionslücken (⟶),

da sie nur aufgrund ihrer Darstellung (⟶) für einige Zahlen (⟶) nicht definiert (⟶) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision (⟶).
Funktionswert: Der Funktionswert ist das Ergebnis nachdem ein Variablenwert (⟶) in die Funktionsgleichung (⟶) eingesetzt (⟶) wurde.

Ganze Zahlen: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist die Zahlenmenge (⟶) aller negativer Zahlen (⟶). Die natürlichen Zahlen (⟶) bilden dabei eine Teilmenge (⟶) der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
Gegenkathete: Die Gegenkathete ist die Kathete (⟶), die sich gegenüber des betrachteten Winkel (⟶) eines rechtwinkligen Dreiecks (⟶) befindet.
Geometrie: Die Geometrie beschäftigt sich mit Formen wie Rechtecke (⟶), Kreisen (⟶), Quadern (⟶), Pyramiden (⟶), Zylindern (⟶) und vielem mehr. Dabei sind je nach Anzahl der Dimensionen (⟶) die gefragten Größen (⟶): Winkel (⟶), Streckenlänge (⟶), Umfang (⟶), Flächeninhalt (⟶), Oberfläche (⟶) oder Volumen (⟶).
Gerade: Eine Gerade (⟶) ist eine Funktion (⟶) erster Ordnung (⟶) und besitzt keinen Anfang und kein Ende. Sie wird beschreiben durch die Steigung (⟶) und dem Ordinatenschnittpunkt (⟶).
Gleichung: Eine Gleichung stellt einen Bezug zwischen Zahlen (⟶), Parametern (⟶), Variablen (⟶) und Funktionen (⟶) auf.
Grad: Grad ist die Einheit von Winkeln (⟶). Dabei hat ein Kreis (⟶) 360°.
Graph: Ein Graph ist die graphische Veranschaulichung einer Funktion (⟶) in einem Koordinatensystem (⟶).
Grenzen: Grenzen geben zum Beispiel die Größe eines Intervalls (⟶) oder den Bereich eines Integrals (⟶) an.
Grenzwerte: Grenzwerte beschreiben ein Verhalten eines Terms (⟶) oder einer Funktion (⟶) in der Nähe von Definitionslücken (⟶), Polstellen (⟶) oder besonders hohen oder niedrigen Zahlen (⟶).
Größe: Eine Größe kann ein Parameter (⟶) oder eine Variable (⟶) sein.
Grundfläche: Bei geometrischen (⟶) Objekten in drei Dimensionen (⟶) bildet die Grundfläche (⟶ Flächeninhalt) mit der Höhe (⟶) eine Beziehung zum Volumen (⟶).
Grundseite: Bei geometrischen (⟶) Objekten in zwei Dimensionen (⟶) bildet die Grundseite (⟶ Seite) mit der Höhe (⟶) eine Beziehung zum Flächeninhalt (⟶).

Halbgerade: Eine Halbgrade besitzt einen Anfang aber kein Ende.
Höhe: Die Höhe spielt in der Geometrie (⟶) eine besonders bedeutende Rolle, da je nach Anzahl der Dimensionen (⟶), sie einen Bezug zu den gesuchten Größen (⟶) darstellt.
Höhensatz von Euklid: Der Höhensatz von Euklid beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Höhe (⟶) eines rechtwinkligen Dreiecks (⟶) und der unterteilten Hypotenuse $c = p + q$ (⟶). Hierbei gilt $h^2 = qp$.
Hyperbel: Die Hyperbel ist eine Funktion (⟶) bei der sich die Variable (⟶) im Nenner (⟶) befindet. Sie besitzt eine Polstelle (⟶).
Hypotenuse: Die Hypotenuse ist die längste Seite (⟶) eines rechtwinkligen Dreiecks (⟶) und liegt gegenüber vom rechten Winkel (⟶).

Index: Ein Index gibt zusätzliche Informationen bei einen Parameter (⟶), einer Variable (⟶) oder einer Funktion (⟶) an. In der Regel hat dieser keinen Einfluss auf Rechnungen.
Innenkreis: Der Innenkreis ist ein Kreis (⟶) der alle Seiten eines Dreiecks (⟶) tangiert (⟶) und den Schnittpunkt (⟶) der Winkelhalbierenden (⟶) als Mittelpunkt (⟶) besitzt.

Integral: Das Integral bildet den Operator ($\longrightarrow$), um die Stammfunktion ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) zu bestimmen. Mit der Stammfunktion kann der Flächeninhalt ($\longrightarrow$) unter einem Graphen ($\longrightarrow$) bestimmt werden.
Integration: Die Integration wir durch das Integral ($\longrightarrow$) beschrieben und nimmt einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.

-partielle: Die partielle Integration wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von einem Produkt ($\longrightarrow$) von Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.

-durch Substitution: Die Integration durch Substitution ($\longrightarrow$) wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von verketteten ($\longrightarrow$ Kettenregel) Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.
Intervall: Ein Intervall beherbergt eine Menge ($\longrightarrow$) von Zahlen ($\longrightarrow$). Dabei gibt es verschiedene Arten von Grenzen ($\longrightarrow$), sodass die Grenzen zur Menge gehören (inklusive) oder gegebenenfalls nicht (exklusiv).
Iterativ: Ein iteratives Verfahren ist eine schrittweise Annäherung an das richtige Ergebnis und wird oftmals bei besonders komplexen Rechnungen zur Vereinfachung benutzt ($\longrightarrow$ Reihen).

Kanten: Als Kanten werden bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) die Strecken ($\longrightarrow$) zwischen Eckpunkten ($\longrightarrow$) bezeichnet.
Kathete: In einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) heißen die Schenkel ($\longrightarrow$) vom rechten Winkel ($\longrightarrow$) Katheten .
Kathetensatz: Bei einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) gilt, dass die Hypotenuse ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) mit einem durch die Höhe ($\longrightarrow$) geteilten Teilstück der Hypotenuse gleich der gegenüberliegenden Kathetenlänge ($\longrightarrow$) zum Quadrat ist.
Kegel: Der Kegel besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und läuft in einem Punkt ($\longrightarrow$) in einer bestimmten Höhe ($\longrightarrow$) zusammen. Ein Kegel besitzt eine Kante ($\longrightarrow$) und einen Eckpunkt ($\longrightarrow$).
Kegelstumpf: Ein Kegelstumpf besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und einen gegenüberliegenden kleineren Kreis sowie eine Höhe ($\longrightarrow$). Dies sieht so aus als ob von einem großen Kegel ($\longrightarrow$) die Spitze abgetrennt wurde.
Kehrwert: Bei der Bildung des Kehrwerts in der Bruchrechnung ($\longrightarrow$) werden Nenner ($\longrightarrow$) und Zähler ($\longrightarrow$) vertauscht.
Kettenregel: Bei der Kettenregel werden Funktionen ($\longrightarrow$), in denen sich wiederum Funktionen befinden abgeleitet ($\longrightarrow$).
Koeffizient: Koeffizienten sind Parameter ($\longrightarrow$) oder Zahlen ($\longrightarrow$) die an einer Variable ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) sind.
Komplexe Zahlen: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden die letzte Erweiterung der Zahlenmengen ($\longrightarrow$) durch die Zahl ($\longrightarrow$) $i = \sqrt{-1}$ und spannen dabei einen Zahlenstrahl ($\longrightarrow$) auf der orthogonal ($\longrightarrow$) zu den reellen Zahlen ($\longrightarrow$) steht.
Kommandostrich: Der Kommandostrich befindet sich hinter einer Gleichung ($\longrightarrow$), die mittels Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) algebraisch ($\longrightarrow$) verändert wird. Dabei wird hinter dem Kommandostrich stets der nächste Rechenschritt angegeben.
Kommutativ: Als kommutativ werden alle Rechnungen bezeichnet, bei denen die Reihenfolge vor oder hinter dem Operator ($\longrightarrow$), das Ergebnis nicht verändert. Dies kann über den Kommutator ($\longrightarrow$) bestimmt werden.
Kommutator: Der Kommutator dient zur Überprüfung des Kommutativgesetzes ($\longrightarrow$). Dabei wird der zu überprüfende Operator ($\longrightarrow$) anstelle des Kommas des Kommutators $[a, b]$ geschrieben. Dabei gilt zum Beispiel für die Multiplikation ($\longrightarrow$) $[a.b] = a \cdot b - b \cdot a$.
Koordinatensystem: Im Koordinatensystem können Punkt ($\longrightarrow$) und Graphen ($\longrightarrow$) einge-

tragen werden. Es besteht aus der Ordinate (⟶) und der Abszisse (⟶).
Kosinus: Der Kosinus ist eine trigonometrische (⟶) Funktion (⟶), die einen verschobenen Sinus (⟶) darstellt.
Kotangens: Der Kotangens ist der Kehrwert (⟶) vom Tangens (⟶).
Kreis: Ein Kreis ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), das durch die Kreiszahl (⟶) beschrieben wird.
Kreisabschnitt: Der Kreisabschnitt ist ein Kreisstück (⟶), dass durch eine Sekante (⟶) abgeschnitten wurde.
Kreisausschnitt: Der Kreisausschnitt ist ein Bruchteil (⟶) eines Kreises (⟶).
Kreisbogen: Der Kreisbogen ist ein Teil des Umfangs (⟶) des Kreises (⟶).
Kreiszahl: $\pi = 3,14159265359$
Kubisch: Als kubisch werden Größen (⟶) und Objekte in drei Dimensionen (⟶), wie der Würfel (⟶), bezeichnet.
Kugel: Die Kugel ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶), dass radialsymmetrisch (⟶) mit einem Radius (⟶) ist. Eine Kugel besitzt keine Kanten (⟶) oder Ecken (⟶).
Kugelabschnitt: Der Kugelabschnitt ist ein Teilstück der Kugel (⟶), dass durch eine Ebene (⟶) abgeschnitten wurde.
Kugelausschnitt: Der Kugelausschnitt ist im Wesentlichen ein Bruchteil (⟶) einer Kugel (⟶).
Kürzen: Brüche (⟶) können oftmals gekürzt werden, was bedeutet, dass der Zähler (⟶) und der Nenner (⟶) durch etwas gleiches dividierbar (⟶) sind.

Logarithmus: Der Logarithmus wird benutzt um nach einem Exponenten (⟶) bei der Äquivalenzumformung (⟶) aufzulösen. Er bildet die Umkehrfunktion (⟶) zur Exponentialfunktion (⟶).
Leibnizregel: siehe Produktregel (⟶).

Mantelfläche: Die Mantelfläche ist die Oberfläche (⟶) ohne die Grundfläche (⟶).
Maximum: Ein Maximum ist ein Punkt (⟶) einer Funktion (⟶) mit einer Tangente (⟶) mit der Steigung (⟶) gleich Null. Wobei sich der Graph (⟶) stets unterhalb der Tangente befindet.
Mengen: Mengen sind zusammengefasste Zahlen (⟶). Wenn alle Zahlen einer Art in einer Menge vorhanden sind, ist die Rede von Zahlenmengen (⟶).
Mengenoperatoren: Mengenoperatoren ermöglichen das Rechnen mit Mengen (⟶). Siehe dazu Differenz (⟶), Durchschnitt (⟶) und Vereinigung (⟶).
Minimum: Ein Minimum ist ein Punkt (⟶) einer Funktion (⟶) mit einer Tangente (⟶) mit der Steigung (⟶) gleich Null. Wobei sich der Graph (⟶) stets oberhalb der Tangente befindet.
Minuend: Der Minuend ist bei der Subtraktion (⟶) der Term (⟶) von dem der Subtrahend (⟶) abgezogen wird.
Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade (⟶), die orthogonal (⟶) zur betrachten Seite (⟶) ist. Dabei ist der Schnittpunkt (⟶) der Seite und der Geraden direkt in der Mitte der Strecke.
Mittelwert: Der Mittelwert kann gebildet werden, indem alle Zahlen (⟶) aufaddiert (⟶) und durch die Anzahl der Zahlen dividiert (⟶) werden.
Multiplikation: Bei der Multiplikation werden Faktoren (⟶) miteinander verrechnet und bilden das Produkt (⟶).

Natürliche Zahlen: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine Zahlenmenge (⟶) mit den Zahlen (⟶) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Nenner: Der Nenner ist bei der Bruchrechnung (⟶) der Divisor.
Netz: Ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) kann aufgeklappt werden, sodass die Flächen (⟶) nebeneinander liegen. Dieses neue zweidimensionale Objekt aus Flächen wird Netz genannt.
Neutrales Element: Als neutrales Element werden Zahlen (⟶) bezeichnet, die bei einer Operation (⟶) das Ergebnis nicht verändern. Die Null ist das neutrale Element der Addition (⟶) und die Eins das neutrale Element der Multiplikation (⟶).
Nullstellen: Als Nullstellen werden die Punkte (⟶) bezeichnet, in denen der Graph (⟶) die Abszisse (⟶) schneidet.

Oberfläche: Alle Flächen (⟶) eines Netzes (⟶) aufaddiert (⟶) heißen zusammen Oberfläche.
Offset: siehe Ordinatenschnittpunkt (⟶).
Operation: Als Operation wird eine Rechnung bezeichnet, die durchgeführt wird.
Operator: Der Operator gibt eine Anweisung für eine Operation (⟶).
Ordinate: Die Ordinate ist der Zahlenstrahl (⟶) im Koordinatensystem (⟶), der sich orthogonal (⟶) zur Abszisse (⟶) befindet. Auf ihm sind die Funktionswerte (⟶) zu finden.
Ordinatenschnittpunkt: Der Ordinatenschnittpunkt ist der Punkt, an dem sich Graph (⟶) und Ordinate (⟶) schneiden.
Ordnung: Die Ordnung eines Polynoms (⟶) oder einer Funktion (⟶) ist gegeben durch die höchste Potenz (⟶) einer Variable (⟶).
Orthogonalität: Haben zwei Strecken (⟶), Halbgeraden (⟶), Geraden (⟶) oder sonstige Objekte einen rechten Winkel (⟶) zu einander, dann wird von Orthogonalität gesprochen.

Parabel: Die Parabel ist eine Funktion (⟶) zweiter Ordnung (⟶). Sie besitzt einen Scheitelpunkt (⟶), der gleichzeitig ein Extrempunkt (⟶) ist. Sie wird außerdem noch beschrieben durch den Ordinatenschnittpunkt (⟶) und der Stauchung (⟶).
Parallelität: Wenn zeig Strecken (⟶), Halbgeraden (⟶) oder Geraden (⟶) immer den gleichen Abstand (⟶) zu einander besitzen, dann sind die parallel zu einander.
Parallelogramm: Ein Parallelogramm ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶). Wobei die gegen überliegenden Seiten (⟶) parallel (⟶) zu einander sein müssen. Außerdem sind die gegenüberliegenden Seiten (⟶) gleich lang und Winkel (⟶) gleich groß.
Parameter: Ein Parameter ist ein Platzhalter für eine Zahl (⟶).
Pascal'sches Dreieck: Das Pascal'sche Dreieck gibt an wie sich die Koeffizienten (⟶) von binomischen Formel (⟶) mit höherer Potenz (⟶) verhalten.
Periodizität: Wiederholt sich ein Muster bei einer Zahl oder der Graph fortlaufend, dann wird von Periodizität gesprochen.
Primzahlen: Die Primzahlen sind die Zahlenmenge (⟶) aller natürlichen Zahlen (⟶), die nur durch sich selbst oder eins dividierbar (⟶) sind.
Produktregel: Die Produktregel dient dazu die Ableitung (⟶) von einem Produkt (⟶) von Funktionen (⟶) zu bilden.
Polstelle: Eine Polstelle einer Funktion (⟶) beschriebt ein extremales Verhalten in der Nähe einer Lücke der Definitionsmenge (⟶) und tritt in der Regel bei echt gebrochen rationalen Funktionen auf.
Polynom: Ein Polynom ist eine Summe (⟶) von verschiedenen Potenzen (⟶) einer Varia-

ble (⟶) mit ihren jeweiligen Koeffizienten (⟶).
Polynomdivision: Die Polynomdivision dient dazu zu überprüfen, ob es sich um eine echt oder unecht gebrochen rationale Funktion (⟶) handelt und wird wie die schriftliche Division (⟶) gehandhabt.
Potenz: Die Potenz einer Größe (⟶) ist die Zahl (⟶) wie oft die Größe mit sich selbst multipliziert (⟶) wird.
Prisma: Ein Prisma ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) mit eckiger Grundfläche (⟶). Dabei ist die Grundfläche gegenüberliegend wieder vorzufinden mit einen Abstand (⟶) der Höhe (⟶).
Produkt: Das Produkt ist das Ergebnis der Multiplikation (⟶).
Prozent: $\frac{1}{100} = 1\%$ (⟶ Bruch).
Punkt: Ein Punkt in einem Koordinatensystem (⟶) in zwei Dimensionen (⟶) wird beschrieben durch den Variablenwert (⟶) und Funktionswert (⟶).
Pyramide: Eine Pyramide ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) mit einer Grundfläche (⟶). Diese läuft in einer Höhe (⟶) spitz zusammen. Eine Pyramide besitzt fünf Seiten (⟶), fünf Ecken (⟶) und acht Kanten (⟶).
Pyramidenstumpf: Bei einem Pyramidenstumpf wurde von einer Pyramide (⟶) die Spitze parallel (⟶) zur Grundfläche (⟶) abgeschnitten.

Quader: Ein Quader ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶), dessen parallelen (⟶) Kanten (⟶) gleich lang sind. Alle Seiten (⟶) sind Rechtecke (⟶), wobei die gegenüberliegenden gleichgroß sind. Ansonsten besitzt der Quader die gleichen Eigenschaften wie der Würfel (⟶), der ein Spezialfall des Quaders ist.
Quadrant: In einem Koordinatensystem (⟶) gibt es vier Quadranten, die durch die Ordinate (⟶) und Abszisse (⟶) unterteilt sind.
Quadrat: Ein Quadrat ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass alle Winkel (⟶) rechte Winkel sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Quadratische Ergänzung: Die quadratische Ergänzung ist ein Mittel der Algebra (⟶) um Gleichungen (⟶) zu lösen. Dabei wird mithilfe des neutralen Elements (⟶) eine binomische Formel (⟶) erzeugt.
Quadratmeter: Ein Quadratmeter bildet die Einheit der Flächenberechnung (⟶) und beschreibt wieviele Quadrate (⟶) mit einem Meter mal einem Meter in ein geometrisches (⟶) Objekt passen.
Quotient: Der Quotient ist das Ergebnis der Division (⟶).

Radiant: Radiant ist die Einheit von Winkeln (⟶) in Bogenmaß (⟶). Dabei gilt: $2\pi rad = 360°$.
Radius: Der Radius ist der Abstand (⟶) des Kreisbogens (⟶) zum Mittelpunkt (⟶) eines Kreises (⟶).
Rand: Der Rand ist in der Geometrie (⟶) die Begrenzung eines Objekts.
Rationale Zahlen: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind eine Zahlenmenge (⟶) aller Zahlen (⟶) die durch einen Bruch (⟶) dargestellt (⟶) werden können.
Raute: Die Raute ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass die gegenüberliegenden Winkel (⟶) gleich groß sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Reelle Zahlen: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle Zahlen (⟶) der Zahlenmenge (⟶) ohne die komplexen Zahlen (⟶).

Reihe: Eine Reihe ist eine verkürzte Schreibweise einer langen Reihe von Additionen (⟶) oder Multiplikationen (⟶).

-Summenreihe: Die Summenreihe beschreibt eine Kette von Additionen (⟶).

-Produktreihe: Die Produktreihe beschreibt eine Kette von Multiplikationen (⟶).

-Taylorreihe: Die Taylorreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch Ableitungen (⟶) sich einer Funktion (⟶) anzunähern.

-Fourierreihe: Die Fourierreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch trigonometrische (⟶) Funktionen (⟶) sich einer periodischen (⟶) Funktion anzunähern.

Rest: Bei einer Division (⟶) mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (⟶) kann eine Zahl (⟶) nicht dividierbar durch den Divisor (⟶) sein. Diese Zahl wird Rest genannt.

Runden: Das Runden dient zur besseren Präsentation von Ergebnissen.

Satz: Ein Satz ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der nahezu immer gilt.

Satz des Pythagoras: Der Satz des Pythagoras stellt einen Zusammenhang zwischen den Katheten (⟶) und der Hypotenuse (⟶) eines rechtwinkligen Dreiecks (⟶) auf.

Satz von Cavallerie: Der Satz von Cavallerie sagt aus, dass das Volumen (⟶) von zwei geometrischen (⟶) Objekten gleich ist, wenn sie in jeder Höhe (⟶) den gleichen Flächeninhalt (⟶) besitzen.

Scheitelpunkt: Der Scheitelpunkt einer Parabel (⟶) ist der Punkt (⟶), an dem eine Tangente (⟶) mit der Steigung (⟶) gleich Null angelegt werden kann.

Schenkel: Schenkel sind die Strecken (⟶) oder Halbgeraden (⟶) die von einem Schnittpunkt (⟶) bezüglich des betrachteten Winkels (⟶) ausgehen.

Schwerpunkt: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt (⟶) der Seitenhalbierenden (⟶).

Seite: Eine Seite ist bei einem geometrischen (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶) eine Strecke (⟶) zwischen zwei Eckpunkten (⟶). Während in drei Dimensionen oftmals damit eine Fläche (⟶) gemeint ist.

Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierden ist eine Gerade (⟶) durch die Mitte einer Seite (⟶) und dem gegenüberliegenden Punkt (⟶).

Sekante: Eine Sekante ist eine Gerade (⟶), die ein geometrisches (⟶) Objekt genau zwei mal schneidet.

Sinus: Der Sinus ist eine trigonometrische (⟶) Funktion (⟶), die durch den Quotient (⟶) Gegenkathete (⟶) durch Hypotenuse (⟶) bei einem rechtwinkligen Dreieck (⟶) beschrieben wird.

Spiegelung: Eine Spiegelung kann an einer Geraden (⟶) oder einem Punkt (⟶) durch geführt werden, dabei wird das geometrische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) neu abgebildet, wobei der Abstand (⟶) zum Punkt (⟶) oder zur Geraden (⟶) gleich bleiben muss, sich allerdings auf der anderen Seite befindet.

Stammfunktion: Die Stammfunktion ist die integrierte (⟶) Funktion (⟶).

Stauchungsparameter: Der Stauchungsparameter ist ein Koeffizient (⟶) der die Steigung (⟶) von Funktionen (⟶) beeinflusst.

Steigung: Die Steigung gibt an um wieviel sich der Funktionswert (⟶) erhöhen würde bei einem weiteren Schritt beim Variablenwert (⟶).

Strecke: Eine Strecke ist beschreibt einen Abstand (⟶) zwischen zwei Punkten (⟶).

Substitution: Die Substitution ist die Umkehrung des Einsetzverfahren (⟶).

Subtrahend: Von einem Subtrahenden wird bei der Subtraktion (⟶) abgezogen.

Subtraktion: Bei der Subtraktion wird von einem Subtrahend (⟶) der Minuend (⟶) abgezogen und der Ergebnis wird Differenz (⟶) genannt.

Summand: Wenn Summanden zusammengezählt werden entsteht die Summe (⟶). Diese

Rechnung wird Addition (⟶) genannt.
Summe: Die Summe ist das Ergebnis der Addition (⟶) von Summanden (⟶).
Symmetrie: Es wird von einer Symmetrie gesprochen wenn nach einer Spiegelung (⟶) sich das geometrische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) nicht verändert hat.

-Achsensymmetrie: Spiegelung (⟶) an einer Geraden (⟶) ohne Veränderung wird achsensymmetrisch genannt.

-Punktsymmetrie: Spiegelung (⟶) an einem Punkt (⟶) ohne Veränderung wird punktsymmetrisch genannt.

-Radiale Symmetrie: Drehung um einen beliebigen Winkel (⟶) ohne Veränderung wird radialsymmetrisch genannt.

Tangens: Der Tangens ist der Quotient (⟶) von Sinus (⟶) durch Kosinus (⟶).
Tangente: Eine Tangente berührt aber schneidet ein geometrisches (⟶) Objekt oder einen Graphen (⟶) nicht.
Teilmengen: Eine Teilmenge ist ein Teil einer anderen Menge (⟶).
Term: Ein Term ist ein Block von Operationen (⟶).
Tetraeder: Ein Tetraeder ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶) mit vier Eckpunkten (⟶), sechs Kanten (⟶) und vier Seiten (⟶), die jeweils gleichschenklige Dreiecke (⟶) sind.
Theorem: Ein Theorem ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der immer gilt.
Trapez: Ein Trapez ist ein Viereck (⟶ Rechteck), dass zwei parallel Seiten besitzt.
Trigonometrie: Die Trigonometrie stellt werden Zusammenhang zwischen Winkeln (⟶) und Seitenlängen (⟶) auf.

Unbekannte: siehe Parameter (⟶) und Variable (⟶).
Umfang: Der Umfang eines geometrischen (⟶) Objekts in zwei Dimensionen (⟶) ist gegeben als die Summe (⟶) der Strecken (⟶) des Randes (⟶).
Umkehrfunktion: Zu jeder Funktion (⟶) gibt es eine Umkehrfunktion, die die Funktion wieder aufhebt.
Umkreis: Der Umkreis ist ein Kreis (⟶) der alle Eckpunkte eines Dreiecks (⟶) schneidet mit dem Mittelpunkt (⟶) der Schnittpunkt (⟶) der Mittelsenkrechten (⟶) entspricht.

Variable: Eine Variable ist eine Veränderlich und beschreibt bei einer Funktion (⟶) alle Zahlen (⟶) der Definitionsmenge (⟶).
Variablenwert: Der Variablenwert ist ein spezieller Wert einer Variablen (⟶) und wird auf der Abszisse (⟶) gefunden.
Vereinigung: Die Vereinigung ist ein Mengenoperator (⟶), der die Zahlen (⟶) von zwei Mengen (⟶) zusammenfasst.
Vorfaktor: siehe Koeffizient (⟶).
Volumen: Das Volumen ist eine Größe (⟶) in drei Dimensionen (⟶) und wird von Flächen (⟶) umrandet (⟶). Das Volumen beschreibt wieviele Würfel (⟶) mit der Kantenlänge (⟶) von einem Meter in ein geometrisches (⟶) Objekt passen.

Wendestelle: Die Wendestelle einer Funktion (⟶) beschreibt den Punkt (⟶), an dem die Steigungsänderung (⟶) ihr Vorzeichen wechselt.
Wertemenge: Alle Funktionswerte (⟶) werden in der Wertemenge zusammengefasst.
Wertepaar: Zu jedem Variablenwert (⟶) passt genau ein Funktionswert (⟶). Diese beiden Werte bilden ein Wertepaar.

Wertetabelle: In einer Wertetabelle können Wertepaare (⟶) berechnet werden.
Winkel: Ein Winkel beschreibt wie groß der Anteil eines Kreises (⟶) zwischen zwei Strecken (⟶) oder Halbgeraden (⟶) ist.
-überspitz: Als überspitzer Winkel wird ein Winkel zwischen 0° und 45° bezeichnet.
-spitz: Als spitzer Winkel wird ein Winkel zwischen 45° und 90° bezeichnet.
-recht: Als rechter Winkel wird ein Winkel von genau 90° bezeichnet.
-stumpf: Als stumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen 90° und 180° bezeichnet.
-gestreckt: Als gestreckter Winkel wird ein Winkel von genau 180° bezeichnet.
-überstumpf: Als überstumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen 180° und 360° bezeichnet.
-voll: Als voller Winkel wird ein Winkel von genau 360° bezeichnet.
Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende ist eine Gerade (⟶), die einen Winkel (⟶) genau halbiert.
Winkelsumme: Die Winkelsumme ist die Summe (⟶) aller Winkel (⟶) in einem geometrischen (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶).
Würfel: Ein Würfel besitzt acht Ecken (⟶), zwölf Kanten (⟶) und sechs Seiten (⟶). Alle Seiten sind gleich lang und haben einen rechten Winkel (⟶) zu einander. Der Würfel ist ein geometrisches (⟶) Objekt in drei Dimensionen (⟶).
Wurzel: Die Wurzel hebt die Potenz (⟶) auf. Dabei hebt die Quadratwurzel die Potenz zweiter Ordnung (⟶) auf.

Zahl: Eine Zahl besteht aus Ziffern (⟶).
Zahlenmengen: Eine Zahlenmenge ist eine Menge (⟶) in der sich Zahlen (⟶) einer Art befinden.
Zahlenstrahl: Ein Zahlenstrahl ist eine Gerade (⟶), die in gleichbleibenden Abständen (⟶) wachsende Zahlen vorzuweisen hat.
Zähler: Der Zähler ist bei der Darstellung (⟶) als Bruch (⟶) der Dividend (⟶).
Ziffer: Ziffern sind die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Aus ihnen setzen sich weitere Zahlen (⟶) zusammen.
Zylinder: Ein Zylinder hat einen Kreis (⟶) zur Grundfläche (⟶), der ebenso der Grundfläche gegenüberliegt. Die Kreise sind in der Höhe (⟶) mit einander verbunden und bilden den Rand (⟶) eines Volumens (⟶). Der Zylinder besitzt drei Flächen (⟶), zwei Kanten (⟶) und keine Ecke (⟶).

ToDo

- Aufgabe: Mantelflächen
- Aufgabe: Textaufgaben
- Aufgabe: Geometrie mit Äquivalenzumformung
- Vokabeln ab partielle Differentiation
- Vokabeln Gleichungssysteme
- Schriftliches Wurzelziehen
- Verschobene Achsen- und Punktsymmetrien
- lokal vs. globale Minima und Maxima
- Horner Schema
- DGL und Distributionen ausführlicher
- Winkelbeziehungen
- Polynomfunktionen, Hyperbeln erkennen
- Parabel-Komplex: Zelt, Hangar, Brücke
- Vergrößern und Verkleinern
- Stereometrie - Komplex: Schwimmbad
- Zuordnungen: Autofahrten
- restliche Kapitel schreiben
- Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Eindeutigkeit (Graphen $\Rightarrow$ Aufgaben)